THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*
Discipline ou spécialité : *Mathématiques fondamentales*

Présentée et soutenue par

Ghada SALEM

Le *jeudi 20 janvier 2011*

Titre :
Homologie d'intersection géométrique pour les singularités coniques isolées.

JURY

Jean-Paul BRASSELET	*Marseille, France*	*Président*
Nicolae TELEMAN	*Ancône, Italie*	*Rapporteur*
Martin JAKOB	*Fribourg, Suisse*	*Examinateur*
Etienne FIEUX	*IMT, Toulouse III*	*Examinateur*
André LEGRAND	*IMT, Toulouse III*	*Directeur de thèse*
Claude HAYAT	*IMT, Toulouse III*	*Examinateur, invitée*

Ecole doctorale : *Mathématique Informatique Télécommunications de Toulouse (MITT)*
Unité de recherche : *Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)*
Directeur(s) de Thèse : *André LEGRAND*
Rapporteurs : *Jean-Paul BRASSELET, Nicolae TELEMAN*

A mes parents

A mon fiancé Tony

Remerciments

Je tiens à saluer les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la concrétisation de ce travail de thèse.

Tout d'abord, mes remerciements s'adressent à mon directeur de thèse, André LEGRAND, pour son aide et son encouragement prodigués tout au long de ce travail de recherche, ainsi que pour sa grande disponibilité, sa rigueur scientifique, son enthousiasme et ses précieux conseils qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions et de mener à bien ce travail. Sa relecture méticuleuse de chacun des chapitres m'a sans aucun doute permis de préciser mon propos.

Je remercie Claude HAYAT pour l'intérêt et la disponibilité dont elle a toujours fait preuve.

Je remercie Etienne FIEUX qui, pendant l'arrêt maladie de mon directeur de thèse, m'a apporté conseils et soutien. Son aide compétente m'a permis d'avancer dans ce travail.

Je remercie Jean-Paul BRASSELET pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse, de juger ce travail et d'en être le rapporteur. Je le remercie également pour ses conseils, ses suggestions et ses corrections qui ont permis l'amélioration de ce manuscrit.

Je remercie Nicolae TELEMAN pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail et de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier Martin JAKOB pour avoir accepté d'être membre du jury de ma thèse.

Je souhaite aussi remercier mes amis qui m'ont soutenu pendant les moments difficiles et les moments heureux.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à mes parents et à mon fiancé Tony qui ont toujours su m'offrir, tout au long de ces années de travail, leur soutien, leur compréhension, leurs encouragements, leur patience et leur affection.

A tous ceux qui n'ont pas été nominalement ou formellement mentionnés dans cette page, mais qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de cette thèse, je les remercie.

Toulouse, le 20 janvier 2011.

Table des matières

Chapitre I

Introduction

En 1982, dans leur preuve du théorème d'indice d'Atiyah-Singer, Paul Baum et Ronald Douglas donnent une construction géométrique de la K-homologie [4]. En 1998 Martin Jakob étend cette construction pour toutes les théories d'homologie généralisées [21].

Rappelons brièvement la construction de Baum-Douglas-Jakob pour une théorie cohomologique généralisée h^*. Etant donnée une paire d'espaces (X, A), un cycle géométrique de Jakob est un triplet (M, x, f) où :

M est une variété compacte h^*-orientable à bord ;
$x \in h^*(M)$ est une classe de cohomologie de M ;
$f : (M, \partial M) \to (X, A)$ est une application continue.

On met une relation d'équivalence sur les cycles géométriques. Cette relation est engendrée par une relation de bordisme et une relation du type "isomorphisme de Thom" appelée modification par fibré vectoriel (vector bundle modification dans les articles de Jakob). L'homologie géométrique est formée des classes d'équivalences de cycles géométriques. Elle est isomorphe à $h_*(X, A)$ ([21], Théorème 2.3.3).

Un cycle géométrique (M, x, f) représente la classe $f_*(x \cap [M, \partial M]) \in h_*(X, A)$ où $[M, \partial M]$ désigne la classe fondamentale relative de $(M, \partial M)$. Cela fournit une réponse au problème de la représentation des classes d'homologie d'un espace par la classe fondamentale d'une variété [30].

Les singularités ne sont pas des invariants homotopiques. Par exemple, comme l'avait dejà signalé Poincaré, il n'y a pas de produit d'intersection pour les pseudo-variétés. C'est pourquoi Goresky et MacPherson ont modifié l'homologie classique et ont introduit l'homologie d'intersection pour les pseudo-variétés stratifiées [15]. Pour cette homologie il existe un produit d'intersection et la dualité de Poincaré rationnelle est valable dans ce cadre singulier.

Dans l'homologie de Goresky-MacPherson, les cycles d'intersection sont ceux qui sont suffisamment transversaux aux strates de la partie singulière. Le défaut de transversalité est contrôlé par une suite monotone d'entiers $\bar{p} = (0, ..., p_N \leq N - 2)$ appelée perversité. Dans cette suite les indices correspondent aux codimensions des strates singulières et N est la dimension de la variété. L'homologie d'intersection de la variété stratifiée X associée à la perversité $\bar{p}$ est notée $IH_*^{\bar{p}}(X)$. L'homologie de Goresky-MacPherson n'est pas une théorie homologique mais elle est plus adaptée aux variétés singulières.

Dans ce mémoire on constuit une représentation géométrique de l'homologie d'intersection de Goresky-MacPherson. Pour simplifier on suppose que X n'admet qu'une singularité conique isolée. On note L le link de la singularité sur X et $\tilde{X}$ la variété de bord L obtenue en excisant la singularité. On a donc $X = \tilde{X}/L$. Dans ce cadre des singularités isolées la cohomologie d'intersection ne dépend que de l'entier $p = p_N$ de la perversité $\bar{p}$.

Comme on l'a déjà signalé pour la cohomologie de Goresky-MacPherson, seule la dualité de Poincaré rationnelle est vérifiée. Nous allons donc modifier cette cohomologie pour obtenir, dans le cas des variétés singulières de la forme $M/\partial M$, une cohomologie entière, duale par Poincaré de leur homologie d'intersection. Alors nous pourrons prendre les variétés à bord $(M, \partial M)$ comme supports des cycles géométriques d'intersection.

Nous construisons alors pour tout entier positif q et toute paire de CW-complexes de dimensions finies (Y, A) un nouveau complexe $JC_*^q(Y, A)$.
Pour M une variété à bord de dimension n le complexe $JC_*^q(M, \partial M)$ vérifie :

- ce complexe est quasi-isomorphe au complexe d'intersection $IC_*^{\bar{q}}(M/\partial M)$ de Goresky-MacPherson, $\bar{q}$ une perversité tel que $q = q_n$ (proposition IV.1.1) ;
- la cohomologie entière de ce complexe $JH_q^*(M, \partial M)$ est duale par Poincaré-Lefschetz de l'homologie d'intersection $IH_*^{\bar{p'}}(M/\partial M)$, $\bar{p'}$ tel que $p'_n = n - q - 2$ (théorème IV.1.2).

En modifiant ainsi le complexe d'intersection de Goresky-MacPherson, nous obtenons une dualité de Poincaré entière pour l'homologie d'intersection, dans le cas de pseudo-variété à singularité isolée. Par contre, il faut signaler que pour gagner cette propriété de dualité nous avons perdu la liberté du complexe de Goresky-MacPherson.

La J-cohomologie nous permet alors de construire une théorie géométrique $J'H_*^p(Y, A)$.
Un cycle géométrique d'intersection est un triplet $((M, \partial M), x, f)$ où :
M est une variété à bord orientable ;
$x \in JH_q^*(M, \partial M)$;
$f : (M, \partial M) \to (Y, A)$ est une application continue
avec $q = N - p - 2$ et $N = \dim Y$.
Si $(Y, A) = (\tilde{X}, L)$ est une variété à bord, on montre (théorème V.4.1) que

$$J'H_*^p(\tilde{X}, L) \cong IH_*^{\bar{p}}(\tilde{X}/L).$$

Théorème *Soit X une pseudo-variété avec une singularité conique isolée et soit $\bar{p}$ une perversité. La transformation*

$$\begin{array}{rcc} \varphi : J'H_j^p(\tilde{X}, L) & \to & IH_j^{\bar{p}}(X) \\ ((M, \partial M), x, f) & \to & f_*(x \cap [M, \partial M]) \end{array}.$$

est un isomorphisme.
La J-cohomologie permet donc de représenter géométriquement l'homologie d'intersection de Goresky-MacPherson.

Le passage à l'homologie d'intersection nous oblige à remplacer la relation de bordisme classique, utilisée par Jakob pour l'équivalence des cycles, par une relation de bordisme plus fine. Le cadre est les variétés à coins [12], on utilise le théorème de recollement démontré par Douady [13], et on ajoute des conditions sur les bords (voir section V.2).

Dans le chapitre VI, on utilise l'homologie d'intersection géométrique pour montrer que tout cycle d'intersection, pour la perversité $\bar{p}$, est l'image du cap produit de la classe fondamentale d'une variété à bord $(M, \partial M)$ par une classe de cohomologie dans $JH_q^*(M, \partial M)$ (corollaire VI.1.1) .

On montre également que la J-cohomologie vérifie l'isomorphisme de Thom (voir théorème VI.2.1).

La motivation pour construire une représentation géométrique de l'homologie d'intersection vient du problème suivant :
En 1969, dans un papier fondateur M. Atiyah [1], propose une représentation de la K-homologie d'une variété fermée par les opérateurs elliptiques sur cette variété.

Par leur construction géométrique de la K-homologie [4], Baum-Douglas associent à chaque opérateur elliptique un cycle en homologie. L'indice de l'opérateur est donné par la composante en degré 0 du cycle. C'est un résultat beaucoup plus fin que le théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice des opérateurs elliptiques [2].

Dans le cadre singulier stratifié il n'y a pas vraiment de théorème d'indice essentiellement homologique. Des invariants spectraux interviennent, voir le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer pour les variétés à bord [3] ou de Cheeger pour les variétés à singularités coniques [9]. Il faut remarquer que le résultat de Cheeger utilise la cohomologie L_2 qui s'identifie avec la cohomologie d'intersection en perversité moitié [8].

Il est donc important de prolonger au cadre singulier et en théorie d'intersection le programme de Baum-Douglas. Or dans le cadre de singularités coniques isolées, on dispose déjà d'une K-théorie d'intersection [24], [26].

Pour poursuivre le programme il nous fallait construire une dualité de Poincaré entière en homologie d'intersection. C'est ce qui est fait dans ce mémoire.

Chapitre II

Théories géométriques

Dans ce chapitre, on va rappeler brièvement les constructions et les résultats de Paul Baum, Ronald Douglas [4] et de Martin Jakob [21], concernant les théories géométriques. On suit la présentation de Martin Jakob.

II.1 Rappels et préliminaires

II.1.1 h^*-variété

Considérons une théorie cohomologique multiplicative h^* [31] [14] et un fibré vectoriel muni d'une métrique $E \to M$ de rang r au-dessus d'une variété différentiable compacte M. Notons par $DE \to M$ le fibré en disques et par $SE \to M$ le fibré en sphères associé à cette métrique [20].

Dans ce mémoire tous les groupes de cohomologie et d'homologie sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition II.1.1. *Une classe de Thom, ou une orientation de E, est une classe de cohomologie $u_E \in h^r(DE, SE)$ telle que la restriction $u_E|_{(DE_p,SE_p)} \in h^r(DE_p, SE_p) \cong h^0(pt)$ soit un générateur pour chaque $p \in M$.*

Cette classe de Thom induit un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} t_E : h^q(M) & \to & h^{q+r}(DE, SE) \\ x & \longrightarrow & \pi^*(x).u_E \end{array}$$

appelé isomorphisme de Thom.

Définition II.1.2. *On dit que M est une h^*-variété si son fibré tangent admet une classe de Thom.*

Si M est une h^*-variété de dimension n, alors $h_n(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$ et admet pour générateur une classe homologique $[M] \in h_n(M, \partial M)$, sa classe fondamentale. Le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \Phi_M : h^q(M) & \to & h_{n-q}(M, \partial M) \\ x & \longrightarrow & x \cap [M] \end{array}$$

où $\cap$ est le cap produit $\cap : h^p(X, A) \otimes h_q(X, A \cup B) \longrightarrow h_{q-p}(X, B)$, est un isomorphisme appelé isomorphisme de dualité de Poincaré-Lefshetz.

II.1.2 h-bordisme

Pour une paire d'espaces (X, A) considérons les triplets de la forme (M^n, x^k, f) où :
M^n est une h^*-variété à bord de dimension n,
$x^k \in h^{n-k}(M)$,
$f : (M, \partial M) \longrightarrow (X, A)$ est une application continue.

Définition II.1.3. *Un triplet (M^n, x^k, f) est appelé un triplet géométrique. On dit que deux triplets (M_0^n, x_0^k, f_0) et (M_1^n, x_1^k, f_1) sont h-bordants s'il existe un triplet (W^{n+1}, x^k, f) tel que :*

> *W est une h^*-variété à bord de dimension $n+1$ avec $\partial W \supset M_0 \cup M_1$,*
> *$x \in h^{n-k}(W)$ avec $x_j = x|_{M_j}$,*
> *$f : W \longrightarrow X$ avec $f(\partial W - M_0 \overset{\circ}{\cup} M_1) \subset A$ et $f_j = f|M_j$.*

Cette relation de h-bordisme est une relation d'équivalence.

II.1.3 L'homomorphisme de Gysin d'une section

Soit $E \to M$ un fibré de rang r admettant une classe de Thom u_E. Posons $V \cong E \oplus 1$ alors $V \to M$ de rang $r+1$ admet une classe de Thom $u_V \in h^r(D,S)$, avec $D = DV$ et $S = SV$. Il est évident que D sera une variété différentiable de dimension $n+r+1$ et de bord la variété à coins $\partial D = D|_{\partial M} \cup S$ et S une variété différentiable de dimension $n+r$ et de bord $\partial S = S|_{\partial M}$. Puisque V est orientée alors D et S le sont aussi. Le fibré V admet une section partout non nulle

$$\begin{array}{rcc} \sigma : M & \to & V \\ m & \longrightarrow & (0_m, 1) \end{array}.$$

On peut considérer σ comme une section de $S \longrightarrow M$.
Puisque M et S sont des h^*-variétés alors il existe Φ_S *et* Φ_M isomorphismes de Poincaré-Lefschetz avec

$$\begin{array}{rcc} \Phi_M : h^q(M) & \to & h_{n-q}(M, \partial M) \\ x & \longrightarrow & x \cap [M] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcc} \Phi_S : h^{q+r}(S) & \to & h_{n-q}(S, \partial S) \\ x & \longrightarrow & x \cap [S] \end{array}$$

où $[M]$ et $[S]$ sont les classes fondamentales respectives de M et S.
Maintenant on définit l'homomorphisme de Gysin $\sigma_! : h^q(M) \longrightarrow h^{q+r}(S)$ par

$$\sigma_!(x) = \Phi_S^{-1} \circ \sigma_* \circ \Phi_M(x).$$

On peut aussi définir l'homomorphisme de Gysin à partir de l'isomorphisme de Thom. Regardons S comme l'union de deux copies du fibré en disques DE collées ensemble selon leur bord commun SE, c'est-à-dire $S = D^+E \cup_{SE} D^-E$. Alors $\sigma_!$ est défini comme le composé des applications suivantes :

$$\sigma_! : h^q(M) \xrightarrow{t_E} h^{q+r}(D^+E, SE) \xrightarrow{\cong} h^{q+r}(S, D^-E) \xrightarrow{i^*} h^{q+r}(S).$$

avec t_E est l'isomorphisme de Thom , $\cong$ est l'excision et i^* est induite par l'inclusion $i : (S, \emptyset) \subset (S, D^-E)$.

II.2 Construction de l'homologie géométrique

Dans cette section on va rappeler la construction donnée par Jakob de la représentation géométrique d'une théorie cohomologique h^*.

Mettons une relation d'équivalence sur les triplets (M, x, f).
Deux triplets (M, x, f) et (M', x', f') sont équivalents s'il existe un difféomorphisme $F : M \longrightarrow M'$ qui préserve les h-structures tel que $f' = f \circ F$ et $x' = F^* x$. Les classes d'équivalence de triplets sont appelés *cycles géométriques*.

Considérons maintenant le groupe abélien libre engendré par tous les cycles et prenons le quotient par le sous-groupe engendré par toutes les différences de la forme :

$$(M, x, f) - (M_1, x|_{M_1}, f|_{M_1}) - (M_2, x|_{M_2}, f|_{M_2}),$$

où $M = M_1 \sqcup M_2$ et toutes les différences de la forme

$$(N, u + v, g) - (N, u, g) - (N, v, g),$$

où $\sqcup$ est l'union disjointe. Notons ce quotient par $G(X, A)$.

Maintenant soit $U(X, A) \subset G(X, A)$ le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme :
(a) (M, x, f) s'il existe un cycle $(W, \tilde{x}, \tilde{f}) \in G(X, X)$ tel que $M \subset \partial W$, $\tilde{x}|_M = x, \tilde{f}|_M = f$ *et* $\tilde{f}(\partial W - M) \subset A$ (bordisme),
(b) $(M, x, f) - (S(E \oplus 1), \sigma_!(x), f \circ \pi)$ o $E \longrightarrow M$ est un h-fibré vectoriel (modification par fibré vectoriel).

Définissons maintenant le foncteur homologie géométrique [21].

Définition II.2.1. *Le foncteur*

$$(X, A) \longrightarrow h'_*(X, A) = G(X, A)/U(X, A)$$

est le foncteur d'homologie géométrique associé à h^*. La classe du cycle (M, x, f) est notée par $[M, x, f]$.

Le groupe $h'_*(X, A)$ est $\mathbb{Z}$-gradué en posant
$h'_q(X, A) = \{[M, x, f] \in h'_*(X, A);\ x|_{M_i}$ est homogène et $\dim(M_i) - \dim(x|_{M_i}) = q\}$
où les M_i sont les composantes connexes de M. Jakob montre [21] :

Proposition II.2.1. *Si X est un CW complexe fini alors toute classe d'homologie $y \in h_*(X)$ peut être représentée par un cycle géométrique (M, x, f) tel que $y = f_*(x \cap [M])$.*

Preuve:
Comme X est un CW complexe fini, on peut le plonger dans un $\mathbb{R}^l$ convenable, puis on construit un voisinage tubulaire et on utilise la méthode de Hirsch pour le lisser. Alors on obtient une variété différentiable W de dimension l et un rétracte par déformation

$r : W \to X \subset W$. La rétraction r induit un isomorphisme $r_* : h_*(W) \to h_*(X)$, donc pour $y \in h_*(X)$ il existe $y_1 \in h_*(W)$ tel que $r_*(y_1) = y$.
Maintenant on prend un fibré en disques trivial au-dessus de W noté $D := D^k \times W$.
Le bord ∂D est alors une h^*-variété avec $\partial D = \partial(D^k \times W) = (S^{k-1} \times W) \cup (D^k \times \partial W)$ qui est une variété sans bord.
La projection $\pi : \partial D \to W$ induit une application surjective $\pi_* : h_*(\partial D) \to h_*(W)$.
Pour $y_1 \in h_*(W)$ il existe $y_2 \in h_*(\partial D)$ tel que $\pi_*(y_2) = y_1$.
D'après la dualité de Poincaré il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\partial D} : h^*(\partial D) & \to & h_*(\partial D) \\ x & \longrightarrow & x \cap [\partial D]. \end{array}$$

Donc pour $y_2 \in \partial D$, il existe $x \in h^*(\partial D)$ tel que $y_2 = x \cap [\partial D]$. On a $y = r_* y_1 = r_* \pi_* y_2 = (r \circ \pi)_*(x \cap [\partial D])$.
Il suffit alors de prendre $(M, x, f) = (\partial D, x, r \circ \pi)$.

La relation entre l'homologie géométrique h'_* et l'homologie h_* est donnée par le résultat suivant ([21], Théorème 2.3.3)

Théorème II.2.1. *La tranformation naturelle $\varphi : h'_*(X, A) \longrightarrow h_*(X, A)$ définie par*

$$\varphi([M, x, f]) := f_*(x \cap [M])$$

est un isomorphisme.

Lorsque le bord est vide ce théorème est aussi un corollaire du théoréme V.4.1 que nous montrerons plus loin.

Chapitre III

Homologie et cohomologie d'intersection de Goresky-MacPherson

L'homologie d'intersection est une théorie introduite par Goresky-MacPherson en 1980 pour étendre aux variétés singulières la propriété d'intersection des cycles propriété bien connue dans le cadre compact lisse [15]. C'était un problème déjà soulevé par Poincaré. La dualité de Poincaré rationnelle est vérifiée en corollaire.

Dans ce chapitre nous allons rappeler la construction de l'homologie d'intersection de Goresky-MacPherson pour les pseudo-variétés stratifiées et puis nous expliciterons le cas particulier de pseudo-variétés à singularités coniques isolées.

III.1 Homologie d'intersection des pseudo-variétés stratifiées.

Notre référence principale dans ce chapitre est celle de Jean-Paul Brasselet [5].

Définition III.1.1. *Un CW-complexe localement compact X est une pseudo-variété de dimension n si il existe un sous-ensemble fermé de X noté Σ tel que :*

1. *$X - \Sigma$ est une variété lisse, orientée, de dimension n, dense dans X.*
2. *$\dim(\Sigma) \leq n-2$.*

La dimension de Σ est le maximum de la dimension en chacun de ses points.
On appelle Σ l'ensemble singulier de l'espace X.

La pseudo-variété X est dite stratifiée et à singularités coniques si il existe une filtration :

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} \supset X_{n-3} \ldots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

telle que :

1. *Pour tout i on a $X_i - X_{i-1} = \bigcup_{j \in J_i} S_j$ où J_i est un ensemble fini et chaque S_j une variété lisse de dimension i.*
2. *$X_{n-2} = \Sigma$ l'ensemble singulier de X.*
3. *$\forall x \in X_i - X_{i-1}$ il existe un voisinage U de x dans X et φ un homéomorphisme*

$$U \xrightarrow{\varphi} B^i \times \mathring{C}(L_x)$$

où :
– B^i est une i-boule ouverte
– L_x une pseudo-variété compacte, de dimension $n-i-1$, filtrée en

$$L_x = L_{n-i-1} \supset L_{n-i-3} \ldots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset$$

– $\mathring{C}(L_x)$ désigne le cône ouvert sur L_x.
L'homéomorphisme φ vérifie de plus,

$$\varphi(U \cap X_k) = \mathring{C}(L_{k-i-1}) \times B^i$$

pour $k \geq i$.

Remarque III.1.1. *L'hypothèse $X_{n-1} = X_{n-2}$ implique l'existence d'une classe fondamentale.*

On considère une pseudo-variété X munie d'une stratification donnée comme dans la définition III.1.1. D'une manière générale on définit une perversité comme une suite d'entiers naturels $\bar{p} = (p_0, p_1, ...p_n)$ les indices sont les codimensions des strates.
Parmi les perversités nous allons retenir celles que l'on appelle perversités de Goresky-MacPherson.

Définition III.1.2. *Une perversité de Goresky-MacPherson est une suite d'entiers naturels $\bar{p} = (p_0, p_1, ..., p_n)$ telle que $p_0 = p_1 = p_2 = 0$ et pour tout j, $p_{j+1} = p_j$ ou $p_{j+1} = p_j + 1$. La 0-pervrsité est $\bar{0} = (0, 0, ..., 0)$ et la perversité totale $\bar{t} = (0, 0, 0, 1, 2, ..., n-2)$.*

III.1.1 Complexe d'intersection

Nous suivons [5] section 2.2. Soit X une pseudo-variété P.L. stratifiée, localement compacte et $\bar{p}$ une perversité.
Soit (T) une triangulation localement finie de X, On note $C_i^{(T)}(X)$ le groupe des i-chaînes simpliciales orientées de X, à supports compacts, pour la triangulation (T). Le groupe des i chaînes P.L de X, noté $C_i(X)$ est défini comme la limite inductive des $C_i^{(T)}(X)$ pour toutes les triangulations de X (c'est-à-dire la réunion des groupes $C_i^{(T)}(X)$ pour toutes les triangulations (T), modulo l'identification de deux chaînes $\sigma \in C_i^{(T)}(X)$ et $\sigma' \in C_i^{(T')}(X)$ s'il existe une sous-triangulation (T") commune de (T) et (T') tels que les images canoniques de σ et σ' dans $C_i^{(T'')}(X)$ coïncident). On désigne par $C_*(X)$ le complexe formé par les groupes $C_i(X)$ et l'opérateur bord ∂. On note $|\sigma|$ le support d'une chaîne $\sigma \in C_i(X)$ qui est la réunion des adhérences des i-simplexes ψ dont le coefficient dans σ est non nul.

On considère dans ce chapitre les chaînes à supports compacts.

Définition III.1.3. *Une chaîne $\sigma \in C_i(X)$ est $(\bar{p}, i)$ permise si pour tout α :*

$$\dim(|\sigma| \cap X_{n-\alpha}) \leq i - \alpha + p_\alpha.$$

Le groupe des i-chaînes simpliciales d'intersection, noté $IC_i^{\bar{p}}(X)$ est le sous-groupe de $C_i(X)$ formé des chaînes $(\bar{p}, i)$ permises σ, telles que $\partial\sigma$ soit une chaîne $(\bar{p}, i-1)$ permise. On note $IC_*^{\bar{p}}(X)$ le complexe formé par les groupes $IC_i^{\bar{p}}(X)$ et l'homorphisme bord ∂.

$$\cdots \xrightarrow{\partial} IC_{n+1}^{\bar{p}}(X) \xrightarrow{\partial} IC_n^{\bar{p}}(X) \xrightarrow{\partial} .... \xrightarrow{\partial} IC_0^{\bar{p}}(X) \to 0.$$

Rappelons que les groupes d'homologies et de cohomologies sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Les groupes d'homologie d'intersection sont les groupes d'homologie du complexe $IC_*^{\bar{p}}(X)$. On les note $IH_i^{\bar{p}}(X)$. Donc pour tout entier naturel i nous avons

$$IH_i^{\bar{p}}(X) = H_i(IC_*^{\bar{p}}(X), \partial).$$

En particulier, tout n-cycle σ vérifie la relation

$$\dim(|\sigma| \cap X_{n-\alpha}) \leq i - \alpha + p_\alpha.$$

Or nous avons toujours $n - \alpha + p_\alpha \geq n - \alpha$, et comme $\dim(X_{n-\alpha}) = n - \alpha$, la condition précédente est vide. Donc pour toute perversité $\bar{p}$, on a $IH_n^{\bar{p}}(X) = H_n(X)$.

De même, toutes les 0-chaînes sont permises, car elles ne rencontrent pas les singularités, par conséquent pour toute perversité $\bar{p}$, nous avons $IH_0^{\bar{p}}(X) = H_0(X - \Sigma)$.

En contrôlant ainsi le défaut de transversalité des cycles avec la partie singulière, Goresky et MacPherson peuvent définir l'intersection d'un cycle $\bar{p}$ permis par un cycle $\bar{q}$ permis comme étant un cycle $\bar{r}$ permis lorsque $\bar{p} + \bar{q} \leq \bar{r}$.

Théorème III.1.1. *Lorsque $\bar{p} + \bar{q} \leq \bar{r}$, l'intersection des cycles définit un produit d'intersection*

$$IH_{n-k}^{\bar{p}}(X) \otimes IH_{n-l}^{\bar{q}}(X) \xrightarrow{\psi} IH_{n-k-l}^{\bar{r}}(X).$$

De plus si k+l=n et $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$ nous avons la dualité rationnelle

$$IH_{n-k}^{\bar{p}}(X, \mathbb{Q}) \otimes IH_k^{\bar{q}}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow IH_0^{\bar{p}+\bar{q}}(X, \mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}.$$

III.2 Quelques résultats utiles

Soit X une pseudo-variété stratifiée compacte et $\bar{p}$ une perversité si $\bar{p}$ et $\bar{q}$ sont deux perversités telles que $\bar{p} \leq \bar{q}$ alors nous avons un morphisme naturel

$$IC_*^{\bar{p}}(X) \hookrightarrow IC_*^{\bar{q}}(X)$$

On peut donc construire un morphisme naturel $IH_*^{\bar{p}}(X) \to IH_*^{\bar{q}}(X)$. En particulier, pour toute perversité $\bar{p}$, on aura toujours un morphisme naturel $IH_*^{\bar{0}}(X) \to IH_*^{\bar{p}}(X)$

On considère toujours les chaînes à support compact.

III.2.1 Homologie relative.

Soit X une pseudo-variété, stratifiée, localement compacte et $\bar{p}$ une perversité, et soit U un ouvert de X. L'ouvert U admet une structure de pseudo-variété stratifiée induite par celle de X. Le complexe $IC_*^{\bar{p}}(U)$ est un sous complexe de $IC_*^{\bar{p}}(X)$ on pose :

$$IC_*^{\bar{p}}(X, U) = \frac{IC_*^{\bar{p}}(X)}{IC_*^{\bar{p}}(U)}$$

Proposition III.2.1. *Nous avons la suite exacte longue :*

$$\cdots \to IH_i^{\bar{p}}(U) \to IH_i^{\bar{p}}(X) \to IH_i^{\bar{p}}(X, U) \xrightarrow{\partial} IH_{i-1}^{\bar{p}}(U) \to \cdots$$

III.2.2 Suite exacte de Mayer-Vietoris.

Soit X une pseudo-variété topologique, stratifiée, localement compacte, et A et B sont deux ouverts de X, alors de même qu'en homologie classique, on a

$$H_*(IC_i^{\bar{p}}(A) + IC_i^{\bar{p}}(B)) = H_*(IC_i^{\bar{p}}(A \cup B))$$

et la suite exacte de Mayer-Vietoris

Proposition III.2.2. *Soit X une pseudo-variété topologique, stratifiée, localement compacte. Si Aet B sont deux ouverts de X et $\bar{p}$ une perversité, on a la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :*

$$\cdots \to IH_{i+1}^{\bar{p}}(A \cup B) \to IH_i^{\bar{p}}(A \cap B) \to IH_i^{\bar{p}}(A) \oplus IH_i^{\bar{p}}(B) \to IH_i^{\bar{p}}(A \cup B) \to \cdots$$

III.2.3 Excision en homologie d'intersection.

Soit X une pseudo-variété topologique, stratifiée, localement compacte, soit $\bar{p}$ une perversité.

Proposition III.2.3. *Soit X une pseudo-variété topologique, stratifiée, localement compacte et $\bar{p}$ une perversité. Soit $V \subset U \subset X$, U est un ouvert de X et V est un ouvert de U tel que $\bar{V} \subset U$ l'inclusion $(X - V, U - V) \hookrightarrow (X, U)$ induit un isomorphisme :*

$$IH_*^{\bar{p}}(X, U) \approx IH_*^{\bar{p}}(X - V, U - V).$$

L'homologie d'intersection satisfait toutes les propriétés d'une théorie d'homologie sauf l'invariance par homotopie.

Passons maintenant au cas des pseudo-variétés à singularités coniques isolés.

III.3 Homologie d'intersection des pseudo-variétés à singularités coniques isolées

Soit X une pseudo-variété de dimension n avec une seule singularité isolée $x \in X$ et admettant un voisinage U de x homéomorphe au cône $cL = [0, 1[\times L/\{0\} \times L$. La variété lisse L est appelée link de la singularité x. La pseudo-variété X est naturellement filtrée en posant

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} = ... = X_0 = \{x\}.$$

Les strates sont alors

$$S_n = X - \{x\}; \quad S_{n-1} = ... = S_1 = \emptyset \quad et \quad S_0 = \{x\}.$$

Etant donnée une perversité $\bar{p} = (p_0 = 0, p_1 = 0, p_2 = 0, p_3, \ldots, p_n)$ de Goresky-MacPherson, $(p_i \leq p_{i+1} \leq p_i + 1)$, on rappelle qu'une chaîne c_i de dimension i est permise si on a la condition,

$$\dim(c_i \cap X_{n-j}) \leq i - j + p_j \quad \forall j. \tag{1}$$

La condition (1) est évidemment vérifiée pour les strates vides. Pour la strate S_n elle est aussi toujours vérifiée car $\dim(c_i \cap S_n) = i \leq i + p_0 = i$. Il en résulte que dans le cas de singularités ponctuelles isolées, seule intervient la composante $0 \leq p_n \leq n-2$ relative à la strate S_0.

Pour la strate S_0 une chaîne c_i de dimension i est permise si $\dim(c_i \cap S_0) \leq i - n + p_n$, donc c_i est permise

1. si elle ne rencontre pas la singularité, ou bien,
2. si elle rencontre la singularité, à condition d'avoir $0 \leq i - n + p_n$ c'est-à-dire $i \geq n - p_n$.

Regardons le cas particulier où $X = U = cL$. Tous les cycles du link sont permis puisqu'ils ne rencontrent pas le sommet x. Un tel cycle de dimension i est le bord de la $(i+1)$-chaîne formée par le cône de base ce cycle et de sommet x. Cette chaîne qui rencontre le sommet est permise si $i + 1 \geq n - p_n$. Il en résulte que seuls subsistent les i-cycles du link tels que $i \leq n - p_n - 2 = q_n$. Dans la suite on pose $q = q_n$.

Nous venons de prouver voir [5] :

Proposition III.3.1. *L'homologie d'intersection à supports compact du cône $U = cL = \frac{[0,1[\times L}{\{0\}\times L}$ sur une variété lisse L pour une perversité $\bar{p}$ est donnée par*

$$IH_j^{\bar{p}}(U) = \begin{cases} H_j(L) & si \quad j \leq q \\ 0 & si \quad j > q \end{cases}$$

En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris la proposition précédente implique le théorème suivant,

Théorème III.3.1. *Soit X une pseudo-variété topologique de dimension n, admettant une singularité conique isolée en x. Pour toute perversité $\bar{p}$, posons $q = n - p_n - 2$ on a*

$$IH_j^{\bar{p}}(X) = \begin{cases} H_j(X - x) \quad pour \quad j \leq q \\ \operatorname{Im}(H_{q+1}(X-x) \mapsto H_{q+1}(X)) \quad pour \quad j = q+1 \\ H_j(X) \quad pour \quad j \geq q+2. \end{cases}$$

Preuve:
Appliquons la suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie d'intersection à la paire

$(\widehat{X}, U)$ où U est un voisinage conique de x de base L et $\widehat{X} = X - \{x\}$.

$$...IH_j^{\bar{p}}((\widehat{X}) \cap U) \to IH_j^{\bar{p}}(\widehat{X}) \oplus IH_j^{\bar{p}}(U) \to IH_j^{\bar{p}}(X) \to IH_{j-1}^{\bar{p}}((\widehat{X}) \cap U) \to ...$$

Or $\widehat{X}$ est lisse alors $IH_*^{\bar{p}}(\widehat{X}) \cong H_*(\widehat{X})$
et $(\widehat{X}) \cap U \cong L \times]0,1[$ lisse donc $IH_*^{\bar{p}}((\widehat{X}) \cap U) \cong H_*(L \times]0,1[) \cong H_*(L)$.
La suite exacte devient alors :

$$...H_j(L) \to H_j(\widehat{X}) \oplus IH_j^{\bar{p}}(U) \to IH_j^{\bar{p}}(X) \to H_{j-1}(L) \to H_{j-1}(\widehat{X}) \oplus IH_{j-1}^{\bar{p}}(U)...$$

Il y a 3 cas à considérer :
<u>Cas 1 :</u> $j \leq q$
Dans ce cas on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_j(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_j(\widehat{X}) \oplus H_j(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & IH_j^{\bar{p}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_{j-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_{j-1}(\widehat{X}) \oplus H_{j-1}(L) \arrow[d, "\|"'] \\
H_j(L) \arrow[r] & H_j(\widehat{X}) \oplus H_j(L) \arrow[r] & H_j(\widehat{X}) \arrow[r] & H_{j-1}(L) \arrow[r] & H_{j-1}(\widehat{X}) \oplus H_{j-1}(L)
\end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq donne $IH_j^{\bar{p}}(X) \cong H_j(\widehat{X})$

<u>Cas 2 :</u> $j = q + 1$
On aura alors

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(L) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\|"'] & H_{q+1}(\widehat{X}) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\|"'] & IH_{q+1}^{\bar{p}}(X) \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "\alpha"] & H_q(L) \arrow[d, "\|"'] \\
H_{q+1}(L) \arrow[r, "q_1"] & H_{q+1}(\widehat{X}) \arrow[r, "q_2"] & H_{q+1}(X) \arrow[r, "q_3"] & H_q(L)
\end{tikzcd}$$

De ce diagramme commutatif on peut déduire que α est injective.
En effet :

$$\begin{aligned}
x \in \ker\alpha &\Rightarrow \alpha(x) = 0 \\
&\Rightarrow p_3(x) = q_3(\alpha(x)) = 0 \\
&\Rightarrow x \in \ker p_3 = \mathrm{Im} p_2 \\
&\Rightarrow \exists y \in H_{q+1}(\widehat{X}) \ telque \ x = p_2(y) \\
&\Rightarrow q_2(y) = \alpha(p_2(y)) = \alpha(x) = 0 \\
&\Rightarrow y \in \ker q_2 = \mathrm{Im} q_1 \\
&\Rightarrow \exists z \in H_{q+1}(L) \ telque \ q_1(z) = y = p_1(z) \\
&\Rightarrow x = p_2(y) = p_2(q_1(z)) = p_2 \circ p_1(z) = 0
\end{aligned}$$

D'où $IH_{q+1}^{\bar{p}}(X) \cong \mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Im}(H_{q+1}(\widehat{X}) \to H_{q+1}(X))$

<u>Cas 3 :</u> $j \geq q + 2$

On applique le lemme des cinq au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_j(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_j(\widehat{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & IH_j^{\bar{p}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_{j-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_{j-1}(\widehat{X}) \arrow[d, "\|"'] \\
H_j(L) \arrow[r] & H_j(\widehat{X}) \arrow[r] & H_j(X) \arrow[r] & H_{j-1}(L) \arrow[r] & H_{j-1}(\widehat{X})
\end{tikzcd}$$

et on obtient l'isomorphisme $IH_j^{\bar{p}}(X) \cong H_j(X)$

III.4 Cohomologie d'intersection de pseudo-variétés à singularités coniques isolés

On définit la cohomologie d'intersection à supports compacts et à coefficients dans $\mathbb{Z}$ comme la cohomologie du complexe $Hom(IC_*^{\bar{p}}, \mathbb{Z})$ c'est-à-dire $IH_{\bar{p}}^j = H^j(Hom(IC_*^{\bar{p}}, \mathbb{Z}))$.

Rappelons que les groupes de cohomologies qu'on prend sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Proposition III.4.1. *La cohomologie d'intersection à supports compacts du cône* $U = cL = \frac{[0,1[\times L}{\{0\}\times L}$ *sur une variété lisse* L *pour une perversité* $\bar{p}$ *est donnée par*

$$IH_{\bar{p}}^j(U) = \begin{cases} H^j(L) \quad si \quad j \leq q \\ Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \quad si \quad j = q+1 \\ 0 \quad si \quad j \geq q+2 \end{cases}$$

Preuve:
On a $IC_*^{\bar{p}}(U) \subseteq C_*(U)$ avec $C_*(U)$ libre donc $IC_*^{\bar{p}}(U)$ est libre comme étant un sous-groupe d'un groupe libre. On peut appliquer le théorème des coefficients universels et on a la suite exacte suivante :

$$0 \to Ext(IH_{j-1}^{\bar{p}}(U), \mathbb{Z}) \to IH_{\bar{p}}^j(U) \to Hom(IH_j^{\bar{p}}(U), \mathbb{Z}) \to 0$$

On a 3 cas à traiter :

<u>**Cas 1 :**</u> $j \leq q$
Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ext(H_{j-1}(L), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & IH_{\bar{p}}^j(U) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(H_j(L), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & 0 . \\
0 \arrow[r] & Ext(H_{j-1}(L), \mathbb{Z}) \arrow[r] & H^j(L) \arrow[r] & Hom(H_j(L), \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq implique pour $j \leqslant q$

$$IH_{\bar{p}}^j(U) \cong H^j(L).$$

Cas 2 : $j = q+1$
La suite exacte devient

$$0 \to Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \to IH^{q+1}_{\bar{p}}(U) \to 0,$$

ce qui donne pour $j = q+1$

$$IH^{q+1}_{\bar{p}}(U) \cong Ext(H_q(L), \mathbb{Z}).$$

Cas 3 : $j \geq q+2$
La suite exacte devient

$$0 \to Ext(0, \mathbb{Z}) \to IH^{j}_{\bar{p}}(U) \to Hom(0, \mathbb{Z}) \to 0$$

et donc pour $j \geqslant q+2$

$$IH^{j}_{\bar{p}}(U) = 0.$$

Remarquons que du point de vue de l'homologie à supports compacts la variété ouverte $\widehat{X} = X - \{x\}$ s'identifie à la variété de bord L notée $\tilde{X}$. Dans ce cas $X = \tilde{X}/L$.

Maintenant nous allons utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris pour montrer

Théorème III.4.1. *Soit $X = \tilde{X}/L$ une pseudo-variété topologique de dimension n, admettant une singularité conique isolée en x. Pour toute perversité $\bar{p}$ on a*

$$IH^{j}_{\bar{p}}(X) = \begin{cases} H^j(X - \{x\}) & si \quad j \leqslant q \\ \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z})) & si \quad j = q+1 \\ H^{q+2}(X)/\delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z})) & si \quad j = q+2 \\ H^j(X) & si \quad j > q+2 \end{cases}$$

Les applications φ et δ induites de la suite courte exacte

$$0 \to L \to \tilde{X} \to \tilde{X}/L \to 0$$

sont définies dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} H^{q+1}(\tilde{X}) & \xrightarrow{\varphi} & H^{q+1}(L) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+2}(X) \\ & & \cup & & \\ & & Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

Preuve:
Mayer-Vietoris en cohomologie d'intersection appliquée à la paire $(\widehat{X}, U)$ donne la suite exacte :

$$IH^{j-1}_{\bar{p}}(\widehat{X}) \oplus IH^{j-1}_{\bar{p}}(U) \to IH^{j-1}_{\bar{p}}(\widehat{X} \cap U) \to IH^{j}_{\bar{p}}(X) \to IH^{j}_{\bar{p}}(\widehat{X}) \oplus IH^{j}_{\bar{p}}(U) \to IH^{j}_{\bar{p}}(\widehat{X} \cap U)$$

Or $\widehat{X}$ est lisse donc $IH^{j}_{\bar{p}}(\widehat{X}) \cong H^j(\widehat{X}) \cong H^j(\tilde{X})$ et $\widehat{X} \cap U \cong L \times]0,1[$ lisse aussi donc $IH^{j}_{\bar{p}}(\widehat{X} \cap U) \cong H^j(L \times]0,1[) \cong H^j(L)$ pour tout j.
La suite exacte devient alors :

$$H^{j-1}(\tilde{X}) \oplus IH^{j-1}_{\bar{p}}(U) \to H^{j-1}(L) \to IH^{j}_{\bar{p}}(X) \to H^{j}(\tilde{X}) \oplus IH^{j}_{\bar{p}}(U) \to H^j(L)$$

On a 4 cas à traiter :

<u>Cas 1 :</u> $j \leq q$
Dans ce cas on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{j-1}(\tilde{X}) \oplus H^{j-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H^{j-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & IH^{j}_{\bar{p}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^{j}(\tilde{X}) \oplus H^{j}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H^j(L) \arrow[d, "\|"'] \\
H^{j-1}(\tilde{X}) \oplus H^{j-1}(L) \arrow[r] & H^{j-1}(L) \arrow[r] & H^{j}(\tilde{X}) \arrow[r] & H^{j}(\tilde{X}) \oplus H^{j}(L) \arrow[r] & H^j(L)
\end{tikzcd}$$

et le lemme des cinq donne pour $j \leq q$:

$$IH^{j}_{\bar{p}}(X) \cong H^j(\tilde{X}) \cong H^j(X - \{x\})$$

<u>Cas 2 :</u> $j > q + 2$
Le lemme des cinq appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{j-1}(\tilde{X}) \arrow[r] & H^{j-1}(L) \arrow[r] & IH^{j}_{\bar{p}}(X) \arrow[r] & H^{j}(\tilde{X}) \arrow[r] & H^j(L) \\
H^{j-1}(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[u, "\|"'] & H^{j-1}(L) \arrow[r] \arrow[u, "\|"'] & H^{j}(X) \arrow[r] \arrow[u] & H^{j}(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[u, "\|"'] & H^j(L) \arrow[u, "\|"']
\end{tikzcd}$$

donne pour $j > q + 2$

$$IH^{j}_{\bar{p}}(X) \cong H^j(X)$$

<u>Cas 3 :</u> $j = q + 1$
On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^q(\tilde{X}) \oplus H^q(L) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\|"'] & H^q(L) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\|"'] & IH^{q+1}_{\bar{p}}(X) \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^{q+1}(\tilde{X}) \oplus Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \arrow[r, "p_4"] \arrow[d, "\beta"'] & H^{q+1}(L) \arrow[d, "\|"'] \\
H^q(\tilde{X}) \oplus H^q(L) \arrow[r, "q_1"] & H^q(L) \arrow[r, "q_2"] & H^{q+1}(\tilde{X}) \arrow[r, "q_3"] & H^{q+1}(\tilde{X}) \oplus H^{q+1}(L) \arrow[r, "q_4"] & H^{q+1}(L)
\end{tikzcd}$$

Puisque β est injective le lemme des quatre[1] donne que α est injective et on a

$$IH^{q+1}_{\bar{p}}(X) \cong \mathrm{Im}\alpha$$

Démontrons que

$$\mathrm{Im}\alpha = \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$$

avec

$$\varphi : H^{q+1}(\tilde{X}) \to H^{q+1}(L)$$

Considérons $\tilde{x} \in \mathrm{Im}\alpha$. Soit $x \in IH^{q+1}_{\bar{p}}(X)$ tel que $\alpha(x) = \tilde{x}$. On a

$$q_3(\alpha(x)) = q_3(\tilde{x}) = \tilde{x} + \tilde{x}|_L = \beta(p_3(x)) = \beta(\tilde{x} + y).$$

On déduit

$$q_4(\beta(\tilde{x} + y)) = q_4(\tilde{x} + \tilde{x}|_L) = \varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}|_L = 0$$

donc $p_4(\tilde{x} + y) = \varphi(\tilde{x}) - y = 0$ et $\tilde{x} \in \varphi^{-1}(y) \subset \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$
Ce qui nous donne la première inclusion.
Démontrons maintenant l'autre inclusion.
Soit $\tilde{x} \in H^j(\tilde{X})$ avec $\varphi(\tilde{x}) \in Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$. On a $p_4(\tilde{x} + \varphi(\tilde{x})) = 0$
ce qui donne $\tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) \in \ker p_4 = \mathrm{Im} p_3$ et il existe $x \in IH^{q+1}_{\bar{p}}(X)$ tel que $p_3(x) = \tilde{x} + \varphi(\tilde{x})$.
On déduit

$$q_3(\alpha(x)) = \beta(p_3(x)) = \beta(\tilde{x} + \varphi(\tilde{x})) = \tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) = q_3(\tilde{x})$$

et par suite $\tilde{x} = \alpha(x) \in \mathrm{Im}\alpha$.
On a bien pour $j = q + 1$

$$IH^{q+1}_{\bar{p}}(X) \cong \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$$

<u>Cas 4 :</u> $j = q + 2$
D'après le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{q+1}(\tilde{X}) \oplus Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \arrow[r, "p_1"] & H^{q+1}(L) \arrow[r, "p_2"] & IH^{q+2}_{\bar{p}}(X) \arrow[r, "p_3"] & H^{q+2}(\tilde{X}) \arrow[r, "p_4"] & H^{q+2}(L) \\
H^{q+1}(\tilde{X}) \arrow[u] \arrow[r, "q_1"] & H^{q+1}(L) \arrow[u, "\|"] \arrow[r, "\delta"] & H^{q+2}(X) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "q_3"] & H^{q+2}(\tilde{X}) \arrow[u, "\|"] \arrow[r, "q_4"] & H^{q+2}(L) \arrow[u, "\|"]
\end{tikzcd}$$

[1]**Lemme des quatre :** soient α_1 ,α_2, α_3, α_4, α_5 des morphismes de suites exactes de groupes abeliens

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"'] & A_5 \arrow[d, "\alpha_5"'] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Si α_2, α_4 sont injectives et α_1 est surjective alors α_3 est injective.
Si α_2, α_4 sont surjectives et α_5 est injective alors α_3 est surjective.

α est surjective et par suite le lemme des quatre implique

$$IH_{\bar{p}}^{q+2}(X) \cong H^{q+2}(X)/\ker\alpha.$$

Démontrons que $\ker\alpha = \delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$
Soit $x \in ker\alpha$. On a $q_3(x) = p_3(\alpha(x)) = 0$ et $x \in \ker q_3 = \mathrm{Im}\delta$
donc il existe $y \in H^{q+1}(L)$ tel que $x = \delta(y)$.
Ce qui donne $p_2(y) = \alpha(\delta(y)) = \alpha(x) = 0$ et $y \in \ker p_2 = imp_1$.
c'est-à-dire il existe $z = z_1 + z_2 \in H^{q+1}(\tilde{X}) \oplus Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$ tel que $y = p_1(z)$
et par suite $x = \delta \circ p_1(z) = \delta \circ p_1(z_1 + z_2) = \delta \circ p_1(z_1) + \delta \circ p_1(z_2)$
Or $\delta \circ p_1(z_1) = \delta \circ q_1(z_1) = 0$ donc $x = \delta \circ p_1(z_2) \in \delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$,
d'où la première inclusion.
Démontons maintenant l'autre inclusion
Considérons $x \in \delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$.Soit $y \in Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$ tel que $x = \delta(y)$.
On a $\alpha(x) = \alpha(\delta(y)) = p_2(y)$ avec $y \in Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \subseteq imp_1 = \ker p_2$
Ce qui donne $\alpha(x) = 0$ et par suite $\delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z})) \subseteq \ker\alpha$,
d'où l'égalité.
Et alors pour $j = q + 2$

$$IH_{\bar{p}}^{q+2}(X) \cong H^{q+2}(X)/\delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z})).$$

Chapitre IV

Une dualité de Poincaré en homologie d'intersection

IV.1 Autre complexe d'intersection et dualité

Dans cette section on introduit pour les pseudo-variétés à singularités isolées un nouveau complexe JC_*. Ce complexe est quasi-isomorphe au complexe d'intersection IC_* de Goresky-MacPherson, mais de plus il vérifie une dualité de Poincaré entière.
On définit plus généralement ce complexe pour une paire d'espaces parce que nous utiliserons plus loin cette généralisation.
Considérons une paire d'espaces (Y, A) et un entier positif q. Soit $\tau_{\geq q} C_*(A)$ le complexe engendré par la troncature en $* \geq q+1$ de $C_*(A)$. On a donc

$$\tau_{\geq q} C_k(A) = \begin{cases} 0 & si \;\; k \leq q-1 \\ B_q(A) & si \;\; k = q \\ C_k(A) & si \;\; k \geq q+1 \end{cases}$$

où $B_q(A)$ est le sous-groupe des q-bords de $C_*(A)$.

Définition IV.1.1. *A toute paire $A \subset Y$ et tout entier positif q on associe le complexe suivant*

$$C_k(Y)/\tau_{\geq q} C_k(A) = \begin{cases} C_k(Y) & si \;\; k \leq q-1 \\ C_q(Y)/B_q(A) & si \;\; k = q \\ C_k(Y)/C_k(A) = C_k(Y, A) & si \;\; k \geq q+1 \end{cases}$$

Lorsque (Y, A) est une paire de CW-complexes, Y étant de dimension finie N, on introduit p tel que $p + q = N - 2$ et nous utilisons la notation plus en rapport avec la théorie d'intersection

$$JC_*^p(Y, A) = C_*(Y)/\tau_{\geq q} C_*(A)$$

Dans les deux propositions suivantes nous allons comparer le complexe JC_* avec le complexe de Goresky-MacPherson dans le cadre des singularités isolées.

Proposition IV.1.1. *Si $(\tilde{X}, L)$ est une variété à bord de dimension N alors $X := \tilde{X}/L$ est une pseudo-variété à singularité conique isolée $x = L/L$. Pour toute perversité $\bar{p} = (0, ..., p_N)$ on définit un mophisme de complexes du complexe d'intersection de Goresky-MacPherson $IC_*^{\bar{p}}(\tilde{X}/L)$ vers le complexe $JC_*^p(\tilde{X}, L)$*

$$f_k : IC_k^{\bar{p}}(X) \to JC_k^p(\tilde{X}, L)$$

où $p = p_N$.

Preuve:
On définit ce morphisme en chaque degré. Il y a cinq cas différents.

– Pour $k \leq q-1$ l'inclusion $X - \{x\} \subset \tilde{X}$ induit le morphisme

$$f_k : IC_k^{\bar{p}}(X) = C_k(X - \{x\}) \longrightarrow C_k(\tilde{X}) = JC_k^p(\tilde{X}, L).$$

- Pour $k = q$ on compose le morphisme précédent avec la projection sur le quotient,

$$f_q : IC_q^{\bar{p}}(X) = C_q(X - \{x\}) \to C_q(\tilde{X}) \to C_q(\tilde{X})/B_q(L) = JC_q^p(\tilde{X}, L).$$

- Pour $k = q + 1$ on procède de même,

$$f_{q+1} : IC_{q+1}^{\bar{p}}(X) = C_{q+1}(X - \{x\}) \to C_{q+1}(\tilde{X}) \to C_{q+1}(\tilde{X})/C_{q+1}(L) = JC_{q+1}^p(\tilde{X}, L).$$

- Pour $k \geq q+2$, l'application $\varphi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}/L = X$ induit le morphisme de complexes

$$\varphi_* : C_k(\tilde{X}) \to C_k(X) \to C_k(X)/C_k(\{x\}).$$

  Ce morphisme est surjectif et $\ker \varphi = C_k(L)$. Il en résulte un isomorphisme

$$C_k(\tilde{X})/C_k(L) \cong C_k(X)/C_k(\{x\}).$$

  Or

$$IC_{q+2}^{\bar{p}}(X) = \{c \in C_{q+2}(X)/\partial c \in C_{q+2}(X - \{x\})\} \subseteq C_{q+2}(X)$$

  ce qui nous permet de définir les morphismes

$$f_{q+2} : IC_{q+2}^{\bar{p}}(X) \to C_{q+2}(\tilde{X})/C_{q+2}(L) = JC_{q+2}^p(\tilde{X}, L)$$

  et

$$f_k : IC_k^{\bar{p}}(X) = C_k(X) \to C_k(X)/C_k(\{x\}) \to C_k(\tilde{X})/C_k(L) = JC_k^p(\tilde{X}, L)$$

  pour $k > q + 2$

Le morphisme ainsi construit commute avec l'opérateur bord.

Théorème IV.1.1. *Si $X = \tilde{X}/L$ est une pseudo-variété de dimension N avec une singularité conique isolée $\{x\} = L/L$ alors pour toute perversité $\bar{p} = (0, ..., p_N)$ le morphisme précédent induit un isomorphisme*

$$JH_*^p(\tilde{X}, L) \cong IH_*^{\bar{p}}(X)$$

c'est-à-dire que le complexe $JC_*^p(\tilde{X}, L)$ et le complexe d'intersection de Goresky-MacPherson $IC_*^{\bar{p}}(\tilde{X}/L)$ sont quasi-isomorphes.

La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant :

Lemme IV.1.1. *L'homologie du complexe $C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)$ est donné par :*

$$H_j(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) = \begin{cases} H_j(Y) & si \quad j \leq q \\ \mathrm{Im}(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(Y, A)) & si \quad j = q + 1 \\ H_j(Y, A) & si \quad j > q + 1 \end{cases}$$

Preuve du lemme :
L'inclusion $\tau_{\geq q}C_*(A) \subset C_*(A)$ est un morphisme de complexes et

$$H_k(\tau_{\geq q}C_*(A)) = \begin{cases} 0 & si \ \ k \leq q \\ H_k(A) & si \ \ k \geq q+1 \end{cases}$$

On a un diagramme de suites exactes courtes de complexes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tau_{\geq q}C_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] & C_*(Y) \arrow[r] & C_*(Y)/C_*(A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La première ligne induit la longue suite exacte

$$\begin{aligned} \cdots \quad & \to H_{q+2}(\tau_{\geq q}C_*(A)) \to H_{q+2}(C_*(Y)) \to H_{q+2}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to H_{q+1}(\tau_{\geq q}C_*(A)) \\ & \to H_{q+1}(C_*(Y)) \to H_{q+1}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to H_q(\tau_{\geq q}C_*(A)) \to H_q(C_*(Y)) \\ & \to H_q(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to \cdots \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \cdots \to H_{q+2}(A) \quad & \to H_{q+2}(Y) \to H_{q+2}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to H_{q+1}(A) \to H_{q+1}(Y) \\ & \to H_{q+1}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to 0 \to H_q(Y) \to H_q(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to \cdots \end{aligned}$$

Alors

- pour $k \geq q+2$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H_k(A) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_k(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_k(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H_{k-1}(Y) \arrow[d, "\|"'] \\ H_k(A) \arrow[r] & H_k(Y) \arrow[r] & H_k(Y,A) \arrow[r] & H_{k-1}(A) \arrow[r] & H_{k-1}(Y) \end{tikzcd}$$

  D'après le lemme des cinq on a :

$$H_k(Y,A) \cong H_k(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \ \ pour \ k \geq q+2$$

- pour $k \leq q$ la suite exacte devient

$$0 \to H_k(Y) \to H_k(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \to 0 \to H_{k-1}(Y)$$

  et

$$H_k(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \cong H_k(Y) \ \ \text{pour } k \leq q$$

– pour $k = q+1$ on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H_{q+2}(Y,A) \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"'] & H_{q+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"'] & H_{q+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"'] & H_{q+1}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H_{q+2}(Y,A) \arrow[r] & H_{q+1}(A) \arrow[r] & H_{q+1}(Y) \arrow[r] & H_{q+1}(Y,A) \arrow[r] & H_{q+1}(A)
\end{tikzcd}$$

D'après la première suite exacte du diagramme

$$\begin{aligned}
H_{q+1}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) &\cong H_{q+1}(Y)/\ker(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(C_*/T_*)) \\
&\cong H_{q+1}(Y)/\mathrm{Im}(H_{q+1}(A) \to H_{q+1}(Y))
\end{aligned}$$

la seconde suite exacte nous donne

$$\begin{aligned}
H_{q+1}(Y)/\mathrm{Im}(H_{q+1}(A) \to H_{q+1}(Y)) &\cong H_{q+1}(Y)/\ker(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(Y,A)) \\
&\cong \mathrm{Im}(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(Y,A))
\end{aligned}$$

Par suite on aura

$$H_{q+1}(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)) \cong \mathrm{Im}(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(Y,A))$$

Preuve de la proposition :
D'après le chapitre III on sait que

$$IH_j^{\bar{p}}(X) = \begin{cases} H_j(X - \{x\}) \;\; pour \;\; j \leq q \\ Im(H_j(X-\{x\}) \mapsto H_j(X)) \;\; pour \;\; j = q+1 \\ H_j(X) \;\; pour \;\; j \geq q+2. \end{cases}$$

Or

$$H_*(\tilde{X}) \cong H_*(X - \{x\})$$

Alors

$$IH_j^{\bar{p}}(X) \cong JH_j^{p}(\tilde{X}, L) = \begin{cases} H_j(\tilde{X}) \;\; pour \;\; j \leq q \\ Im(H_j(\tilde{X}) \mapsto H_j(\tilde{X}, L)) \;\; pour \;\; j = q+1 \\ H_j(\tilde{X}, L) \;\; pour \;\; j \geq q+2. \end{cases}$$

Proposition IV.1.2. *Pour toute paire (Y,A) et tout entier positif q la cohomologie du complexe dual de $C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)$ est donnée par :*

$$H^j(Hom(C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A), \mathbb{Z})) = \begin{cases} H^j(Y) & si \;\; j \leq q \\ \mathrm{Im}(H^{q+1}(Y,A) \to H^{q+1}(Y)) & si \;\; j = q+1 \\ H^j(Y,A) & si \;\; j \geq q+2. \end{cases}$$

Preuve :
Le complexe dual de $C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A)$ est donné par

$$K_q^k(Y,A) = Hom(C_k(Y)/\tau_{\geq q}C_k(A),\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{cc} C^k(Y) & si \quad k \leq q-1 \\ Hom(C_q(Y)/B_q(A),\mathbb{Z}) & si \quad k = q \\ C^k(Y,A) & si \quad k \geq q+1 \end{array} \right.$$

Ce complexe s'injecte dans le complexe suivant

$$L_q^k(Y,A) = \left\{ \begin{array}{cc} C^k(Y) & si \quad k \leq q \\ C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y) & si \quad k = q+1 \\ C^k(Y,A) & si \quad k \geq q+2 \end{array} \right.$$

où $\delta : C^q(Y) \to C^{q+1}(Y)$ est l'opérateur cobord.
Et on aura le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C^{q-2}(Y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\|"'] & C^{q-1}(Y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\|"'] & Hom(\frac{C_q(Y)}{B_q(A)},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi"'] & C^{q+1}(Y,A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"'] & C^{q+2}(Y,A) \arrow[d, "\|"'] \\ C^{q-2}(Y) \arrow[r, "\delta"] & C^{q-1}(Y) \arrow[r, "\delta"] & C^q(Y) \arrow[r, "\delta"] & C^{q+1}(Y,A)+\delta C^q(Y) \arrow[r, "\delta"] & C^{q+2}(Y,A) \end{tikzcd} \tag{2}$$

Démontrons maintenant que les deux complexes $K_q^k(Y,A)$ et $L_q^k(Y,A)$ sont quasi-isomorphes :

– pour $k \leq q-2$ et $k \geq q+3$ il est évident que les groupes de cohomologie sont les mêmes
$$H^k(K_q^*(Y,A)) \cong H^k(L_q^*(Y,A))$$

– pour $k = q-1$ on a
$$H^{q-1}(K_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(\delta : C^{q-1}(Y) \to Hom(C_q(Y)/B_q(A),\mathbb{Z}))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q-2}(Y) \to C^{q-1}(Y))}$$
d'après le diagramme commutatif on a $\delta = \varphi \circ \delta$ et φ injective alors
$$\ker(\delta : C^{q-1}(Y) \to Hom(C_q(Y)/B_q(A),\mathbb{Z})) = \ker(C^{q-1}(Y) \to C^q(Y))$$
ce qui donne bien
$$H^{q-1}(K_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(C^{q-1}(Y) \to C^q(Y))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q-2}(Y) \to C^{q-1}(Y))} \cong H^{q-1}(L_q^*(Y,A))$$

- pour $k = q$ on a
$$H^q(K_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(\delta : Hom(C_q(Y)/B_q(A),\mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(Y) \to Hom(C_q(Y)/B_q(A),\mathbb{Z}))}$$

et
$$H^q(L_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(\delta : C^q(Y) \to C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(Y) \to C^q(Y))}$$

Montrons que

$$\begin{aligned}\ker(\delta : C^q(Y) \to \ & C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y)) = \\ & \varphi(\ker(\delta : Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A))).\end{aligned}$$

Soit $c \in \ker(\delta : C^q(Y) \to C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y))$ alors $c \circ d = 0$ (où $d : C_{q+1}(Y) \to C_q(Y)$ est l'opérateur bord) donc c est nul sur $B_q(Y) \supset B_q(A)$ donc il existe $c' \in Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z})$ tel que $\varphi(c') = c$
Or d'après le diagramme commutatif (2)

$$\delta c' = \delta \circ \varphi(c') = \delta c = 0$$

d'où
$$c' \in \ker(\delta : Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A))$$
et par suite

$$\begin{aligned}\ker(\delta : C^q(Y) \to \ & C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y)) \subseteq \\ & \varphi(\ker(\delta : Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A))).\end{aligned}$$

L'autre inclusion vient du fait que $\delta \circ \varphi = \delta$, d'où l'égalité.
D'autre part, d'après le diagramme commutatif (2), on a $\varphi \circ \delta = \delta$, on en déduit que

$$\varphi(\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(Y) \to Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}))) = \mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(Y) \to C^q(Y))$$

Donc

$$H^q(K_q^*(Y,A)) \cong H^q(L_q^*(Y,A))$$

- pour $k = q+1$

$$\begin{aligned}H^{q+1}(L_q^*(Y,A)) \ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y) \to C^{q+2}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^q(Y) \to C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y))} \\ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A)) + \delta C^q(Y))}{\delta C^q(Y)} \\ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))}{\delta C^q(Y) \cap \ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))} \\ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))}{\delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A)}\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que

$$\delta C^q(Y) \cap \ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A)) \subseteq \delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A)$$

et pour $x \in \delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A)$ on a $x = \delta(x_1)$ avec $x_1 \in C^q(Y)$ et $x \in C^{q+1}(Y,A)$ alors $\delta x = \delta \circ \delta x_1 = 0$ et par suite $x \in \ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))$ d'où l'autre inclusion.

Démontrons que

$$\delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A) = \mathrm{Im}(\delta : Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A)))$$

Soit $\delta c \in \delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A)$ alors $\delta c = c \circ d \in C^{q+1}(Y,A)$ donc $c \circ d$ nul sur $C_{q+1}(A)$ et c nul sur $B_q(A)$ d'où $c \in Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z})$ et $\delta c \in \mathrm{Im}(\delta : Hom(C^q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A))$.

Par suite on a

$$\delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A) \subseteq \mathrm{Im}(\delta : Hom(C_q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A)))$$

L'autre inclusion est évidente, d'où l'égalité.

On a bien démontré que

$$\begin{aligned} H^{q+1}(L_q^*(Y,A)) &= \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))}{\delta C^q(Y) \cap C^{q+1}(Y,A)} \\ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : Hom(C^q(Y)/B_q(A), \mathbb{Z}) \to C^{q+1}(Y,A)))} \\ &\cong H^{q+1}(K_q^*(Y,A)) \end{aligned}$$

– Pour $k = q+2$

$$\begin{aligned} H^{q+2}(K_q^*(Y,A)) &= \frac{\ker(\delta : C^{q+2}(Y,A) \to C^{q+3}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))} \\ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+2}(Y,A) \to C^{q+3}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y) \to C^{q+2}(Y,A))} \\ &\cong H^{q+2}(L_q^*(Y,A)) \end{aligned}$$

Les deux complexes $L_q^*(Y,A)$ et $K_q^*(Y,A)$ sont donc quasi-isomorphes il suffit de calculer la cohomologie du complexe $L_q^*(Y,A)$ pour démontrer la proposition IV.1.2 .

– pour $k \leq q-1$ on a

$$H^k(L_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(\delta : C^k(Y) \to C^{k+1}(Y))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{k-1}(Y) \to C^k(Y))} \cong H^k(Y)$$

– pour $k = q$ on a

$$\begin{aligned} H^q(L_q^*(Y,A)) &= \frac{\ker(\delta : C^q(Y) \to C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(Y) \to C^q(Y))} \\ &= \frac{\ker(C^q(Y) \to C^{q+1}(Y))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(Y) \to C^q(Y))} \\ &\cong H^q(Y) \end{aligned}$$

– pour $k = q+1$ on a

$$H^{q+1}(L_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y) \to C^{q+2}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^q(Y) \to C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y))}$$

Or

$$\begin{gathered} z = z_1 + \delta z_2 \in \ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y) \to C^{q+2}(Y,A)) \\ \Rightarrow \delta(z_1 + \delta z_2) = 0 \\ \Rightarrow \delta z_1 = 0 \\ \Rightarrow z_1 \in \ker(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A)) \end{gathered}$$

Donc z est un cycle de Y nul sur A modulo un bord de Y et par suite

$$H^{q+1}(L^*(Y,A)) = \mathrm{Im}(H^{q+1}(Y,A) \to H^{q+1}(Y))$$

– pour $k = q+2$ on a

$$\begin{aligned} H^{q+2}(L_q^*(Y,A)) &= \frac{\ker(\delta : C^{q+2}(Y,A) \to C^{q+3}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q+1}(Y,A) + \delta C^q(Y) \to C^{q+2}(Y,A))} \\ &= \frac{\ker(\delta : C^{q+2}(Y,A) \to C^{q+3}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{q+1}(Y,A) \to C^{q+2}(Y,A))} \\ &\cong H^{q+2}(Y,A) \end{aligned}$$

– pour $k \geq q+3$ on a

$$H^k(L_q^*(Y,A)) = \frac{\ker(\delta : C^k(Y,A) \to C^{k+1}(Y,A))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{k-1}(Y,A) \to C^k(Y,A))} \cong H^k(Y,A)$$

Ce qui termine la preuve de la proposition IV.1.2.

Le résultat principal de cette section est :

Théorème IV.1.2. *Pour toute variété $\tilde{X}$ de bord L et de dimension N et tout entier positif q le morphisme :*

$$\begin{array}{ccc} JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) & \to & JH_j^p(\tilde{X}, L) \cong IH_j^{\bar{p}}(X) \\ x & \to & x \cap [\tilde{X}, L] \end{array}$$

est un isomorphisme appelé isomorphisme de dualité de Poincaré-Lefschetz.

La J-cohomologie est donc Poincaré duale à coefficients entiers de l'homologie d'intersection.

Preuve :
On a trois cas à considérer

- Pour $j \leq q$ on a $N - j \geq N - q = p + 2$.
  Alors
  $$JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) = H^{N-j}(\tilde{X}, L)$$
  et
  $$JH_j^p(\tilde{X}, L) = H_j(\tilde{X}),$$
  d'où
  $$\begin{array}{ccc} H^{N-j}(\tilde{X}, L) & \to & H_j(\tilde{X}) \\ x & \to & x \cap [\tilde{X}, L] \end{array}$$
  est la dualité de Poincaré-Lefschetz et c'est un isomorphisme.
- Pour $j \geqslant q + 2$ on a $N - j \leq N - q - 2 = p$.
  Alors
  $$JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) = H^{N-j}(\tilde{X})$$
  et
  $$JH_j^p(\tilde{X}, L) = H_j(\tilde{X}, L),$$
  d'où
  $$\begin{array}{ccc} H^{N-j}(\tilde{X}) & \to & H_j(\tilde{X}, L) \\ x & \to & x \cap [\tilde{X}, L] \end{array}$$
  est la dualité de Poincaré et c'est un isomorphisme.
- Pour $j = q + 1$ on a $N - j = N - q - 1 = p + 1$.
  Alors
  $$JH_j^p(\tilde{X}, L) = \mathrm{Im}(H_j(\tilde{X}) \longrightarrow H_j(\tilde{X}, L))$$
  et
  $$JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) = \mathrm{Im}(H^{N-j}(\tilde{X}, L) \longrightarrow H^{N-j}(\tilde{X})).$$

  Or $\mathrm{Im}(H^{N-j}(\tilde{X}, L) \longrightarrow H^{N-j}(\tilde{X})) \to \mathrm{Im}(H_j(\tilde{X}) \longrightarrow H_j(\tilde{X}, L))$

est un isomorphisme et c'est la restriction de $H^{N-j}(\tilde{X}) \longrightarrow H_j(\tilde{X}, L)$ sur $\mathrm{Im}(H^{N-j}(\tilde{X}, L) \longrightarrow H^{N-j}(\tilde{X}))$ d'après la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H^{N-j-1}(L) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\cong"'] & H^{N-j}(\tilde{X}, L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{N-j}(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{N-j}(L) \arrow[d, "\cong"] \\
H_j(L) \arrow[r, "i"'] & H_j(\tilde{X}) \arrow[r] & H_j(\tilde{X}, L) \arrow[r, "\partial"'] & H_{j-1}(L)
\end{tikzcd}$$

on en déduit le résultat.

IV.2 Relation entre la cohomologie des deux complexes IC et JC

Le complexe d'intersection de Goresky-MacPherson est un complexe libre : $IC_*(X)$ est contenu dans le complexe des chaînes libre $C_*(X)$. Ce complexe n'est pas fonctoriel en toute généralité c'est-à-dire qu'une application quelconque $f : (X, x) \to (Y, y)$ entre variétés singulières à singularités isolées $x \in X$ et $y \in Y$ n'induit pas nécessairement un morphisme de complexes $IC_*(X) \to IC_*(Y)$.
De plus il ne vérifie pas la dualité de Poincaré entière, plus précisement le morphisme de Poincaré n'est pas toujours défini.
En effet :
Prendre par exemple $j = q + 1$ c'est-à-dire $N - j = N - q - 1 = p + 1$ et considérons le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
H^{p+1}(\tilde{X}, L) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[\tilde{X}, L]"'] & H^{p+1}(\tilde{X}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cap[\tilde{X}, L]"'] & H^{p+1}(L) \arrow[d, "\cap[L]"'] \\
H_{q+1}(\tilde{X}) \arrow[r] & H_{q+1}(\tilde{X}, L) \arrow[r, "\partial"'] & H_q(L)
\end{tikzcd}$$

On a $Ext(H_p(L), \mathbb{Z}) \subset H^{p+1}(L)$ notons alors par B l'image du $Ext(H_p(L), \mathbb{Z})$ par le cap-produit avec la classe fondamentale $[L]$.
D'après le diagramme commutatif on a

$$\cap[\tilde{X}, L] : \varphi^{-1}(Ext(H_p(L), \mathbb{Z})) = IH^{p+1}_{\bar{q}}(X) \to \partial^{-1}(B) \supset ker\partial = IH^{\bar{p}}_{q+1}(X)$$

en particulier si $\partial^{-1}(B) \neq ker\partial$ ce morphisme n'est pas nécessairement défini sur $IH^{\bar{p}}_{q+1}(X)$.
Dans la section précédente on a rempli ces deux conditions en contruisant le complexe $JC_*(\widetilde{X}, L)$ quasi-isomorphe au complexe d'intersection $IC_*(X)$. Ce complexe vérifie la dualité de Poincaré cherchée d'après le théorème IV.1.2. Il est fonctoriel c'est-à-dire que toute application $f : (Y, A) \to (Z, B)$ entre paires d'espaces induit un morphisme de

complexes $f_* : C_*(Y)/\tau_{\geq q}C_*(A) \to C_*(Z)/\tau_{\geq q}C_*(B)$ (le complexe de chaînes C_* est fonctoriel et le complexe tronqué l'est aussi d'où le complexe quotient est fonctoriel) et donc en particulier c'est vrai pour les pseudo-variétés. Mais ce complexe n'est pas libre.

Comparons maintenant la cohomologie de ces deux complexes. D'après la Proposition IV.1.1 on a un morphisme de complexes

$$f_k : IC_k^{\bar{p}}(\tilde{X}/L) \to JC_k^p(\tilde{X}, L)$$

par suite on a un morphisme entre les complexes duaux sur $\mathbb{Z}$

$$f^k : JC_p^k(\tilde{X}, L) \to IC_{\bar{p}}^k(\tilde{X}/L).$$

Ce morphisme entre dans la suite exacte suivante :

Proposition IV.2.1. *Soit $X := \tilde{X}/L$ une pseudo-variété de dimension N à singularité conique isolée $\{x\} = L/L$. Pour toute perversité $\bar{p} = (0, ..., p_N = p)$ on a la suite exacte suivante :*

$$0 \to JH_p^{q+1}(\tilde{X}, L) \xrightarrow{f^{q+1}} IH_{\bar{p}}^{q+1}(X) \xrightarrow{\varphi} Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} JH_p^{q+2}(\tilde{X}, L) \xrightarrow{f^{q+2}} IH_{\bar{p}}^{q+2}(X) \to 0$$

où $Ext(H_q(L), \mathbb{Z}) \subset H^{q+1}(L)$, $\varphi : H^{q+1}(\tilde{X}) \to H^{q+1}(L)$, $\delta : H^{q+1}(L) \to H^{q+2}(X)$ et on note $q = N - p - 2$.
En particulier le morphisme f est une équivalence en cohomologie lorsque $H_*(L)$ est sans torsion.

Preuve:
Dans la suite de la proposition IV.2.1 on a
$JH_p^{q+1}(\tilde{X}, L) = \mathrm{Im}(H^{q+1}(\tilde{X}, L) \to H^{q+1}(\tilde{X})) = \varphi^{-1}(0)$
$IH_{\bar{p}}^{q+1}(X) = \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$
$JH_p^{q+2}(\tilde{X}, L) = H^{q+2}(X)$
$IH_{\bar{p}}^{q+2}(X) = H^{q+2}(X)/\delta(ExtH_q(L), \mathbb{Z})$
montrons que la suite

$$0 \longrightarrow \varphi^{-1}(0) \xrightarrow{f^{q+1}} \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z})) \xrightarrow{\quad\varphi\quad} Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\quad\delta\quad} H^{q+2}(X) \xrightarrow{\quad f^{q+2}\quad} H^{q+2}(X)/\delta(ExtH_q(L), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

est exacte.
Comme $\varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$ le morphisme f^{q+1} est injectif et $f^{q+1}(\varphi^{-1}(0)) = \varphi^{-1}(0) = Ker\varphi \cap \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$ d'où l'exactitude en (f^{q+1}, φ).

Le morphisme f^{q+2} est surjectif et $Ker f^{q+2} = \delta(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$.
Il reste à montrer la relation

$$\varphi(\varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))) = Ker\delta \cap Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$$

On a $\varphi(\varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))) \subseteq Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$ et $\varphi(\varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))) \subseteq \varphi(H^{q+1}(\tilde{X})) = Im\varphi = Ker\delta$ d'après la suite exacte en cohomologie de la paire $(\tilde{X}, L)$. Par suite on a l'inclusion

$$\varphi(\varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))) \subseteq Ker\delta \cap Ext(H_q(L), \mathbb{Z}).$$

Passons maintenant à l'inclusion dans l'autre sens. Soit $x \in Ker\delta \cap Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$ alors $x \in Ker\delta = Im\varphi$ et $x \in Ext(H_q(L), \mathbb{Z})$. Donc il existe $y \in H^{q+1}(\tilde{X})$ tel $x = \varphi(y)$ c'est-à-dire $y \in \varphi^{-1}(x) \subseteq \varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z}))$ et $x = \varphi(y) \in \varphi(\varphi^{-1}(Ext(H_q(L), \mathbb{Z})))$.
On a bien égalité.

IV.3 Exemple

D'après [7], il existe une variété Y compacte orientable de dimension 4, de bord un espace lenticulaire L dont l'homologie admet de la r-torsion. Pour toute les perversités $\bar{p} = (0, .., p_4 = p)$ de Goresky-MacPherson nous allons déterminer l'homologie d'intersection $IH_*^{\bar{p}}(Y/L)$, la cohomologie d'intersection $IH^*_{\bar{p}}(Y/L)$, et $JH^*_p(Y, L)$. Nous montrerons que bien que toutes ces cohomologies soient formellement isomorphes elles ne le sont pas canoniquement et seules la seconde est Poincaré-duale de l'homologie d'intersection.

Rappelons que les espaces lenticulaires sont des variétés compactes $L = L(r, s)$ de dimension 3 orientables, quotient de S^3 par une action $\mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. L'homologie et la cohomologie entière de L sont données par

$$\begin{array}{llll} H_0(L) = \mathbb{Z} & H_1(L) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} & H_2(L) = 0 & H_3(L) = \mathbb{Z} \\ H^0(L) = \mathbb{Z} & H^1(L) = 0 & H^2(L) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} & H^3(L) = \mathbb{Z} \end{array}$$

Pour simplifier nous prendrons en particulier l'espace lenticulaire $L = L(2, 1)$ qui est l'espace projectif $\mathbb{R}P_3$ de dimension 3 dont l'homologie est

$$H_0(L) = \mathbb{Z}\ ;\ H_1(L) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ;\ H_2(L) = 0\ ;\ H_3(L) = \mathbb{Z}$$

On sait également [25],[7] que l'homologie de l'espace Y est

$$H_0(Y) = \mathbb{Z}\ ;\ H_1(Y) = 0\ ;\ H_2(Y) = \mathbb{Z}\ ;\ H_3(Y) = 0 = H_4(Y).$$

Cette homologie étant libre, $H^*(Y) = Hom(H_*(Y), \mathbb{Z})$ et donc

$$H^0(Y) = \mathbb{Z}\ ;\ H^1(Y) = 0\ ;\ H^2(Y) = \mathbb{Z}\ ;\ H^3(Y) = 0 = H^4(Y).$$

Par dualité de Poincaré-Lefschetz, on déduit

$$H_0(Y,L)=0\ ;\ H_1(Y,L)=0\ ;\ H_2(Y,L)=\mathbb{Z}\ ;\ H_3(Y,L)=0\ ;\ H_4(Y,L)=\mathbb{Z}$$

$$H^0(Y,L)=0\ ;\ H^1(Y,L)=0\ ;\ H^2(Y,L)=\mathbb{Z}\ ;\ H^3(Y,L)=0\ ;\ H^4(Y,L)=\mathbb{Z}$$

La suite exacte relative en homologie de la paire (Y,L) donne

$$0\to H_2(Y)=\mathbb{Z}\overset{\times 2}{\to} H_2(Y,L)=\mathbb{Z}\to H_1(L)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0$$

La suite exacte relative en cohomologie quant à elle donne

$$0\to H^2(Y,L)=\mathbb{Z}\overset{\times 2}{\to} H^2(Y)=\mathbb{Z}\to H^2(L)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0$$

Y/L est une variété singulière avec un seul point singulier isolé. Les valeurs possibles de la perversité $\bar{p}$ de Goresky-MacPherson sont $\bar{p}=\bar{0},\bar{1},\bar{2}$ c'est-à-dire nulle, moyenne, totale.

Proposition IV.3.1. *1. L'homologies d'intersection $IH_*^{\bar{p}}(Y/L)$ en fonction de la perversité est donnée par :*

	$IH_0^{\bar{p}}(Y/L)$	$IH_1^{\bar{p}}(Y/L)$	$IH_2^{\bar{p}}(Y/L)$	$IH_3^{\bar{p}}(Y/L)$	$IH_4^{\bar{p}}(Y/L)$
$\bar{p}=\bar{0}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\bar{p}=\bar{1}$	$\mathbb{Z}$	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\bar{p}=\bar{2}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Dans la troisième ligne $2\mathbb{Z}$ est l'image de $H_2(Y)=\mathbb{Z}$ dans $H_2(Y,L)=\mathbb{Z}$.

2. La J-cohomologie $JH_p^j(Y,L)$, que l'on notera $JH_{\bar{p}}^j(Y,L)$ dans cet exemple pour éviter toute ambiguité, est donnée par

	$JH_{\bar{p}}^0(Y,L)$	$JH_{\bar{p}}^1(Y,L)$	$JH_{\bar{p}}^2(Y,L)$	$JH_{\bar{p}}^3(Y,L)$	$JH_{\bar{p}}^4(Y,L)$
$p=0$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$p=1$	$\mathbb{Z}$	0	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$p=2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Dans la troisième ligne $2\mathbb{Z}$ est l'image de $H^2(Y,L)=\mathbb{Z}$ dans $H_2(Y)=\mathbb{Z}$.

3. La cohomologie d'intersection de Goresky-MacPherson $IH_{\bar{p}}^*(Y/L)$ est donnée par :

	$IH_{\bar{p}}^0(Y/L)$	$IH_{\bar{p}}^1(Y/L)$	$IH_{\bar{p}}^2(Y/L)$	$IH_{\bar{p}}^3(Y/L)$	$IH_{\bar{p}}^4(Y/L)$
$\bar{p}=\bar{0}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\bar{p}=\bar{1}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\bar{p}=\bar{2}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Preuve:
Posons $\bar{q}$ la perversité complémentaire et $q = q_4 = 2 - p_4$.
1. résulte de la formule

$$IH_j^{\bar{p}}(Y/L) = \begin{cases} H_j(Y) & si \quad j \leq q \\ Im(H_{q+1}(Y) \to H_{q+1}(Y, L)) & si \quad j = q+1 \\ H_j(Y, L) & si \quad j \geq q+2 \end{cases}$$

2. se déduit de 1 par la dualité de Poincaré-Lefschetz $JH_{\bar{p}}^j(Y, L) \stackrel{\cap[Y,L]}{\to} IH_{4-j}^{\bar{q}}(Y/L)$.
On peut aussi montrer 2 à partir de la formule

$$JH_{\bar{p}}^j(Y, L) = \begin{cases} H^j(Y) & si \quad j \leq q \\ Im(H^{q+1}(Y, L) \to H^{q+1}(Y)) & si \quad j = q+1 \\ H^j(Y, L) & si \quad j \geq q+2 \end{cases}$$

3. D'après 1, $IH_{j-1}^{\bar{p}}(Y/L)$ est libre donc la suite exacte des coefficients universels

$$0 \to Ext(IH_{j-1}^{\bar{p}}(Y/L), \mathbb{Z}) \to IH_{\bar{p}}^j(Y/L) \to Hom(IH_j^{\bar{p}}(Y/L) \to 0$$

se réduit à l'isomorphisme $IH_{\bar{p}}^j(Y/L) \cong Hom(IH_j^{\bar{p}}(Y/L), \mathbb{Z})$ ce qui achève de montrer la proposition.

Poursuivons en montrant que bien que les cohomologies $JH_{\bar{1}}^j(Y, L)$ et $IH_{\bar{1}}^j(Y/L)$ soient formellement isomorphes seule la J-cohomologie est Poincaré duale de l'homologie d'intersection $IH_{4-j}^{\bar{1}}(Y/L)$. En effet plaçons nous en degré $j = 2$ et pour la perversité $\bar{1}$ qui est aussi la perversité complémentaire.

Commençons par identifier les groupes d'intersections avec des sous-groupes de $H_2(Y, L)$ pour l'homologie et de $H^2(Y)$ pour la cohomologie

- $IH_2^{\bar{1}}(Y/L) = \ker(H_2(Y, L) \stackrel{\partial}{\to} H_1(L) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2H_2(Y, L) \subset H_2(Y, L)$ $(2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z})$
- $JH_{\bar{1}}^2(Y, L) = \ker(H^2(Y) \stackrel{\varphi}{\to} H^2(L) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2H^2(Y) \subset H^2(Y)$ $(2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z})$
- $IH_{\bar{1}}^2(Y/L) = \mathrm{Hom}(IH_2^{\bar{1}}(Y/L), \mathbb{Z}) \stackrel{(\bullet)}{=} \mathrm{Hom}(H_2(Y), \mathbb{Z}) = H^2(Y)$. L'égalité $(\bullet)$ vient de ce que par le morphisme naturel $H_2(Y) = \mathbb{Z} \stackrel{\times 2}{\to} H_2(Y, L) = \mathbb{Z}$ l'image de $H_2(Y)$ dans $H_2(Y, L)$ s'identifie avec $IH_2^{\bar{1}}(Y/L)$.

Maintenant considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel $[Y, L]$ désigne la classe fondamentale relative génératrice de $H_4(Y, L)$:

$$\begin{array}{ccc} 2\mathbb{Z} = JH_{\bar{1}}^2(Y, L) & \stackrel{\cap[Y,L]}{\to} & IH_2^{\bar{1}}(Y/L) = 2\mathbb{Z} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{Z} = IH_{\bar{1}}^2(Y/L) = H^2(Y) & \stackrel{\cap[Y,L]}{\to} & H_2(Y, L) = \mathbb{Z} \end{array}$$

La ligne du bas est l'isomorphisme de dualité de Lefschetz. Il induit la dualité de Poincaré entre la J-cohomologie et l'homologie d'intersection (ligne du haut). Par contre, comme la cohomologie de Goresky-MacPherson s'identifie avec la cohomologie de Y, son image par le cap-produit par la classe fondamentale relative $[Y, L]$ n'est pas à valeur dans l'homologie d'intersection.

Pour terminer remarquons que dans ce cas la suite exacte de la Proposition IV.2.1 s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{Z} = JH^2_{\bar{1}}(Y, L) \stackrel{\times 2}{\to} IH^2_{\bar{1}}(Y/L) = \mathbb{Z} \ \to \ & \operatorname{Ext}(H_1(L), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \to JH^3_{\bar{1}}(Y, L) = 0 \to IH^3_{\bar{1}}(X) = 0 \end{aligned}$$

Rappelons que lorsqu'on est à coefficients rationnels l'homologie et la cohomologie d'intersection de Goresky-MacPherson sont duales par Poincaré.

Chapitre V

Homologie d'intersection géométrique

V.1 Variétés à coins et bordisme entre variétés à bord

Rappelons la définition d'une variété à coins. Nous suivons Douady [12].

Un secteur adapté A de dimension n et d'indice k ou un k-secteur adapté de $\mathbb{R}^n$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ définie par les conditions $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_k \geq 0$ pour $k \leq n$.
Soit $j \leq k$ on appelle j-face d'un secteur adapté A de $\mathbb{R}^n$ le sous-ensemble de A défini par les conditions obtenues en remplaçant j des k inégalités qui définissent A par des égalités $x_i = 0$. La dimension d'une j-face de A est $n - j$ et son indice est $k - j$.

Une variété à coins de dimension n est un espace topologique W, localement compact dénombrable à l'infini, muni d'une classe de π_n-atlas.
Rappelons qu'un π_n-atlas est une famille $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i\in I}$ où les V_i forment un recouvrement ouvert de W, et où, pour chaque i, φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert U_i d'un secteur adapté A de $\mathbb{R}^n$ sur V_i et tel que pour tout couple i, j,

$$\gamma_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)}$$

est une application C^∞ d'un ouvert de U_i dans U_j.
Deux π_n-atlas sont équivalents si leur réunion est encore un π_n-atlas.

Soit A un secteur adapté de $\mathbb{R}^n$, défini par les inégalités $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_k \geq 0$. Un sous-secteur adapté $A^{'}$ de A est l'ensemble défini par les conditions obtenues en remplaçant ℓ des k inégalités qui définissent A par des égalités $x_i = 0$, et en ajoutant $p - \ell$ égalités de la forme $x_i = 0$, et j inégalités de la forme $x_i \geq 0$, portant sur de nouvelles coordonnées distinctes. $A^{'}$ est donc un secteur de dimension $n - p$ et d'indice $k - \ell + j$. On dit que p est la codimension de $A^{'}$ dans A, ℓ est le co-indice de $A^{'}$ dans A, et j est l'indice complémentaire.
Les faces relatives de $A^{'}$ dans A sont obtenues en remplaçant dans la définition de $A^{'}$ certaines des j inégalités complémentaires par les égalités correspondantes.
Par abus de langage, $A^{'}$ sera dit sans face relative dans A, si $j = 0$.

Une sous-variété de codimension p et de co-indice ℓ d'une variété à coins W est un sous-espace fermé V de W tel que, pour tout point x de V, il existe une carte $\varphi_i : U_i \to V_i$ de W, où U_i est un ouvert d'un secteur adapté A_i de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\varphi_i(0) = x,$$

et que

$$\varphi_i^{-1}(V_i \cap V) = U_i \cap A_i^{'},$$

où $A_i^{'}$ est un sous-secteur adapté de A_i, de codimension p et de co-indice ℓ.
Une telle carte sera dite adaptée à V.
La sous-variété V est dite sans bord relatif dans W si $A_i^{'}$ est toujours un sous-secteur sans face relative de A_i.

Les variétés à coins vont permettre de définir un bordisme entre variétés à bords.

Définition V.1.1. *Soient $(M_0, \partial M_0)$ et $(M_1, \partial M_1)$ deux variétés à bords lisses de dimension n. Le triplet*

$$((M_0, \partial M_0), (W, W'), (M_1, \partial M_1))$$

est un bordisme à coins si

(i) W est une variété à coins de dimension $n+1$ dont le bord "topologique" bW est la réunion de trois parties M_0, M_1 et W', les coins étant ∂M_0 et ∂M_1 .

(ii) $(\partial M_0, W', \partial M_1)$ est un bordisme [10] [28].

En particulier on dit qu'une variété à bord $(M, \partial M)$ est bordante à $\emptyset$ s'il existe un couple (W, W') tel que :

(i) W est une variété à coins de dimension $n+1$ dont le bord "topologique" bW est la réunion de M et W'.

(ii) ∂M est le bord de W'.

Toutes les variétés considérées sont des variétés à bord lisse sauf mention contraire comme par exemple dans le cas des variétés à coins.

Dans le théorème V.4.1, nous verrons l'importance du bordisme $(\partial M_0, W', \partial M_1)$ ce qui n'est pas supposé dans la définition II.1.3.

La définition V.1.1 signifie qu'on peut trouver un atlas de W comprenant, pour chacune des 4 situations possibles de $x \in W$ suivantes, une carte $\varphi : U \to V$ centrée en x, c'est-à-dire $x \in V$ et $\varphi(0) = x$, vérifiant :

a) Pour $x \in W - bW$, U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Pour $x \in M_k - \partial M_k$, $k = 0, 1$, ou pour $x \in W' - (\partial M_0 \cup \partial M_1)$, alors U est un voisinage de 0 dans un 1-secteur adapté de $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Pour $x \in \partial M_k$, $k = 0, 1$, U est un voisinage de 0 dans un 2-secteur adapté de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit W une variété à coins. On appelle face de W toute sous-variété sans bord relatif V de W, de codimension 1 et de co-indice 1. Par exemple, dans le cas du bordisme, $((M_0, \partial M_0), (W, W'), (M_1, \partial M_1))$ le sous-espace W est une variété à coins ayant pour faces M_0 , M_1 et W'.

On peut recoller deux variétés à coins par identification de faces ([13], théorème 3).

Lemme V.1.1. *Soient W_1 et W_2 deux variétés à bords anguleux, V_1 et V_2 des faces compactes de W_1 et W_2 respectivement, et f un difféomorphisme de V_1 sur V_2. L'espace topologique $(W_1 \cup W_2)/f$, obtenu à partir de W_1 et W_2 en identifiant x à $f(x)$ pour tout x de V_1, est une variété à bord topologique.*

Il existe une structure de variété à coins sur $(W_1 \cup W_2)/f$ de façon que W_1 et W_2 s'identifient à des sous variétés.

Nous pouvons maintenant montrer :

Proposition V.1.1. *La relation bordisme à coins est une relation d'équivalence.*

Preuve:

(i) La reflexivité provient du fait que $((M, \partial M), (W, W'), (M, \partial M))$ où $(W, W') = [0,1] \times (M, \partial M) \cong ([0,1] \times M, [0,1] \times \partial M)$ est un bordisme.
(ii) La relation est symétrique par construction.
(iii) Pour montrer que c'est une relation transitive considérons 2 bordismes ayant la face $(M_1, \partial M_1)$ en communn,

$$((M_0, \partial M_0), (W, W'), (M_1, \partial M_1)) \text{ et } ((M_1, \partial M_1), (Z, Z'), (M_2, \partial M_2)).$$

Considérons $Q = W \cup Z/id_{M_1}$ et $Q^{'} = W' \cup Z'/id_{\partial M_1}$. D'après le lemme V.1.1 $((M_0, \partial M_0), (Q, Q'), (M_2, \partial M_2))$ est un bordisme

On a bien montré que c'est une relation d'équivalence.

V.2 Triplets d'intersection, ou morphismes à poids de variétés à bord, et bordisme

Soit (Y, A) une paire de CW-complexes de dimension finie, $\dim Y = N$ et on fixe un entier positif q.

Un morphisme à poids de variétés à bord, appelé plus simplement un triplet d'intersection de degré j, est un triplet de la forme $((M^n, \partial M), x^j, f)$ avec :

M^n est une variété différentiable à bord différentiable orientable de dimension n

Le poids x^j est un élément de J-cohomologie

$$x^j \in JH_q^{n-j}(M, \partial M) = \begin{cases} H^{n-j}(M, \partial M) & si \;\; j \leqslant q \\ \mathrm{Im}(H^{n-j}(M, \partial M) \longrightarrow H^{n-j}(M)) & si \;\; j = q+1 \\ H^{n-j}(M) & si \;\; j \geqslant q+2. \end{cases}$$

$f : (M, \partial M) \longrightarrow (Y, A)$ est en application continue.

Définition V.2.1. *On dit que 2 triplets $((M_0, \partial M_0), x_0, f_0)$ et $((M_1, \partial M_1), x_1, f_1)$ sont bordants s'il existe un triplet $((W, W^{'}), x, f)$ tel que :*

$((M_0, \partial M_0), (W, W^{'}), (M_1, \partial M_1))$ est un bordisme à coins (définition V.1.1)

$$x \in JH_{q+1}^{n-j}(W, W^{'}) = \begin{cases} H^{n-j}(W, W^{'}) & si \;\; j \leqslant q \\ \mathrm{Im}(H^{n-j}(W, W^{'}) \longrightarrow H^{n-j}(W)) & si \;\; j = q+1 \\ H^{n-j}(W) & si \;\; j \geqslant q+2 \end{cases}$$

les x_i, $i = 0, 1$ sont induits de x par les inclusions $(M_i, \partial M_i) \subset (W, W^{'})$ c'est-à-dire $x|_{JH_q^{n-j}(M_i, \partial M_i)} = x_i$

$f : (W, W^{'}) \longrightarrow (Y, A)$ est tel que $f_i = f_{|(M_i, \partial M_i)}$ pour $i = 0, 1$.

La preuve de la proposition V.1.1 se généralise immédiatement à la relation de bordisme entre triplets d'intersection.

Proposition V.2.1. *La relation de bordisme entre triplets d'intersection est une relation d'équivalence.*

V.3 Homomorphisme de Gysin défini par une section.

La J-cohomologie admet un homomorphisme de Gysin. Donnons sa construction.

Soit E un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M variété à bord munie d'une certaine métrique
Considérons le fibré $V = E \oplus 1$ et notons par $D = DV$ et $S = SV$ les fibrés en disques et en sphères associés à cette métrique.
Rappelons que le fibré V admet la section partout non nulle

$$\begin{array}{rcl} \sigma : M & \to & V \\ m & \longrightarrow & (0_m, 1) \end{array}$$

σ peut être considérée comme une section $M \longrightarrow S$ du fibré S.

L'espace S est une variété orientable de dimension $n + r$ de bord $\partial S = S/_{\partial M}$.
Puisque M et S sont orientables alors il existe Φ_M et Φ_S isomorphismes de Poincaré Lefschetz :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_M : JH_q^{n-j}(M, \partial M) & \to & JH_j^{p'}(M, \partial M) \\ x & \to & x \cap [M, \partial M] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \Phi_S : JH_q^{n+r-j}(S, \partial S) & \to & JH_j^{p'+r}(S, \partial S) \\ x & \to & x \cap [S, \partial S] \end{array}$$

avec $p' = n - q - 2$.

On peut maintenant definir

$$\sigma_! : JH_q^{n-j}(M, \partial M) \to JH_q^{n+r-j}(S, \partial S)$$

par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} JH_q^{n-j}(M, \partial M) \arrow[r, "\sigma_!"'] \arrow[d, "\Phi_M"'] & JH_q^{n+r-j}(S, \partial S) \arrow[d, "\Phi_S"'] \\ JH_j^{p'}(M, \partial M) \arrow[r, "\sigma_*"'] & JH_j^{p'+r}(S, \partial S) \end{tikzcd}$$

$$\sigma_!(x) = \Phi_S^{-1} \circ \sigma_* \circ \Phi_M(x)$$

Remarque V.3.1. – *Nous avons utilisé la fonctorialité de la J-homologie.*

– *Pour toute application $g : (P^m, \partial P) \to (M^n, \partial M)$ on peut construire :*

$$\begin{array}{rcl} g_! : JH_q^j(P, \partial P) & \to & JH_q^{n-m+j}(M, \partial M) \\ x & \to & {\Phi_M}^{-1} \circ g_* \circ \Phi_P(x) \end{array}$$

qui vérifie la propriété suivante

$$g_!(g^*(y) \cup x) = y \cup g_!(x).$$

En effet :
$g_!(g^*(y) \cup x) = {\Phi_M}^{-1} \circ g_* \circ \Phi_P(g^*(y) \cup x) = {\Phi_M}^{-1} \circ g_*((g^*(y) \cup x) \cap [P, \partial P]) = {\Phi_M}^{-1} \circ g_*(g^*(y) \cap (x \cap [P, \partial P])) = {\Phi_M}^{-1}(g_*(g^*(y) \cap (x \cap [P, \partial P]))) = {\Phi_M}^{-1}(g_*(x \cap [P, \partial P]) \cap y) = {\Phi_M}^{-1}(g_* \circ \Phi_P(x) \cap y)$
et

$$y \cup g_!(x) = y \cup ({\Phi_M}^{-1} \circ g_* \circ \Phi_P(x)) = y \cup ({\Phi_M}^{-1} \circ g_*(x \cap [P, \partial P]))$$

Alors on a

$$\Phi_M(g_!(g^*(y) \cup x)) = \Phi_M({\Phi_M}^{-1}(g_* \circ \Phi_P(x) \cap y)) = g_* \circ \Phi_P(x) \cap y$$

et
$\Phi_M(y \cup g_!(x)) = \Phi_M(y \cup ({\Phi_M}^{-1} \circ g_*(x \cap [P, \partial P]))) = (y \cup ({\Phi_M}^{-1} \circ g_*(x \cap [P, \partial P]))) \cap [M, \partial M] = y \cap ({\Phi_M}^{-1} \circ g_*(x \cap [P, \partial P]) \cap [M, \partial M]) = y \cap (g_*(x \cap [P, \partial P])) = y \cap g_* \circ \Phi_P(x)$, d'où l'égalité.

V.4 Homologie d'intersection géométrique.

La J-cohomologie nous a permis de définir par dualité les triplets géométriques d'intersection. Dans cette section nous allons mettre sur ces triplets une relation d'équivalence de manière qu'on puisse les identifier avec les cycles d'intersection. Cette représentation nous donnera l'homologie d'intersection géométrique.

Soit (Y, A) comme dans la section 2 ci-dessus. Considérons alors les triplets d'intersection $((M, \partial M), x, f)$ avec $f : (M, \partial M) \to (Y, A)$.

On dit que deux triplets $((M, \partial M), x, f)$ et $((M', \partial M'), x', f')$ sont équivalents s'il existe un difféomorphisme $F : (M, \partial M) \longrightarrow (M', \partial M')$ qui préserve l'orientation tel que $f' = f \circ F$ et $x' = F^* x$. Les classes d'équivalence de triplets sont appelées cycles d'intersection géométriques.

Considérons maintenant le groupe abélien libre engendré par tous les cycles et quotientons par le sous-groupe constitué d'une part de toutes les différences de la forme :

$$((M, \partial M), x, f) - ((M_1, \partial M_1), x/_{(M_1, \partial M_1)}, f/_{(M_1, \partial M_1)}) - ((M_2, \partial M_2), x/_{(M_2, \partial M_2)}, f/_{(M_2, \partial M_2)})$$

où $M = M_1 \sqcup M_2$ et $\sqcup$ est la somme disjointe et d'autre part de toutes les différences de la forme :

$$((N, \partial N), u + v, g) - ((N, \partial N), u, g) - ((N, \partial N), v, g).$$

Notons ce quotient par $G(Y, A)$.

Soit maintenant $U(Y, A) \subset G(Y, A)$ le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme :

(a) $((M, \partial M), x, f)$ tel qu'il existe un triplet $((W, W'), \tilde{x}, \tilde{f})$ tel que (W, W') définisse un bordisme entre $(M, \partial M)$ et $\emptyset$ (défintion V.1.1) et de plus $\tilde{x}_{|(M,\partial M)} = x$ et $\tilde{f}_{|(M,\partial M)} = f$ (Bordisme)

(b) $((M, \partial M), x, f) - ((S(E \oplus 1), \partial S), \sigma_!(x), f \circ \pi)$ où $E \longrightarrow M$ est un fibré vectoriel au-dessus de M et $\pi : (S, \partial S) \longrightarrow (M, \partial M)$ la projection (modification par fibré vectoriel).

Définition V.4.1. *L'homologie géométrique d'intersection pour la perersité $\bar{p}$ est le quotient $G(Y, A)/U(Y, A)$. On le note $J'H_*^p(Y, A)$.*
La classe du cycle $((M, \partial M), x, f)$ dans le groupe quotient $G(Y, A)/U(Y, A)$ sera notée par $[(M, \partial M), x, f]$.
On note par $J'H_j^p(Y, A)) = \{[(M, \partial M), x, f] \in J'H_*^p(Y, A)$ où $((M, \partial M), x, f)$ de degré $j\}$

On a une transformation naturelle de foncteurs entre l'homologie géométrique $J'H_*^p(Y, A)$ et l'homologie $JH_*^p(Y, A)$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : J'H_*^p(Y, A) & \rightarrow & JH_*^p(Y, A) \\ {[(M, \partial M), x, f]} & \rightarrow & f_*(x \cap [M, \partial M]) \end{array}$$

Rappelons que dans le cas d'une variété à bord $(Y, A) = (\tilde{X}, L)$ on a $IH_*^{\bar{p}}(X) \cong JH_*^p(\tilde{X}, L)$ (proposition IV.1.1). Dans ce cas la transformation naturelle précédente permet de comparer l'homologie géométrique d'intersection $J'H$ et l'homologie d'intersection de Goresky-MacPherson IH

Théorème V.4.1. *Pour une variété orientable à bord $(\tilde{X}, L)$, la transformation naturelle suivante entre l'homologie géométrique d'intersection et l'homologie d'intersection est un isomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : J'H_*^p(\tilde{X}, L)) & \rightarrow & IH_*^{\bar{p}}(\tilde{X}/L) \\ {[(M, \partial M), x, f]} & \rightarrow & f_*(x \cap [M, \partial M]) \end{array}$$

Remarque V.4.1. *Pour représenter géométriquement $H_*(X, A)$ Jakob utilise le dual de Poincaré de $H_*(M, \partial M)$ qui est $H^*(M)$ et il utilise le bordisme à poids dans l'homologie absolue.*
Pour représenter $IH_*^{\bar{p}}(\tilde{X}/L)$ nous utilisons le dual de Poincaré de $IH_*^{\bar{p}}(M/\partial M)$ qui est $JH_q^*(M, \partial M)$. La J-cohomologie nécessite de la cohomologie relative donc nous avons besoin d'un "bordisme de paires" représenté par (W, W') (définition V.1.1).

Preuve:
On a 3 cas à considérer :
Cas 1 : $j \leq q$
Dans ce cas on aura :
. $IH_j^{\bar{p}}(X) = H_j(\tilde{X})$,
. dans les triplets d'intersection $((M, \partial M), x, f)$ si M est une variété à bord orientable de dimension n alors la classe de cohomologie x vérifie $x \in JH_q^{n-j}(M, \partial M) = H^{n-j}(M, \partial M)$ et $f : (M, \partial M) \to (\tilde{X}, L)\}$.

Démontrons tout d'abord que φ est compatible avec la relation de bordisme et avec la modification par fibré vectoriel.

Pour démontrer que φ est compatible avec la relation de bordisme il faut montrer que si $((M_0, \partial M_0), x_0, f_0)$ et $((M_1, \partial M_1), x_1, f_1) \in J'H_j^p(\tilde{X}, L)$ sont bordants alors $(f_0)_*(x_0 \cap [M_0, \partial M_0]) = (f_1)_*(x_1 \cap [M_1, \partial M_1])$.
Soit $(((M_0, \partial M_0), x_0, f_0), ((W, W'), x, f), ((M_1, \partial M_1), x_1, f_1))$ un bordisme. Calculons l'image du cap-produit $x \cap [W, \partial W] \in H_{j+1}(W, M_0 \cup M_1)$ par l'opérateur bord

$$\partial : H_{j+1}(W, M_0 \cup M_1) \to H_j(M_0 \cup M_1).$$

On a

$$\begin{aligned} \partial(x \cap [W, \partial W]) &= x_{/\partial W} \cap \partial[W, \partial W] \\ &= (x_0 + x_1 + x_{/W'}) \cap ([M_0, \partial M_0] - [M_1, \partial M_1] + [W']) \\ &= x_0 \cap [M_0, \partial M_0] - x_1 \cap [M_1, \partial M_1], \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(f)_*\partial(x \cap [W, \partial W]) = (f_0)_*(x_0 \cap [M_0, \partial M_0]) - (f_1)_*(x_1 \cap [M_1, \partial M_1]).$$

Or le diagramme commutatif induit par $f : (W, M_0 \cup M_1) \to (\tilde{X}, \tilde{X})$:

$$\begin{array}{ccc} H_{j+1}(W, M_0 \cup M_1) & \xrightarrow{f_*} & H_{j+1}(\tilde{X}, \tilde{X}) = 0 \\ \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\ H_j(M_0 \cup M_1) & \xrightarrow{f_*} & H_j(\tilde{X}) \end{array}$$

nous donne

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(f)_*(x \cap [W, \partial W]) \\ &= (f)_*\partial(x \cap [W, \partial W]) \\ &= (f_0)_*(x_0 \cap [M_0, \partial M_0]) - (f_1)_*(x_1 \cap [M_1, \partial M_1]), \end{aligned}$$

Ce qui est la relation demandée.

Pour montrer que φ est compatible avec la modification par fibré vectoriel il faut montrer que pour toute différence $((M, \partial M), x, f) - ((S(E \oplus 1), \partial S), \sigma_!(x), f \circ \pi)$, on a

la relation $(f\circ\pi)_*(\sigma_!(x)\cap[S,\partial S]) = f_*(x\cap[M,\partial M])$.
La suite de relations

$$\begin{aligned}(f\circ\pi)_*(\sigma_!(x)\cap[S,\partial S]) &= f_*\circ\pi_*(\sigma_!(x)\cap[S,\partial S]) = f_*\circ\pi_*(\Phi_S(\sigma_!(x)))\\ &= f_*\circ\pi_*(\Phi_S\circ{\Phi_S}^{-1}\circ\sigma_*\circ\Phi_M(x))\\ &= f_*\circ\pi_*(\sigma_*\circ\Phi_M(x)) = f_*(\pi_*\circ\sigma_*)\Phi_M(x)\\ &= f_*(\Phi_M(x)) = f_*(x\cap[M,\partial M])\end{aligned}$$

donne le résultat.

Passons maintenant à la surjection. Soit $y\in H_j(\tilde{X})$ il faut trouver un cycle d'intersection $((M,\partial M),x,f)$ tel que $f_*(x\cap[M,\partial M]) = y$.

On peut plonger $(\tilde{X},L)$ dans un $(\mathbb{R}^l,\mathbb{R}^{l-1})$ convenable [18], puis on construit un voisinage tubulaire autour de ce $\tilde{X}$ et on utilise la méthode de Hirsch pour le lisser. On aura maintenant une variété différentiable $W\subset\mathbb{R}^l$ de dimension l et une rétraction par déformation $r : W\to\tilde{X}\subset W$ vérifiant $\partial W = \partial_1 W\cup\partial_2 W$ avec $\partial_2 W$voisinage de L et $r/_{\partial_2 W} : \partial_2 W\to L$. Or $r : W\longrightarrow\tilde{X}$ induit un isomorphisme $r_* : H_j(W)\longrightarrow H_j(\tilde{X})$ donc pour $y\in H_j(\tilde{X})$ il existe $y_1\in H_j(W)$ tel que $r_*(y_1) = y$.

Prenons maintenant le disque trivial $D := D^k\times W$ au-dessus de W qui a comme bord $\partial D = (S^{k-1}\times W)\cup(D^k\times\partial_1 W)\cup(D^k\times\partial_2 W)$.
Notons $\partial_1 D = (S^{k-1}\times W)\cup(D^k\times\partial_1 W)$. C'est une variété orientable à bord contenant $(S^{k-1}\times W)$ avec $\partial(\partial_1 D) = (S^{k-1}\times\partial_1 W)\cup(S^{k-1}\times\partial_2 W)\cup(S^{k-1}\times\partial_1 W)\cup(D^k\times\partial(\partial_1 W))$.
En respectant les orientations on aura $\partial(\partial_1 D) = (S^{k-1}\times\partial_2 W)\cup(D^k\times\partial(\partial_1 W))$ qui est une variété sans bord qui contient $(S^{k-1}\times\partial_2 W)$.
Donc je peux définir la projection $\pi : (\partial_1 D,\partial(\partial_1 D))\longrightarrow(W,\partial_2 W)$ qui induit une surjection $\pi_* : H_j(\partial_1 D)\longrightarrow H_j(W)$. Alors pour $y_1\in H_j(W)$ il existe $y_2\in H_j(\partial_1 D)$ tel que $\pi_*(y_1) = y_2$.
D'après la dualité de Poincaré il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{rcc}\Phi_{\partial_1 D} : H^{n-j}(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D)) & \longrightarrow & H_j(\partial_1 D)\\ x & \to & x\cap[\partial_1 D,\partial(\partial_1 D)]\end{array}$$

D'où pour $y_2\in H_j(\partial_1 D)$ il existe $x\in H^{n-j}(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D))$ tel que $x\cap[\partial_1 D,\partial(\partial_1 D)] = y_2$.
En prenant $M = \partial_1 D$ et $f = r\circ\pi : (M,\partial M)\to(W,\partial_2 W)\to(\tilde{X},L)$, on a

$$f_*(x\cap[M,\partial M]) = (r\circ\pi)_*(x\cap[M,\partial M]) = (r\circ\pi)_*(y_2) = r_*(\pi_*(y_2)) = r_*(y_1) = y.$$

ce qui montre la surjection dans le premier cas.

Pour terminer ce premier cas montrons que φ est injective.
Soit $((M,\partial M),x,f)\in J'H^p_j(\tilde{X},L)$ tel que $f_*(x\cap[M,\partial M]) = 0$. Il faut démontrer que $[(M,\partial M),x,f] = 0$ c'est-à-dire que le cycle $((M,\partial M),x,f)$ est bordant à zéro. D'après la constuction de l'homologie d'intersection géométrique il suffit de trouver un fibré vectoriel $\pi : E\to M$ au-dessus de M tel que $((S(E\oplus 1),\partial S(E\oplus 1)),\sigma_!(x),\pi\circ f)$ borde

zéro.
On choisit l assez large de manière que $l = n+k+1 > 2n$ alors on peut plonger $(M, \partial M)$ dans $(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^{l-1})$, l'application $\tilde{f} = r \circ f$ est homotope à un plongement
$(M, \partial M) \overset{\tilde{f}}{\hookrightarrow} (W, \partial_2 W) \subset (\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^{l-1})$

$$\begin{tikzcd} (M,\partial M) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & (W,\partial_2 W) \arrow[d, "r"] \\ & (\tilde{X}, L) \end{tikzcd}$$

et le fibré normal est de la forme $NM = E \oplus 1$ [18].
On choisit une métrique sur E et on note $S = S(NM) = S(E \oplus 1)$ le fibré en sphères et $D = D(NM) = D(E \oplus 1)$ le fibré en disques associés.
Montrons que $((S, \partial S), \sigma_!(x), f \circ \pi)$ est un bord.
Le fibré en sphères S est une variété de dimension $n+k$. Soit $j : S \to D$ le plongement.
On pose $\tilde{W} = W - intD - int\ (D/_{\partial M})$ dont le bord $\partial\tilde{W} = \partial_1 W \cup S \cup (\partial_2 W - int\ (D/_{\partial M}))$.
Notons $W' = (\partial_2 W - int\ (D/_{\partial M}))$ et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{n-j+k}(\tilde{W}, \partial_1 W \cup W') \arrow[r, "res"] \arrow[d, "\cap[\tilde{W},\partial\tilde{W}]"', "\cong"] & H^{n-j+k}(\tilde{W}, W') \arrow[r, "res"] & H^{n-j+k}(S, \partial S) \arrow[d, "\cap[S,\partial S]"] & H^{n-j}(M, \partial M) \arrow[l, "\sigma_!"'] \arrow[d, "\cap[M,\partial M]"] \\ H_{j+1}(\tilde{W}, S) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, "\cong"'] & & H_j(S) \arrow[d, "j_*"] & H_j(M) \arrow[l, "\sigma_*"'] \arrow[d, "\tilde{f}_*"] \\ H_{j+1}(W, D) \arrow[rr, "\partial"] & & H_j(D) \arrow[r, "i_*"] & H_j(W) \end{tikzcd}$$

$H_{j+1}(\tilde{W}, S) \to H_{j+1}(W, D)$ est un isomorphisme par excision (en effet :$\tilde{W} = W - intD - int(D|_{\partial M})$ et $S = D - intD - int(D|_{\partial M})$).
$H^{n-j+k}(\tilde{W}, \partial_1 W \cup W') \overset{\cap[\tilde{W},\partial\tilde{W}]}{\to} H_{j+1}(\tilde{W}, S)$ est un isomorphisme [6] , $(\partial\tilde{W} = (\partial_1 W \cup W') \cup S$ et $(\partial_1 W \cup W') \cap S = S|_{\partial M}$ avec $S|_{\partial M}$ le bord commun de S et de $\partial_1 W \cup W'$).

D'après ce diagramme commutatif $f_*(x \cap [M, \partial M]) = 0$ implique qu'il existe un élément $\overline{z} \in H^{n-j+k}(\tilde{W}, \partial_1 W \cup W')$ tel que $j_*(\sigma_!(x) \cap [S, \partial S]) = j_*(\bar{z}/_{(S,\partial S)} \cap [S, \partial S]) \in H_j(D)$.
D'après le morphisme de suites exactes d'homologie et de cohomologie de (D, S) suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{n+k-j}(D, D/_{\partial M}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[D,\partial D]"'] & H^{n+k-j}(S, \partial S) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[S,\partial S]"] & H^{n+k+1-j}(D, \partial D) \arrow[d, "\cap[D,\partial D]"] \\ H_{j+1}(D, S) \arrow[r] & H_j(S) \arrow[r, "j_*"] & H_j(D) \end{tikzcd}$$

La relation $j_*(\sigma_!(x) \cap [S, \partial S]) = j_*(\bar{z}/_{(S,\partial S)} \cap [S, \partial S])$ implique qu'il existe
$y \in H^{n+k-j}(D, D/_{\partial M})$ tel que $\sigma_!(x) = \bar{z}/_{(S,\partial S)} + y/_{(S,\partial S)}$.

Calculons maintenant $((S,\partial S),\sigma_!(x),f\circ\pi)$

$$\begin{aligned}((S,\partial S),\sigma_!(x),f\circ\pi) &= ((S,\partial S),\bar{z}/_{(S,\partial S)}+y/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)\\ &\simeq ((S,\partial S),y/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)+((S,\partial S),\bar{z}/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)\\ &\simeq ((S,\partial S),y/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)+((S,\partial S),\bar{z}/_{(S,\partial S)},r/_{(S,\partial S)}).\end{aligned}$$

Or $((S,\partial S),\bar{z}/_{(S,\partial S)},r/_{(S,\partial S)})$ borde $((\partial_1 W,\partial(\partial_1 W)),0,r/_{\partial_1 W})$.
En effet, on a $\partial\tilde{W}=\partial_1 W\cup S\cup W'$ et $\partial W'=S/_{\partial M}\cup\partial(\partial_2 W)$ donc $(S/_{\partial M},W',\partial(\partial_2 W))$ avec $\partial(\partial_2 W)=\partial(\partial_1 W)$ est un bordisme et par suite $((S,\partial S),(\tilde{W},W'),(\partial_1 W,\partial(\partial_1 W)))$ est un bordisme et $((S,\partial S),\bar{z}/_{(S,\partial S)},r/_{(S,\partial S)})$ est bordant à $\emptyset$.
D'autre part $((S,\partial S),y/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)$ est le bord de $((D,D/_{\partial M}),y,f\circ\pi)$ car $\partial D = S\cup D/_{\partial M}$ et $\partial S=S/_{\partial M}$ est le bord de $D/_{\partial M}$. Alors $((S,\partial S),y/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)$ est bordant à zéro. D'où $((S,\partial S),\sigma_!(x),f\circ\pi)$ est bordant à zéro donc c'est le bord d'un certain $((Z,Z'),\widehat{x},\widehat{f})$. Il en résulte que φ est injective.
Ce qui achève la preuve pour le premier cas.
Cas 2 : $j\geq q+2$
Dans ce cas on aura :

. $IH^{\bar{p}}_j(X)=H_j(\tilde{X},L)$,
. dans les triplets d'intersection $((M,\partial M),x,f)$ si M est une variété à bord orientable de dimension n alors la classe de cohomologie x vérifie $x\in JH^{n-j}_q(M,\partial M)=H^{n-j}(M)$ et $f:(M,\partial M)\to(\tilde{X},L)\}$.

Démontons tout d'abord que φ est compatible avec la relation de bordisme et avec la modification par fibré vectoriel.

Pour démontrer que φ est compatible avec la relation de bordisme il faut montrer que si $((M_0,\partial M_0),x_0,f_0)$ et $((M_1,\partial M_1),x_1,f_1)\in J'H^p_j(\tilde{X},L)$ sont bordants alors $(f_0)_*(x_0\cap[M_0,\partial M_0])=(f_1)_*(x_1\cap[M_1,\partial M_1])$.
Soit $(((M_0,\partial M_0),x_0,f_0),((W,W'),x,f),((M_1,\partial M_1),x_1,f_1))$ un bordisme. Calculons l'image du cap-produit $x\cap[W,\partial W]\in H_{j+1}(W,M_0\cup M_1)$ par l'opérateur bord

$$\partial: H_{j+1}(W,\partial W)\to H_j(\partial W).$$

On a

$$\begin{aligned}\partial(x\cap[W,\partial W]) &= x_{/\partial W}\cap\partial[W,\partial W]\\ &=(x_0+x_1+x_{/W'})\cap([M_0,\partial M_0]-[M_1,\partial M_1]+[W'])\\ &=x_0\cap[M_0,\partial M_0]-x_1\cap[M_1,\partial M_1]+x_{/W'}\cap[W'],\end{aligned}$$

et par conséquent

$$(f)_*\partial(x\cap[W,\partial W])=(f_0)_*(x_0\cap[M_0,\partial M_0])-(f_1)_*(x_1\cap[M_1,\partial M_1])+(f)_*(x_{/W'}\cap[W']).$$

Or le diagramme commutatif induit par $f:(W,\partial W)\to(\tilde{X},\tilde{X})$

$$\begin{array}{ccc} H_{j+1}(W,\partial W) & \xrightarrow{f_*} & H_{j+1}(\tilde{X},\tilde{X})=0 \\ \partial\downarrow & & \partial\downarrow \\ H_j(\partial W) & \xrightarrow{f_*} & H_j(\tilde{X}) \end{array}$$

nous donne

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(f)_*(x\cap[W,\partial W]) \\ &= (f)_*\partial(x\cap[W,\partial W]) \\ &= (f_0)_*(x_0\cap[M_0,\partial M_0])-(f_1)_*(x_1\cap[M_1,\partial M_1])+(f)_*(x_{/W'}\cap[W']), \end{aligned}$$

or

$$(f)_*(x_{/W'}\cap[W'])\in H_j(L)$$

alors

$$(f_0)_*(x_0\cap[M_0,\partial M_0])-(f_1)_*(x_1\cap[M_1,\partial M_1])=0 \bmod H_*(L)$$

L'application φ est compatible avec la modification par fibré vectoriel (la démonstration du cas 1 est valable ici car elle ne dépend pas du degré j.)
Les démonstrations qui suivent sont toutes du même format. En particulier on utilise partout les W, $\partial_1 D$, $\tilde{W}$ et W' introduites dans le cas 1.

Passons maintenant à la surjection. Soit $y\in H_j(\tilde{X},L)$ il faut trouver un cycle d'intersection $((M,\partial M),x,f)$ tel que $f_*(x\cap[M,\partial M])=y$.

Puisque $r_*:H_j(W,\partial_2 W)\longrightarrow H_j(\tilde{X},L)$ (définie dans le cas 1) est un isomorphisme alors pour $y\in H_j(\tilde{X},L)$ il existe $y_1\in H_j(W,\partial_2 W)$ tel que $r_*(y)=y_1$.
Or

$$\pi:(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D))\longrightarrow(W,\partial_2 W)$$

induit une surjection

$$\pi_*:H_j(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D))\longrightarrow H_j(W,\partial_2 W)$$

donc pour y_1 il existe $y_2\in H_j(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D))$ tel que $\pi_*(y_1)=y_2$.
D'après la dualité de Poincaré il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\partial_1 D}:H^{n-j}(\partial_1 D) & \longrightarrow & H_j(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D)) \\ x & \to & x\cap[\partial_1 D,\partial(\partial_1 D)]. \end{array}$$

D'où pour $y_2\in H_j(\partial_1 D,\partial(\partial_1 D))$ il existe $x\in H^{n-j}(\partial_1 D)$ tel que $x\cap[\partial_1 D,\partial(\partial_1 D)]=y_2$.
En prenant $M=\partial_1 D$ et $f=r\circ\pi:(M,\partial M)\to(W,\partial_2 W)\to(\tilde{X},L)$ on a

$$f_*(x\cap[M,\partial M])=(r\circ\pi)_*(x\cap[M,\partial M])=(r\circ\pi)_*(y_2)=r_*(\pi_*(y_2))=r_*(y_1)=y.$$

Pour terminer ce deuxième cas montrons que φ est injective. On travaille dans le même cadre que le cas 1. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{n-j+k}(\tilde{W},\partial_1 W\cup W') \arrow[r, "res"] \arrow[d, "\cap[\tilde{W},\partial\tilde{W}]"'] & H^{n-j+k}(\tilde{W}) \arrow[r, "res"] & H^{n-j+k}(S) \arrow[d, "\cap[S,\partial S]"] & H^{n-j}(M) \arrow[l, "\sigma_!"'] \arrow[d, "\cap[M,\partial M]"] \\
H_{j+1}(\tilde{W},S) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, "\cong"'] & & H_j(S,\partial S) \arrow[d, "j_*"] & H_j(M,\partial M) \arrow[l, "\sigma_*"'] \arrow[d, "\tilde{f}_*"] \\
H_{j+1}(W,D) \arrow[rr, "\partial"] & & H_j(D,D/_{\partial M}) \arrow[r, "i_*"] & H_j(W,\partial_2 W)
\end{tikzcd}$$

D'après le diagramme commutatif $f_*(x\cap[M,\partial M])=0$ implique qu'il existe un élément $\overline{z}\in H^{n-j+k}(\tilde{W},\partial_1 W\cup W')$ tel que $j_*(\sigma_!(x)\cap[S,\partial S])=j_*(\bar{z}/_S\cap[S,\partial S])\in H_j(D,D/_{\partial M})$. D'après le morphisme de suites exactes d'homologie et de cohomologie de (D,S) suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{n+k-j}(D) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[D,\partial D]"'] & H^{n+k-j}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[S,\partial S]"] & H^{n+k+1-j}(D,S) \arrow[d, "\cap[D,\partial D]"] \\
H_{j+1}(D,\partial D) \arrow[r] & H_j(S,\partial S) \arrow[r, "j_*"] & H_j(D,D/_{\partial M})
\end{tikzcd}$$

La relation $j_*(\sigma_!(x)\cap[S,\partial S])=j_*(\bar{z}/_{(S,\partial S)}\cap[S,\partial S])$ implique qu'il existe $y\in H^{n+k-j}(D)$ tel que $\sigma_!(x)=\bar{z}/_S+y/_S$.
Calculons maintenant $((S,\partial S),\sigma_!(x),f\circ\pi)$

$$\begin{aligned}
((S,\partial S),\sigma_!(x),f\circ\pi) &= ((S,\partial S),\bar{z}/_S+y/_S,f\circ\pi)\\
&\simeq ((S,\partial S),y/_S,f\circ\pi)+((S,\partial S),\bar{z}/_S,f\circ\pi)\\
&\simeq ((S,\partial S),y/_S,f\circ\pi)+((S,\partial S),\bar{z}/_S,r/_{(S,\partial S)})
\end{aligned}$$

Or $((S,\partial S),\bar{z}/_S,r/_{(S,\partial S)})$ borde $((\partial_1 W,\partial(\partial_1 W)),0,r/_{\partial_1 W})$ (en effet :$\partial\tilde{W}=\partial_1 W\cup S\cup W'$ et $\partial W'=S/_{\partial M}\cup\partial(\partial_2 W)$ donc $(S/_{\partial M},W',\partial(\partial_2 W))$ avec $\partial(\partial_2 W)=\partial(\partial_1 W)$ est un bordisme et par suite $((S,\partial S),(\tilde{W},W'),(\partial_1 W,\partial(\partial_1 W)))$ est un bordisme)
et $((S,\partial S),\bar{z}/_S,r/_{(S,\partial S)})$ est bordant à $\emptyset$.
D'autre part $((S,\partial S),y/_{S,},f\circ\pi)$ est le bord de $((D,D/_{\partial M}),y,f\circ\pi)$ car $\partial D=S\cup D/_{\partial M}$ et $\partial S=S/_{\partial M}$ est le bord de $D/_{\partial M}$. Alors $((S,\partial S),y/_{(S,\partial S)},f\circ\pi)$ est bordant à zéro. D'où $((S,\partial S),\sigma_!(x),f\circ\pi)$ est bordant à zéro donc c'est le bord d'un certain $((Z,Z'),\widehat{x},\widehat{f})$. Il en résulte que φ est injective.
Ce qui achève la preuve pour le deuxième cas.
<u>Cas 3 :</u> $j=q+1$
Dans ce cas on aura :

. $IH_j^{\bar{p}}(X)=Im(H_j(\tilde{X})\longrightarrow H_j(\tilde{X},L))$,

. dans les triplets d'intersection $((M,\partial M),x,f)$ si M est une variété à bord orientable de dimension n alors la classe de cohomologie x vérifie $x\in JH_q^{n-j}(M,\partial M)=Im(H^{n-j}(M,\partial M)\to H^{n-j}(M))$ et $f:(M,\partial M)\to(\tilde{X},L)$.

Démontrons tout d'abord que φ est compatible avec la relation de bordisme et avec la modification par fibré vectoriel.

Pour démontrer que φ est compatible avec la relation de bordisme il faut montrer que si $((M_0, \partial M_0), x_0, f_0)$ et $((M_1, \partial M_1), x_1, f_1) \in J'H_j^p(\tilde{X}, L)$ sont bordants alors $(f_0)_*(x_0 \cap [M_0, \partial M_0]) = (f_1)_*(x_1 \cap [M_1, \partial M_1])$.
Or

$$JH_q^{N-j}(M_0, \partial M_0) = Im(H^{n-j}(M_0, \partial M_0) \to H^{n-j}(M_0)) \subseteq H^{n-j}(M_0)$$

et

$$JH_q^{N-j}(M_1, \partial M_1) = Im(H^{n-j}(M_1, \partial M_1) \to H^{n-j}(M_1)) \subseteq H^{n-j}(M_1),$$

donc on est dans le cas 2 .
Le morphisme φ est bien défini pour la modification par fibré vectoriel.

Passons maintenant à la surjection. Soit $y \in IH_j^{\bar{p}}(X)$ il faut trouver un cycle d'intersection $((M, \partial M), x, f)$ tel que $\varphi((M, \partial M), x, f) = y$.
Or $y \in IH_j^{\bar{p}}(X)$ implique qu'il existe $z \in H_j(\tilde{X})$ tel que $y = p_*(z)$ où $p : (\tilde{X}, \emptyset) \to (\tilde{X}, L)$.
Et d'après Jakob $\varphi : H_j'(\tilde{X}) \longrightarrow H_j(\tilde{X})$ est bijective alors il existe $(N^n, z_1, f_1) \in H_j'(\tilde{X})$ où N est une variété sans bord et $z_1 \in H^{n-j}(N)$tel que $\varphi(N, z_1, f_1) = (f_1)_*(z_1 \cap [N]) = z$

$$\begin{aligned} y &= p_*(z) \\ &= p_*(\varphi(N, z_1, f_1)) \\ &= \varphi(p_*(N, z_1, f_1)) \\ &= \varphi((N, z_1, p \circ f_1)) \end{aligned}$$

Or $((N, z_1, p \circ f_1)) \in J'H_j^p(\tilde{X}, L)$. Il suffit alors de prendre

$$((M, \partial M), x, f) = ((N, z_1, p \circ f_1))$$

et on a le résultat.

L'application φ est injective car on est dans le cas 2.
D'où le résultat.

Chapitre VI

Applications

VI.1 Representabilité des cycles d'intersection et dualité

Dans l'homologie ordinaire un problème classique est d'essayer de représenter un cycle par l'image de la classe fondamentale d'une variété [30]. Or la théorie homologique géométrique permet de représenter tout cycle par l'image du cap produit de la classe fondamentale d'une variété lisse par une classe de cohomologie de cette variété.

Dans le cadre de singularité isolée le problème se transpose naturellement de la manière suivante : Tout cycle d'intersection est il représentable par l'image de la classe fondamentale relative d'une variété à bord ? Notre construction permet de donner une réponse du même type que l'homologie standard. En effet le théorème V.4.1 a pour corollaire

Corollaire VI.1.1. *Tout cycle d'intersection dans $IH_*^{\bar{p}}(X)$ peut être représenté par l'image du cap-produit de la classe fondamentale d'une variété à bord par une classe de J-cohomologie de cette variété.*

Un autre résultat découle des deux théorèmes V.4.1 et IV.1.2

Corollaire VI.1.2. *Soit $X = \tilde{X}/L$ une pseudo-variété à singularité conique isolée de dimension N, $\bar{p} = (0, ..., p_N)$ une perversité au sens de Goresky-MacPherson et $\bar{q} = (0, ..., q_N)$ la pervesité complémentaire c'est-à-dire $q_N = N - p_N - 2$. Il existe un isomorphisme appelé isomorphisme de dualité de Poincaré*

$$\begin{array}{rcl} \Phi'_{\tilde{X}} : JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) & \to & J'H_j^p(\tilde{X}, L) \\ x & \to & \Phi'_{\tilde{X}}(x) = \varphi^{-1} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x) = [(\tilde{X}, L), x, id_{(\tilde{X},L)}] \end{array}$$

qui a pour inverse

$$\begin{array}{rcl} \Psi'_M : J'H_j^p(\tilde{X}, L) & \to & JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) \\ ((P, \partial P), x, g) & \to & g_!(x) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\tilde{X}} : JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) & \to & IH_j^{\bar{p}}(\tilde{X}/L) \\ x & \to & x \cap [\tilde{X}, L] \end{array} \; ; \; \begin{array}{rcl} \varphi : J'H_*^p(\tilde{X}, L) & \to & IH_*^{\bar{p}}(X) \\ ((M, \partial M), x, f) & \to & f_*(x \cap [M, \partial M]) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g_! : JH_q^{m-j}(P, \partial P) & \to & JH_q^{N-j}(\tilde{X}, L) \\ x & \to & g_!(x) = \Phi_{\tilde{X}}^{-1} \circ g_* \circ \Phi_P(x) \end{array}$$

pour

$$g : (P^m, \partial P) \to (\tilde{X}, L)$$

VI.2 Isomorphisme de Thom

Dans cette section nous allons montrer que la J-cohomologie vérifie un isomorphisme de Thom.

On considère une pseudo-variété X de dimension N avec une singularité conique isolée x. On note $\tilde{X}$ la variété de bord connexe L au-dessus de X, c'est-à-dire $X := \tilde{X}/L$ et $\{x\} = L/L$.
Soit $\bar{q} = (0, ..., q_N)$ une perversité et $\bar{p} = (0, ..., p_N)$ la perversité complémentaire c'est-à-dire $p_N = N - q_N - 2$, On note $q = q_N$ et $p = p_N$.
Soit $\pi : E \to \tilde{X}$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus de $\tilde{X}$. On note par $D = DE \to \tilde{X}$ le fibré en disques et par $S = SE \to \tilde{X}$ le fibré en sphères qui sont associés à une métrique sur E.
Le fibré en disques D est une variété à coins de dimension $N + r$ de bord topologique $\partial D = S \cup D|_L$. Le fibré en sphères S est une variété de dimension $N + r - 1$ et de bord $\partial S = S|_L$. On appelle paire de Thom la paire $(D/S, \partial D/S)$.
Le fibré en disque D admet une section nulle qu'on note σ_0.

Dans le théorème IV.1.2 on a montré une dualité de Poincaré pour des singularités isolées. Nous allons généraliser à la paire de Thom.

Lemme VI.2.1. *Il existe une dualité*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : JH_q^{j+r}(D/S, \partial D/S) & \to & JH_{N-j}^{p+r}(D, D|_L) \\ x & \to & x \cap [D, \partial D]. \end{array}$$

Preuve:
On a 3 cas à considérer
cas 1 : $j \leq p$
$j \leq p \Rightarrow j + r \leq p + r = N - q - 2 + r = (N + r) - q - 2$ d'où $JH_q^{j+r}(D/S, \partial D/S) = H^{j+r}(D, S)$ et
$j \leq p \Rightarrow N - j \geq N - p = (N + r) - (p + r)$ d'où $JH_{N-j}^{p+r}(D, D|_L) = H_{N-j}(D, D|_L)$
et par suite

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H^{j+r}(D, S) & \to & H_{N-j}(D, D|_L) \\ x & \to & x \cap [D, \partial D]. \end{array}$$

est un isomorphisme d'après le lemme des 5

$$\begin{tikzcd} H^{j+r-1}(D|_L, S|_L) \arrow[r] \arrow[d, "{\cap[D|_L,\partial D|_L]}"'] & H^{j+r}(D, \partial D) \arrow[r] \arrow[d, "{\cap[D,\partial D]}"'] & H^{j+r}(D, S) \arrow[r] \arrow[d, "{\cap[D,\partial D]}"'] & H^{j+r}(D|_L, S|_L) \arrow[r] \arrow[d, "{\cap[D|_L,\partial D|_L]}"'] & H^{j+r+1}(D, \partial D) \arrow[d, "{\cap[D,\partial D]}"'] \\ H_{N-j-1}(D|_L) \arrow[r] & H_{N-j}(D) \arrow[r] & H_{N-j}(D, D|_L) \arrow[r] & H_{N-j}(D|_L) \arrow[r] & H_{N-j+1}(D). \end{tikzcd}$$

cas 2 : $j \geq p + 2$ on a
$j + r \geq (p + r) + 2$ d'où $JH_q^{j+r}(D/S, \partial D/S) = H^{j+r}(D/S, \partial D/S) \cong H^{j+r}(D, \partial D)$ et

$N - j \leq N - p - 2 = (N + r) - (p + r) - 2$ d'où $JH^{p+r}_{N-j}(D, D|_L) = H_{N-j}(D)$
et par suite

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H^{j+r}(D, \partial D) & \to & H_{N-j}(D) \\ x & \to & x \cap [D, \partial D]. \end{array}$$

cas 3 : $j = p + 1$ on a
$j + r = (p + r) + 1$ d'où $JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) = \mathrm{Im}(H^{j+r}(D, \partial D) \to H^{j+r}(D, S)$
et $N - j = N - p - 1 = (N + r) - (p + r) - 1 = q + 1$ d'où
$JH^{p+r}_{N-j}(D, D|_L) = \mathrm{Im}(H_{N-j}(D) \to H_{N-j}(D, D|_L)$
d'après le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{j+r-1}(D|_L, S|_L) \arrow[r] \arrow[d] & H^{j+r}(D, \partial D) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[D,\partial D]"'] & H^{j+r}(D, S) \arrow[r] \arrow[d, "\cap[D,\partial D]"'] & H^{j+r}(D|_L, S|_L) \arrow[d] \\ H_{N-j-1}(D|_L) \arrow[r] & H_{N-j}(D) \arrow[r] & H_{N-j}(D, D|_L) \arrow[r] & H_{N-j}(D|_L). \end{tikzcd}$$

Pour $x \in JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) = \mathrm{Im}(H^{j+r}(D, \partial D) \to H^{j+r}(D, S))$ on a
$x \cap [D, \partial D] \in \mathrm{Im}(H_{N-j}(D) \to H_{N-j}(D, D|_L) = JH^{p+r}_{N-j}(D, D|_L)$.

Remarque VI.2.1. *Les cohomologies $JH^*_q(D/S, \partial D/S)$ et $JH^*_q(D, \partial D)$ sont différentes pour les petits degrés. Par exemple pour $j \leq N + r - q - 2$ on a $JH^j_q(D/S, \partial D/S) = H^j(D, S)$ et $JH^j_q(D, \partial D) = H^j(D)$ (voir la définition du complexe JC_*).*

En utilisant cette dualité on peut définir

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{0!} : JH^j_q(\tilde{X}, L) & \to & JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) \\ x & \to & \Phi^{-1} \circ \sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \pi_! : JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) & \to & JH^j_q(\tilde{X}, L) \\ x & \to & \Phi^{-1}_{\tilde{X}} \circ \pi_* \circ \Phi(x) \end{array}$$

L'applicatin $\sigma_{0!}$ vérifie $\sigma_{0!}({\sigma_0}^*(y) \cup x) = y \cup \sigma_{0!}(x)$
En effet : [27]

$$\begin{aligned} \sigma_{0!}({\sigma_0}^*(y) \cup x) &= \Phi^{-1} \circ \sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}({\sigma_0}^*(y) \cup x) \\ &= \Phi^{-1} \circ \sigma_{0*}(({\sigma_0}^*(y) \cup x) \cap [\tilde{X}, L]) \\ &= \Phi^{-1} \circ \sigma_{0*}({\sigma_0}^*(y) \cap (x \cap [\tilde{X}, L])) \\ &= \Phi^{-1}(\sigma_{0*}({\sigma_0}^*(y) \cap (x \cap [\tilde{X}, L]))) \\ &= \Phi^{-1}(\sigma_{0*}(x \cap [\tilde{X}, L]) \cap y) \\ &= \Phi^{-1}(\sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x) \cap y) \end{aligned}$$

et
$$y \cup \sigma_{0!}(x) = y \cup (\Phi^{-1} \circ \sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x)) = y \cup (\Phi^{-1} \circ \sigma_{0*}(x \cap [\tilde{X}, L]))$$
Alors
$$\phi(\sigma_{0!}({\sigma_0}^*(y) \cup x)) = \Phi(\Phi^{-1}(\sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x) \cap y)) = \sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x) \cap y$$
et
$$\begin{array}{ll} \Phi(y \cup \sigma_{0!}(x)) & = \Phi(y \cup (\Phi^{-1} \circ \sigma_{0*}(x \cap [\tilde{X}, L]))) \\ & = (y \cup (\Phi^{-1} \circ \sigma_{0*}(x \cap [\tilde{X}, L]))) \cap [D, \partial D] \\ & = y \cap (\Phi^{-1} \circ \sigma_{0*}(x \cap [\tilde{X}, L]) \cap [D, \partial D]) \quad , \\ & = y \cap (\sigma_{0*}(x \cap [\tilde{X}, L])) \\ & = y \cap \sigma_{0*} \circ \Phi_{\tilde{X}}(x) \end{array}$$
d'où l'égalité.

La classe de Thom u_E appartient à $H^r(D,S)$. Pour tout entier q, on a
$$JH^r_q(D/S, \partial D/S) = H^r(D,S).$$
Donc la classe de Thom est une classe de J-cohomologie pour tout les q. Il est donc naturel de définir la classe de Thom u_E de E par
$$u_E = \sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}) \in JH^r_q(D/S, \partial D/S) = H^r(D,S).$$
Théorème VI.2.1. *La classe de Thom u_E induit un isomorphisme de Thom*
$$\begin{array}{cccc} t_E : JH^j_q(\tilde{X}, L) & \to & JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) \\ y & \longrightarrow & u_E.\pi^*(y) \end{array}$$
qui a comme inverse
$$\begin{array}{cccc} t'_E : JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) & \to & JH^j_q(\tilde{X}, L) \\ y & \longrightarrow & \pi_!(y) \end{array}$$
Preuve du Théorème
Tout d'abord on démontre que t_E est bien définie.
On a 3 cas à considérer :

cas 1 : $j \leq N - q_N - 2 = p$
$JH^j_q(\tilde{X}, L) = H^j(\tilde{X})$ i.e $\pi^*(x) \in H^j(D)$ et $JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) = H^{j+r}(D,S)$.
Alors pour $x \in JH^j_q(\tilde{X}, L) = H^j(\tilde{X})$ on a
$$\pi^*(x).u_E \in H^{j+r}(D,S) = JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S)$$
cas 2 : $j \geq p + 2$
$JH^j_q(\tilde{X}, L) = H^j(\tilde{X}, L)$ i.e $\pi^*(x) \in H^j(D, D|_L)$ et $JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S) = H^{j+r}(D, \partial D)$
Alors pour $x \in JH^j_q(\tilde{X}, L) = H^j(\tilde{X}, L)$ on a
$$\pi^*(x).u_E \in H^{j+r}(D, \partial D) = JH^{j+r}_q(D/S, \partial D/S)$$

cas 3 : $j = p + 1$
$JH_q^j(\tilde{X}, L) = \mathrm{Im}(H^j(\tilde{X}, L) \to H^j(\tilde{X}))$ et
$JH_q^{j+r}(D/S, \partial D/S) = \mathrm{Im}(H^{j+r}(D, \partial D) \to H^{k+r}(D, S))$
d'après le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{j-1}(L) \arrow[r] \arrow[d] & H^j(\tilde{X}, L) \arrow[r] \arrow[d] & H^j(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^j(L) \arrow[d] \\
H^{j+r-1}(D|_L, S|_L) \arrow[r] & H^{j+r}(D, \partial D) \arrow[r] & H^{j+r}(D, S) \arrow[r] & H^{j+r}(D|_L, S|_L)
\end{tikzcd}$$

Pour $x \in JH_q^j(\tilde{X}, L) = \mathrm{Im}(H^j(\tilde{X}, L) \to H^j(\tilde{X}))$ on aura que
$\pi^*(x).u_E \in \mathrm{Im}(H^{j+r}(D, \partial D) \to H^{j+r}(D, S)) = JH_q^{j+r}(D/\partial D)$.
La fonction t'_E est de la forme $g_!$ avec $g = \pi$ donc bien définie.

Il nous reste à démontrer que t_E et t'_E sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'il faut démontrer que $t'_E \circ t_E \sim id_{JH_q^j(\tilde{X},L)}$ et $t_E \circ t'_E \sim id_{JH_q^{j+r}(D/S,\partial D/S)}$

Soit $y \in JH_q^j(\tilde{X}, L)$ alors

$$\begin{aligned} t'_E \circ t_E(y) = \pi_!(u_E.\pi^*(y)) &= \pi_!(\sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}).\pi^*(y) = \pi_!(\sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}.\sigma_0{}^*(\pi^*(y))) \\ &= \pi_!(\sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}.(\pi \circ \sigma_0)^*(y))) = (\pi \circ \sigma_0)_!(y) = y. \end{aligned}$$

Soit $y \in JH_q^{j+r}(D/S, \partial D/S)$ alors

$$\begin{aligned} t_E \circ t'_E(y) = u_E.\pi^*(\pi_!(y)) &= \sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}).\pi^*(\pi_!(y)) = \sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}.\sigma_0{}^*(\pi^*(\pi_!(y)))) \\ &= \sigma_{0!}(1_{\tilde{X}}.(\pi \circ \sigma_0)^*(\pi_!(y))) = \sigma_{0!}(\pi_!(y)) = (\sigma_0 \circ \pi)_!(y) \sim y. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Atiyah M. F., *Global theory of elliptic operators*, Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics Univ. of Tokyo Press, Tokyo (1969), 21-30.

[2] Atiyah M. F. and Singer I. M., *The index of elliptic operators. I*, Ann. of Math. (2) 87 (1968), 484-530.

[3] Atiyah M. F., Patodi V. K. and Singer I. M., *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975), 43-69.

[4] Baum P. and Douglas R., *K-homology and index theory*, Proceedings of symposia in pure mathematics, 38 Part 1 (1982), 117 - 173.

[5] Brasselet J.-P., *Homologie d'intersection : Définitions singulière et simpliciale*, Ecole Polytechnique, Centre de mathématiques, Journées singulières (1984-1985), 1-23.

[6] Bredon G. E., *Topology and geometry*, Berlin, New York, Springer (1993).

[7] Browder W., *Surgery on simply-connected manifolds*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, (1972).

[8] Cheeger J., *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Geometry of the Laplace operator, Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, (1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1980), 91-146.

[9] Cheeger J., *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. 18 no. 4 (1983), 575-657.

[10] Conner P. and Floyd E., *Differential periodic maps*, Springer, Ergebnisse, 33, Berlin, (1964).

[11] Dold A., *Lectures on algebraic topology*, Springer, Reprint, Berlin, Heidelberg, (1995).

[12] Douady A., *Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires*, Séminaire Henri Cartan, tome 14, exp.1, (1961-1962).

[13] Douady A., *Théorèmes d'isotopie et de recollement*, Séminaire Henri Cartan, tome 14, exp.2, (1961-1962).

[14] Dyer E., *Cohomology theories*, Benjamin, New York, (1969).

[15] Goresky M. and MacPherson R., *Intersection homology theory*,Topology, 19, (1980), 135-162.

[16] Goresky M. et MacPherson R., *La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers*, CR, Acad.Sci, t 284, Serie A, (1977), 1549-1551.

[17] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, (2002).

[18] Hirsch M., *Differential topology*, Springer, Reprint, New York, (1994).

[19] Hirzebruch M., *Topological methods in algebraic geometry*, Springer, Reprint, New York, (1995).

[20] Husemoller D., *Fibre bundles*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics (1996).

[21] Jakob M., *A bordism-type description of homology*, Manuscripta math, 96, (1998), 67-80.

[22] Jakob M., *An alternative approach to homology*, Contemporary Mathematics, volume 265, (2000), 87-97.

[23] Jakob M., *A note on the Thom isomorphism in geometric (co)homology*, (2006).

[24] Legrand A. et Poutriquet D., *K-théorie pour les singularités coniques isolées*, C.R. Acad. Paris, Ser. I, 341 (2005).

[25] Orlik P., *Seifert manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 291, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

[26] Poutriquet D., *K-théorie des singularités coniques isolées*, Thèse de l'Université Paul Sabatier Toulouse 3 (2006).

[27] Spanier E.H., *Algebraic topology*, New York, Springer-Verlag (1966).

[28] Stong R., *Notes on cobordism theory*, Princeton University Press, Mathematical notes, Princeton, (1968).

[29] Switzer R., *Algebraic Topology-Homotopy and Homology*, Springer, Berlin, (1975).

[30] Thom R., *Sur un problème de Steenrod*, C. R. Acad. Sci. Paris 236, (1953). 1128-1130.

[31] Whitehead G.W., *Generalized homology theories*, Trans. Amer. Math. Soc., 10 (1962), 227-282.

RESUME

Dans la première partie, on construit une dualité de Poincaré entière pour les pseudos-variétés à singularités coniques isolées. La dualité de Poincaré n'est pas vraie dans le cadre singulier. En 1980 Goresky et MacPherson introduisent l'homologie d'intersection pour laquelle la dualité de Poincaré rationnelle reste vraie pour les singularités coniques. On modifie leur cohomologie en construisant un complexe non libre, quasi-isomorphe au complexe d'intersection mais dont la cohomologie vérifie la dualité de Poincaré entière.

Dans la deuxième partie, on définit une théorie géométrique de l'homologie d'intersection. Il en résulte que tout cycle d'intersection est représentable par le cap produit de la classe fondamentale d'une variété à bord pour une classe de J-cohomologie de cette variété.

Pour terminer on montre que la J-cohomologie vérifie un isomorphisme de Thom.

MOTS CLES

1. Dualité de Poincaré
2. Homologie d'intersection
3. Singularités coniques isolées
4. Théorie géométrique.

ABSTRACT

In the first part, we construct a Poincaré duality for pseudo-manifolds with isolated conical singularities. The Poincaré duality is not true in the singular case. In 1980, Goresky and Mac Pherson, introduce the intersection homology for which the rational Poincaré duality remains true for conical singularities. We modifie their cohomology by constructing a non free complex, quasi-isomorphic to the intersection complex but whose cohomology verifies the Poincaré duality.

In the second part, we define a geometrical theory of the intersection homology. It results that any intersection cycle can be represented by the cap product of the fundamental class of a manifold with boundary by a class of J-cohomology of this manifold.

To end we show that J-cohomology verifies an isomorphism of Thom.