INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE III

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Charef BEDDANI

Institut de Mathématiques de Toulouse
Équipe Emile PICARD

THÉORÈME DE REES ET COMPARAISON DES VALUATIONS DIVISORIELLES

Soutenue le 18/12/2007, devant le jury composé de :

M. Morales	Professeur, Université de Grenoble I	Rapporteur
M. Lejeune-Jalabert	Directeur de Recherche, Université de Versailles	Examinateur
M. Reversat	Professeur, Université de Toulouse III	Président
M. Spivakovsky	Directeur de Recherche, Université de Toulouse III	Directeur
I. Swanson	Professeur, Université de Portland (Reed College)	Rapporteur

Théorème de Rees

et

comparaison des valuations divisorielles

par

Charef BEDDANI

A mes parents,

à mes soeurs et frères,

à mon Professeur Mark Spivakovsky.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidé ou accompagné dans ce travail de longue haleine.

Je tiens à remercier vivement Mark Spivakovsky pour m'avoir soutenu tout au long de ce travail, pour le temps qu'il m'a accordé et pour ce qu'il m'a appris sur ce sujet. Sa confiance et surtout sa très grande patience devant mes errements mathématiques et moraux m'ont été très précieux.

Je suis très honoré que M. Morales et I. Swanson aient acceptée d'écrire un rapport sur ce travail et de participer au jury. Merci pour les remarques et les suggestions qu'ils m'ont communiquées durant la lecture.

Merci à M. Lejeune-Jalabert et M. Reversat d'avoir accepté avec gentillesse et enthousiasme de faire partie du jury de cette thèse.

Je tiens ainsi particulièrement à remercier : Alain, Camille, François, Ghada, Guillaume, Imane, Jean-Luc, Manu, Mathieu, Ryma et Slimane pour les joyeuses discussions mathématiques et les bons moments passés ensemble. Je dois remercier les amis proches de leur soutien constant et de m'avoir offert des pauses salutaires : Merci à Abderrahime, Abed, Bouba, Chakib, Fatma, Hizia, Houari, Nadji, Senoussi, Soufiane, Ramdane, Wahiba,...

Je termine par un grand remerciement à mes parents auxquels je dédie mon mémoire de thèse.

Table des matières

Introduction

Les valuations divisorielles sont des objets fondamentaux pour l'étude de la résolution des singularités. Elles ont été étudiées par Zariski, Abhyankar, Rees, Swanson et beaucoup d'autres. Plus récemment, une nouvelle approche du problème de résolution des singularités par l'étude des valuations divisorielles a été proposé notamment par M. Spivakovsky (Cf. [**?**]) et B. Teissier (Cf. [**?**]). Ce travail est consacré à l'étude des valuations divisorielles et à leurs comparaisons.

Le premier chapitre sera essentiellement destiné à rappeler les résultats connus et à donner les outils nécessaires à la compréhension de ce travail. Nous rappellerons tout d'abord les définitions d'anneau de valuation, de pseudo-valuation, de valuation divisorielle et de centre d'une valuation. A la fin de ce chapitre, nous présenterons une méthode algébrique qui nous permettra de construire les valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau nœthérien intègre. Nous utiliserons fréquemment le théorème de la dimension (Cf. Théorème 1.3.7) dans les démonstrations de nos résultats annonces dans le deuxième et le troisième chapitre, c'est pourquoi nous rappellerons ce théorème ainsi que sa démonstration.

Dans le deuxième chapitre, nous donnerons une démonstration géométrique du théorème de valuations de Rees (Cf. Théorème 2.1.9) pour les anneaux de Nagata (Cf. Définition 1.2.20), ainsi que pour les anneaux analytiquement irréductibles (Cf. Définition 2.1.11). Notre démonstration de ce théorème est basée sur certains résultats de M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier concernant la clôture intégrale des idéaux et l'équisingularité (Cf. [**?**]).

Notons pour tout idéal I d'un anneau nœthérien R et pour tout x appartenant à R :

$$\nu_I(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in I^n - I^{n+1}, \\ +\infty & \text{si } \forall s \in \mathbb{N}, \quad \text{on a :} \quad x \in I^s. \end{cases}$$

et

$$\overline{v}_I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{v_I(x^n)}{n}.$$

Alors le théorème de valuations de Rees s'énonce comme suit :

Théorème 2.1.9 (Cf. [?]). *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Il existe un nombre fini de valuations $\{v_i\}_{1\le i\le r}$ de R à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que pour tout x non nul appartenant à R :*

$$\overline{v}_I(x) = \min_{1\le i\le r} \frac{v_i(x)}{v_i(I)}.$$

D'une manière générale, le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau R de Nagata ou d'un anneau analytiquement irréductible. Autrement dit, nous donnerons une nouvelle démonstration géométrique du théorème de valuations qui nous permettra de trouver les valuations de Rees en normalisant l'éclatement de Spec R le long de I. Plus précisément, si R est un anneau de Nagata et

$$\pi : Y = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\ge 0} \overline{I^n} \to X = \mathrm{Spec}\ R$$

l'éclatement normalisé de X le long de I, alors toute composante irréductible E_i de

$$V(I\mathcal{O}_Y)_{red} = \bigcup_{i=1}^{r} E_i$$

définit une valuation discrète de $K(R)$. Nous obtenons ainsi r valuations discrètes $v_1, ..., v_r$ de $K(R)$ telles que pour tout x non nul appartenant à R :

$$\overline{v}_I(x) = \min_{1\le i\le r} \frac{v_i(x)}{v_i(I)}.$$

Ainsi, nous démontrerons le résultat suivant :

Théorème 2.1.8. *Soient R un anneau de Nagata intègre et I un idéal de R. Alors il existe un nombre fini de valuations discrètes $v_1, v_2, ..., v_r$ telles que pour tout x non nul appartenant à R :*

$$\overline{v}_I(x) = \min_{1\le i\le r} \frac{v_i(x)}{v_i(I)}.$$

De plus, si l'anneau R est universellement caténaire, les valuations $v_1, v_2, ..., v_r$ sont divisorielles. C'est-à-dire, pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$:

$$\text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{p}_i)} k_{v_i} = \text{ht}\ \mathfrak{p}_i - 1,$$

où k_{v_i} est le corps résiduel de v_i et $\mathfrak{p}_i$ est le centre de v_i dans l'anneau R.

Sachant que le complété d'un anneau local nœthérien analytiquement irréductible est un anneau de Nagata intègre, nous en déduirons le théorème suivant :

Théorème 2.1.12. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien intègre analytiquement irréductible et I un idéal de R. Alors il existe un nombre fini de valuations discrètes $v_1, v_2, ..., v_r$ telles que pour tout x non nul appartenant à R :*

$$\overline{v}_I(x) = \min_{1 \le i \le r} \frac{v_i(x)}{v_i(I)}.$$

Dans le troisième chapitre, nous appliquerons le théorème des valuations de Rees à l'étude des idéaux normaux. Nous montrerons que si I est un idéal d'un anneau nœthérien R tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout $x \in R$, on a :

$$x^2 \in I^{2n+1} \Rightarrow x \in I^{n+1},$$

alors I est normal.

Ensuite, nous montrerons que si toutes les valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau nœthérien sont linéairement comparables (Cf. Définition 3.3.11), alors $\sqrt{I}$ est forcément un idéal premier. Cela signifie que tout idéal I, dont le radical n'est pas premier, admet au moins deux valuations de Rees non linéairement comparables.

Nous démontrerons aussi dans le troisième chapitre le résultat suivant :

Proposition 3.4.5. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier normal d'un anneau nœthérien intègre. Alors $R_{\mathfrak{p}}$ est analytiquement irréductible, si et seulement si, pour toutes valuations divisorielles v_1, v_2 de $K(R)$ centrées en $\mathfrak{p}$, il existe un entier naturel $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout x appartenant à R :*

$$v_1(x) \leq r v_2(x).$$

Ces résultats montrent que les valuations de Rees associées à un idéal I sont indispensables dans l'étude de certaines propriétés de l'idéal I.

En appliquant le théorème de valuations de Rees (Cf. Théorème 2.1.9) à l'étude de la clôture intégrale des idéaux, nous montrerons le résultat suivant :

Proposition 3.1.6. *Soit I un idéal d'un anneau nœthérien R, tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$:*

$$x^2 \in I^{2n+1} \Rightarrow x \in I^{n+1}.$$

Alors I est normal.

Nous montrerons que la réciproque est vraie (Cf. Proposition 3.1.7) dans le cas où pour toute valuation v de Rees associée à I, $v(I) = 1$. De manière analogue et toujours dans le cas où pour toute valuation de Rees v associée à I, $v(I) = 1$, nous donnerons un autre critère permettant de savoir si l'idéal I est intégralement clos ou non. Ce critère s'énonce comme suit :

Proposition 3.1.8. *Soit I un idéal d'un anneau nœthérien R, tel que pour toute valuation de Rees v associée à I, $v(I) = 1$. Alors I est intégralement clos, si et seulement si, pour tout $x \in R$:*

$$x^2 \in I \Longrightarrow x \in I.$$

Par ailleurs, nous présenterons des résultats diverses concernant la question de Hübl et Swanson (Cf. Question 1).

Question 1. Soient R un anneau nœthérien analytiquement irréductible et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R. Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tous x et y de R : $xy \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$ ou $y \in I^n$ (en particulier, pour tout x de R : $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$). L'idéal I est-il normal ?

Nous donnerons un cas particulier d'idéaux pour lesquels cette question a une réponse affirmative. Plus précisément, nous démontrerons le résultat suivant :

Proposition 3.2.3. Soient I un idéal d'un anneau nœthérien R. Considérons les conditions suivantes :
(a) $\forall x \in R$, on a : $v_I(x) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow v_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$.
(b) $\forall x \in R$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$.
(c) I est normal.

Alors : $(a) \wedge (b) \Longrightarrow (c)$. De plus, si pour toute valuation de Rees v_i associée à I, $v_i(I) = 1$, alors la réciproque est vraie (ie. $(c) \Longrightarrow (a) \wedge (b)$).

Ensuite, nous démontrerons le résultat principal de ce chapitre (Cf. Théorème 3.3.7) qui sert à majorer le nombre de valuations de Rees associées à un idéal vérifiant la propriété (Z_k) (Cf. Définition 3.3.1). Cette propriété est définie comme suit :

Définition 3.3.1. Soient I un idéal d'un anneau nœthérien R et k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Nous disons que I possède la propriété (Z_k), s'il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n.$$

Ensuite, nous présenterons plusieurs résultats liés à cette propriété (Cf. Proposition 3.3.2, Proposition 3.3.3, Proposition 3.3.8, ...), et montrerons le lemme suivant qui resemble à un résultat assez connu de Rees (Cf. [**?**]) :

Lemme 3.3.4. *Si I possède la propriété (Z_k), alors il existe un entier naturel $l \geq 0$, tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$:*

$$\overline{I^{n+l}} \subseteq I^n.$$

Le résultat principal de troisième chapitre s'énonce comme suit :

Théorème 3.3.7. Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien, k un entier naturel supérieur ou égal à 2, et I un idéal de R qui possède la propriété (Z_k). Alors I a au plus $(k-1)$ valuations de Rees associées.

A l'aide de ce théorème, nous déduirons une généralisation du critère "One-fiberedness" (Cf. [**?**], Corollaire 3.3.8). Plus précisément, nous montrerons le résultat suivant :

Corollaire 3.3.8. *Soient R un anneau local analytiquement non-ramifié et I un idéal de R. Alors I possède la propriété (Z_2), si et seulement si, I a exactement une seule valuation de Rees associée.*

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéresserons à l'étude des valuations divisorielles. Nous présenterons dans une première section quelques résultats élémentaires concernant les valuations divisorielles avec leurs démonstrations. Nous donnerons dans une deuxième section une nouvelle démonstration du théorème d'Izumi (Cf. [**? ?**]) dans les deux cas suivants :

> **Cas (I) :** R est de dimension quelconque et les extensions de ν_1, ν_2 dans le corps de fractions de $\widehat{R}$ sont liées en codimension 1 (Cf. Définition 5.2.3).
>
> **Cas (II) :** R est de dimension inférieure ou égale à 2 et ν_1, ν_2 sont deux valuations divisorielles quelconques.

La démonstration du théorème d'izumi, que nous allons donner dans ce chapitre avec des quelques hypothèse minimales, est différente de celles connues auparavant (Cf. [**? ? ?**]). Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 4.1.4 (Théorème d'Izumi, Cf. [**? ?**]). *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local nœthérien analytiquement irréductible. Alors pour toutes valuations divisorielles* ν_1, ν_2 *centrées en* $\mathfrak{m}$*, il existe* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* x *non nul appartenant à* R *:*

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x).$$

Toutes les démonstrations connues auparavant du théorème d'Izumi en dimension deux sont basées sur le fait que la matrice $M = (E_i.E_j)_{1 \leq i,j \leq s}$ est définie négative. En dimension supérieure où égale à trois, la matrice d'intersection n'a pas de sense. Pour cette raison, D. Rees utilise une démonstration par récurrence sur la dimension de R (Cf. [**?**]) quand la dimension de R est supérieure ou égale à trois. La démonstration qu'on donne dans cette thèse sous quelques hypothèses est directe en dimension quelconque (sans récurrence sur la dimension de R). Nous trouvons un remplacement géométrique en dimension supérieure pour la négativité de la matrice M qui est un phénomène spécifique en dimension deux. D'une manière précise et suivant les définitions introduites dans ce chapitre, nous montrerons les résultats suivants :

Proposition 4.2.9. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata local intègre et* ν_1*,* ν_2 *deux valuation divisorielles de* $K(R)$ *centrées en* $\mathfrak{m}$*. Si* ν_1 *et* ν_2 *sont liées en codimension 1, alors leurs extensions* $\widehat{\nu_1}$ *et* $\widehat{\nu_2}$ *dans* $\widehat{R}$ [1]*sont aussi liées en codimension 1.*

Théorème 4.2.11.[2] *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata local nœthérien analytiquement irréductible et* ν_1, ν_2 *deux valuations divisorielles centrées dans* R *en* $\mathfrak{m}$*. Si* $\widehat{\nu_1}$ *et* $\widehat{\nu_2}$ *sont liées en codimension 1, alors il existe un entier naturel* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* x *non nul appartenant à* R *:*

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x).$$

Dans le cinquième chapitre, nous donnerons plus de détailles sur les définitions que nous avons introduit dans notre approche géométrique du théorème d'Izumi :

Définition 5.2.1. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata local intègre et* I *un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire de* R*. Notons* $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ *l'éclatement normalisé de* $\operatorname{Spec} R$ *le long de* I*, et* $E_I = V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I})_{red}$*. Deux composantes irréductibles* E_1, E_2 *de* E_I *sont liées en codimension 1, s'il existe une suite finie*

$$Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

[1] *Nous rappelons que si* $(R, \mathfrak{m})$ *est un anneau local nœthérien analytiquement irréductible et* $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ *est le complété* $\mathfrak{m}$*-adique de* R*, alors pour toute valuation divisorielle* ν *de* R *centrée en* $\mathfrak{m}$*, il existe une seule valuation divisorielle* $\widehat{\nu}$ *de* $\widehat{R}$ *centrée en* $\widehat{\mathfrak{m}}$ *telle que pour tout* $x \in R$*, on a* $\widehat{\nu}(x) = \nu(x)$ *(Cf. Lemme 3.4.1).*

[2] *Ce résultat est un cas particulier de théorème d'Izumi, il reste vrai si on ôte la condition "*$\widehat{\nu_1}$ *et* $\widehat{\nu_2}$ *sont liées en codimension 1"*

de composantes irréductibles de E_I telles que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, on a :

$$\mathrm{codim}(Y_i \cap Y_{i+1}, Y_{i+1}) = 1.$$

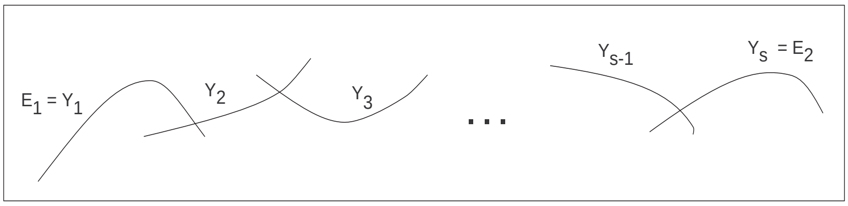

FIG. 1 –

Définition 5.2.3. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau de Nagata local intègre, et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles de $K(R)$ centrées dans R en $\mathfrak{m}$. Nous disons que les valuations ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1, s'il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que le centre de ν_1 et le centre de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont deux composantes irréductibles de E_I liés en codimension 1.*

Rappelons que le théorème d'Izumi est toujours vrai sans ajouter la condition "$\widehat{\nu_1}$ et $\widehat{\nu_2}$ sont liées en codimension 1". C'est la raison pour laquelle nous étudierons les deux questions suivantes :

1. Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, intègre, normal et complet. Pour toutes valuations divisorielles ν_1, ν_2 de R centrées en $\mathfrak{m}$, existe-t-il un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1 ?
2. Soient X un schéma intègre et normal et x un point de X tel que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est analytiquement irréductible. Le cône tangent $C_{X,x}$ de X en x est-il connexe en codimension 1 (Cf. Définition 5.1.1) ?

A l'aide du théorème principal de Zariski (Cf. [**?**]), nous démontrerons que la première question a une réponse positive si la dimension de X est inférieure ou égale à 2, (Cf. Proposition 5.3.1). Puis nous montrerons, quelque soit la dimension de X, si la deuxième question a une réponse affirmative, alors il en sera de même pour la première. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 5.3.4. *Supposons que pour tout schéma Y intègre et normal, et pour tout point y de Y tel que l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est analytiquement irréductible, le cône tangent $C_{Y,y}$ est connexe en codimension 1. Alors pour tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles centrées en $\mathfrak{m}$ d'un anneau $(R, \mathfrak{m})$ intègre, normal et complet, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire*

I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X_I}$ sont liés en codimension 1.

Enfin, nous étudierons le lien entre la première question et la résolution des singularités plongée : Prenons I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire d'un anneau nœthérien local $(R, \mathfrak{m})$ à singularité isolée, tel que le schéma $\overline{X_I}$ admette une résolution des singularités plongée, c'est-à-dire, que pour tout sous-schéma fermé E de $\overline{X_I}$, il existe une résolution de singularités $\pi : Y \longrightarrow \overline{X_I}$ pour laquelle $\pi^{-1}(E)$ est un diviseur à croisements normaux. Nous montrerons que pour tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles de Rees associées à I, ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous donnons un rappel sur les valuations et leurs propriétés. En particulier, nous rappelons les définitions concernant les valuations divisorielles et les valuations de Rees, et ainsi le théorème da la dimension, car cela nous permettra de bien présenter nos résultats annoncés dans les chapitres qui suivent.

1.1 Anneaux de valuation

Soient $(R_1, \mathfrak{m}_1)$ et $(R_2, \mathfrak{m}_2)$ deux anneaux locaux. On dit que R_2 domine R_1 si $R_1 \subset R_2$ et $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 \cap R_1$. La relation "$R_2$ domine R_1" est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des anneaux locaux. Si $(R_1, \mathfrak{m}_1)$ domine $(R_2, \mathfrak{m}_2)$ alors l'injection $R_1 \subset R_2$ définit un isomorphisme du corps résiduel $k(\mathfrak{m}_1)$ de R_1 sur un sous-corps du corps résiduel $k(\mathfrak{m}_2)$ de R_2.

Définition 1.1.1. *Soit $(V, \mathfrak{m}_V)$ un anneau intègre local et K son corps de fractions. L'anneau V est dit anneau de valuation de K si V est un élément maximal de l'ensemble des sous-anneaux locaux de K ordonné par la relation de domination. Autrement dit, si W est un sous-anneau local de K qui domine V, alors $W = V$.*

Théorème 1.1.2 (Cf. [**?**]). *Soient R_1 et R_2 deux anneaux avec $R_1 \subseteq R_2$ et R_2 entier sur R_1. Alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R_1 il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de R_2 tel que $\mathfrak{q} \cap R_1 = \mathfrak{p}$.*

Théorème 1.1.3 (Cf. [**?**]). *Soit V un anneau intègre contenu dans un corps K. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *V est un anneau de valuation de K.*
2) *Pour tout $x \in K$, si x n'appartient à V, alors son inverse x^{-1} appartient à V.*

3) *K est le corps de fractions de V et l'ensemble des idéaux de V est totalement ordonné par la relation d'inclusion.*

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit x un élément non nul de K, nous allons montrer que x ou x^{-1} appartient à V. Nous distinguons deux cas :
Cas 1 : x est entier sur V. Nous considérons l'anneau $W = V[x]$. Comme cet anneau est entier sur V, il existe d'après le théorème précédent un idéal $\mathfrak{q}$ de V tel que $\mathfrak{q} \cap V = \mathfrak{m}_V$. L'anneau $W_\mathfrak{q}$ domine V, donc $W = V$ et x appartient à l'anneau V.
Cas 2 : x n'est pas entier sur V. Nous considérons l'anneau $W = V[x^{-1}]$. Le fait que x n'est pas entier sur V entraîne que x^{-1} n'est pas inversible de l'anneau W : En effet, toute relation de la forme $x^{-1}w = 1$ avec $w = a_0 + a_1x^{-1} + ... + a_n(x^{-1})^n \in W$ donnerait une relation de dépendance intégrale de x sur V :

$$a_n(x^{-1})^{n+1} + a_{n-1}(x^{-1})^n + ... + a_0x^{-1} - 1 = 0.$$

Par conséquent, il existe un idéal maximal $\mathfrak{q}$ de W contenant x^{-1}. Soit $V' = W_\mathfrak{q}$. Comme x^{-1} appartient à $\mathfrak{q}$, le morphisme composé : $V \longrightarrow W \longrightarrow W/\mathfrak{q}$ est surjectif, et son noyau $\mathfrak{q} \cap V$ est l'ideal maximal $\mathfrak{m}_V$ de V. Nous en déduisons que V' est un sous anneau de K qui domine V, donc $V = V'$ et x^{-1} appartient à V.
2) $\Longrightarrow$ 3) : Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de V. Supposons que $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{a}$, alors il existe un élément $b \in \mathfrak{b}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{a}$. Par suite, pour tout élément non nul a de $\mathfrak{a}$, on a $b \notin aV$. Par conséquent, b/a est un élément de K n'appartenant pas à l'anneau V et nous en déduisons que a/b appartient à V, c'est-à-dire $a \in bV$. D'où $a \in \mathfrak{b}$. On a ainsi montré que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ et il est bien clair que K est le corps de fractions de V.
3) $\Longrightarrow$ 1) : Comme l'ensemble des idéaux de V est totalement ordonné par l'inclusion, V possède un unique idéal maximal $\mathfrak{m}_V$. Soit $(W, \mathfrak{m}_W)$ un sous-anneau local de K qui domine $(V, \mathfrak{m}_V)$ et soit x un élément de W. Nous allons montrer que x appartient aussi à V. Nous pouvons écrire x sous la forme $x = a/b$ avec a, b deux éléments de V. Si $aV \subset bV$, alors x appartient à V, et si $bV \subset aV$, alors x^{-1} appartient à V, nous en déduisons que x et x^{-1} appartiennent tous les deux à W, d'où $x^{-1} \notin \mathfrak{m}_W$ et $x^{-1} \notin \mathfrak{m}_V$ car W domine V. L'élément x^{-1} de K vérifie alors $x^{-1} \in V$ et $x^{-1} \notin \mathfrak{m}_V$, par conséquent x appartient à V car V est local. □

Exemple 1.1.4. Soit X un schéma normal. Pour tout sous-schéma fermé E de X de codimension 1, l'anneau $\mathcal{O}_{X,E}$ est un anneau de valuation de $K(X)$. En particulier si R est un anneau normal, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur 1, l'anneau $R_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation de $K(R)$.

1.2 Rappel sur les valuations

Dans la suite $(\Gamma, \geq)$ est un groupe commutatif totalement ordonné. Nous adjoignons au groupe Γ un élément $+\infty$ et nous appelons Γ_∞ l'ensemble ainsi obtenu : $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{+\infty\}$. Nous munissons cet ensemble d'une relation d'ordre total en posant :

$$\forall \alpha \in \Gamma : \alpha \leq +\infty \text{ et } (+\infty) + \alpha = \alpha + (+\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

1.2.1 Pseudo-valuations

Définition 1.2.1. *Soit R un anneau. Nous appelons pseudo-valuation de R à valeurs dans Γ toute application $v : R \longrightarrow \Gamma_\infty$ vérifiant les trois conditions suivantes :*
1) $v(0) = +\infty$ *et* $v(1) = 0$
2) $\forall (x, y) \in R \times R,$ *on a :* $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.
3) $\forall (x, y) \in R \times R,$ *on a :* $v(xy) \geq v(x) + v(y)$.

Proposition 1.2.2. *Soit R un anneau et v une pseudo-valuation de R à valeurs dans Γ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(H_1) $\forall x \in R,$ *on a :* $v(x^2) = 2v(x)$
(H_2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R,$ *on a :* $v(x^n) = nv(x)$

Démonstration. L'implication $(H_2) \Longrightarrow (H_1)$ est triviale. Supposons que pour tout x appartenant à R, on a $v(x^2) = 2v(x)$. Soit n un entier naturel, d'après la condition 3) de la définition d'une pseudo-valuation, on obtient $v(x^n) \geq nv(x)$. Soit k un entier naturel tel que $n < 2^k$. Alors la condition (H_1) donne

$$v(x^{2^k}) = 2^k v(x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} v(x^{2^k}) &= v(x^{2^k - n} x^n) \\ &\geq v(x^{2^k - n}) + v(x^n) \\ &\geq (2^k - n)v(x) + v(x^n). \end{aligned}$$

Ce qui donne $v(x^n) \leq nv(x) + v(x^{2^k}) - 2^k v(x) = nv(x)$. Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $v(x^n) = nv(x)$. □

Définition 1.2.3. *Une pseudo-valuation qui vérifie l'une des deux conditions précédentes (H_1 ou H_2) est appelée homogène.*

Le lemme et le théorème suivants sont des cas particuliers donnés par D. Rees d'un résultat assez général de P. Cohn.

Lemme 1.2.4. *Soit v une pseudo-valuation d'un anneau R. Alors pour tout $x \in R$ la limite de $\frac{v(x^n)}{n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ existe en tant qu'un élément de $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.*

Démonstration. Fixons x un élément de R et notons $a_n = \frac{v(x^n)}{n}$ pour tout entier naturel n non nul. Donc d'après la condition 3), on peut montrer que pour tous $l, s \in \mathbb{N}$:

$$a_{s+l} \geq \frac{sa_s + la_l}{s+l}.$$

Soit $a = \limsup a_n$ la limite supérieure de la suite (a_n) et soit b un nombre réel strictement inférieur à a, alors il existe un entier m tel que $a_m > b$. Maintenant soit n un entier non nul. On peut écrire n sous la forme $n = qm + r$, où $0 \leq r < m$, donc comme $a_{qm} \geq a_m$,

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{qma_m + ra_r}{qm + r} \\ &> \frac{qmb}{qm+r} + \frac{ra_r}{qm+r}. \end{aligned}$$

Par suite, $a_n > b$ pour tout n suffisamment grand. Donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = a.$$

□

Théorème 1.2.5. *Soit v une pseudo-valuation d'un anneau R. L'application $\overline{v}$ de R dans Γ définie par*

$$\overline{v}(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{v(x^n)}{n}$$

est une pseudo-valuation homogène.

Démonstration. Il est clair que $\overline{v}(0) = +\infty$ et $\overline{v}(1) = 0$. Soient x, y deux éléments de R. Sachant que v est une pseudo-valuation, on obtient :

$$v((x+y)^n) \geq \min_{0 \leq r \leq n} v(x^r y^{n-r}).$$

Soit $r(n)$ la plus petite valeur de r pour laquelle $v(x^r y^{n-r})$ est minimal. On a :

$$0 \leq \frac{r(n)}{n} \leq 1.$$

Posons :

$$\alpha = \liminf \frac{r(n)}{n} \quad \text{et} \quad \beta = \limsup \frac{r(n)}{n}.$$

On a clairement :

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1. \tag{1.2.1}$$

Montrons que :

$$\max\left(\alpha\overline{\nu}(x) + (1-\alpha)\overline{\nu}(y), \beta\overline{\nu}(x) + (1-\beta)\overline{\nu}(y)\right) \geq \min\left(\overline{\nu}(x), \overline{\nu}(y)\right). \tag{1.2.2}$$

Si $\overline{\nu}(y) \geq \overline{\nu}(x)$, alors d'après (1.2.1), on obtient :

$$\begin{cases} \alpha\overline{\nu}(x) + (1-\alpha)\overline{\nu}(y) \geq \overline{\nu}(x) \\ \beta\overline{\nu}(x) + (1-\beta)\overline{\nu}(y) \geq \overline{\nu}(x) \end{cases}$$

De même, si $\overline{\nu}(x) \geq \overline{\nu}(y)$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha\overline{\nu}(x) + (1-\alpha)\overline{\nu}(y) \geq \overline{\nu}(y) \\ \beta\overline{\nu}(x) + (1-\beta)\overline{\nu}(y) \geq \overline{\nu}(y) \end{cases}$$

Donc dans les deux cas, on a bien l'égalité (1.2.2).

Pour tout entier naturel n, on a :

$$(r(n) = 0) \vee (r(n) = n) \vee (0 < r(n) < n).$$

On peut décomposer $\mathbb{N}$ comme une reunion de trois ensembles disjoint deux à deux : A_1, A_2 et A_3, où

$$A_1 = \{n \mid r(n) = 0\},$$

$$A_2 = \{n \mid r(n) = n\},$$

et

$$A_3 = \{n \mid 0 < r(n) < n\}.$$

Donc nous distinguons trois cas :
<u>Cas 1 :</u> Si l'ensemble A_1 est infini, on a :

$$\limsup_{n\in A_1} \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} = \overline{\nu}(y).$$

Par définition de $r(n)$, on trouve que $\forall n \in A_1,\ \ \nu(x^n) \geq \nu(y^n)$. Donc

$$\overline{\nu}(x) \geq \overline{\nu}(y).$$

Ce qui donne

$$\limsup_{n\in A_1} \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} \geq \min(\overline{\nu}(x), \overline{\nu}(y)).$$

Cas 2 : Si l'ensemble A_2 est infini, on peut montrer que :

$$\limsup_{n\in A_2} \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} = \overline{\nu}(x).$$

Par définition de $r(n)$, on trouve que $\forall n \in A_2,\ \ \nu(y^n) \geq \nu(x^n)$. Donc

$$\overline{\nu}(y) \geq \overline{\nu}(x).$$

Ce qui donne

$$\limsup_{n\in A_2} \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} \geq \min(\overline{\nu}(x), \overline{\nu}(y)).$$

Cas 3 : Si l'ensemble A_3 est infini, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(x+y) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\nu(x+y)^n}{n} \\
&\geq \limsup \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} \\
&\geq \limsup_{n\in A_3} \Big[\frac{\nu(x^{r(n)})}{r(n)}\frac{r(n)}{n} + \frac{\nu(y^{n-r(n)})}{n-r(n)}\frac{n-r(n)}{n}\Big] \\
&\geq \max(\alpha\overline{\nu}(x) + (1-\alpha)\overline{\nu}(y), \beta\overline{\nu}(x) + (1-\beta)\overline{\nu}(y)) \\
&\geq \min(\overline{\nu}(x), \overline{\nu}(y)), \quad \text{(Cf. 1.2.2).}
\end{aligned}$$

Soit $S = \{i \in 1,2,3 \mid A_i \text{ est infini }\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\in N} \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} &= \limsup_{n\in\cup_{i\in S}A_i} \frac{\nu(x^{r(n)}y^{n-r(n)})}{n} \\
&\geq \min\{\overline{\nu}(x), \overline{\nu}(y)\}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(xy) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\nu((xy)^n)}{n} \\
&\geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \Big(\frac{\nu(x^n)}{n} + \frac{\nu(y^n)}{n}\Big) \\
&\geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\nu(x^n)}{n} + \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\nu(y^n)}{n} \\
&\geq \overline{\nu}(x) + \overline{\nu}(y).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\overline{\nu}(x^2) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2\nu(x^{2n})}{2n} = 2\overline{\nu}(x).$$

□

1.2.2 Valuations

Définition 1.2.6. *Soit R un anneau, nous appelons valuation de R à valeurs dans Γ, toute pseudo-valuation v de R à valeurs dans Γ telle que pour tout x et y de R :*

$$v(xy) = v(x) + v(y).$$

Remarque 1.2.7. *Si R est intègre et K son corps de fractions, alors l'extension de v à K définie par*

$$\forall x \in R, \forall y \in R - \{0\} \quad : \quad v(x/y) = v(x) - v(y)$$

est une valuation de K à valeurs dans Γ.

Exemple 1.2.8. Soient k un corps, $R = k(X, Y)$ le corps des fonctions rationnelles de $k[X, Y]$, et $\Gamma = \mathbb{Z}[\pi] = \{n + m\pi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$. L'application v de $K(X, Y) \setminus \{0\}$ dans Γ définie par

$$\forall f = \sum C_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in k(X, Y) \quad : \quad v(f) = \min\{\alpha + \pi\beta \mid C_{\alpha\beta} \neq 0\}$$

est une valuation à valeurs dans Γ. Cette valuation est uniquement déterminée par la donnée de $v(X)$ et de $v(Y)$ parce que $v(X)$ et $v(Y)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement independents.

Proposition 1.2.9. *Soit v une valuation d'un corps K à valeurs dans Γ, alors l'ensemble $R_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ est un anneau de valuation de K, dont l'idéal maximal est l'ensemble $\mathfrak{m}_v = \{x \in R_v \mid v(x) > 0\}$. Réciproquement, si V est un anneau de valuation de K, alors il existe une valuation v de K à valeurs dans un groupe Γ telle que $V = R_v$.*

Démonstration. Nous déduisons des axiomes d'une valuation que l'ensemble R_v est un sous-anneau de K et nous déduisons de la condition 2) du théorème 1.1.3 que c'est un anneau de valuation de K. De plus, comme R_v est local, un élément $x \in K$ vérifie $v(x) = 0$, si et seulement si, $x \notin \mathfrak{m}_v$.
Pour la réciproque, plus généralement, nous considérons un anneau C de corps de fractions K. L'ensemble $U(C)$ des éléments inversibles de C est un sous-groupe du groupe multiplicatif K^* et nous notons Γ_C le groupe quotient $K^*/U(C)$. La relation de divisibilité dans C (ie. $x|y \Leftrightarrow y \in xC$) définit une structure de groupe ordonné sur Γ_C. Plus précisément, si nous notons respectivement $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les classes des éléments x et y de K^* dans le groupe quotient $\Gamma_C = K^*/U(C)$, alors la relation est définie par $\overline{x} \leq \overline{y} \Leftrightarrow \exists z \in C$ tel que $y = zx$. La relation "$\leq$" est bien définie sur l'espace quotient $K^*/U(C)$. En effet la relation $\overline{x} \leq \overline{y}$ ne depend pas des représentants x et y choisis. Cette relation est une relation d'ordre sur le groupe Γ_C, compatible avec la structure de groupe, et qui correspond à la relation d'ordre définie par l'inclusion sur l'ensemble des idéaux principaux de l'anneau C. Nous déduisons

d'après le théorème 1.1.3 que le groupe Γ_C est totalement ordonné, si et seulement si, C est un anneau de valuation. Soit maintenant V un anneau de valuation de K. Comme l'anneau V est local, $U(V) = V - \mathfrak{m}_V$. L'application canonique ν de K^* dans Γ_C est alors une valuation telle que $V = R_\nu$. □

Notation 1.2.10. *Pour tout anneau de valuation R_ν, nous notons $k(\nu) = R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ le corps résiduel de l'anneau R_ν.*

Définition 1.2.11. *Une valuation à valeurs dans Γ est dite discrète si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.*

Exemple 1.2.12. Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R tel que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} I^n = (0).$$

L'application ν_I de R dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$\nu_I(x) = \sup\{n \mid x \in I^n\}$$

est une pseudo-valuation à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On peut montrer facilement que la fonction ν_I est une valuation discrète de R, si et seulement si, l'anneau gradué

$$G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$$

est intègre.

1.2.3 Centre d'une valuation

Soient K un corps et ν une valuation de K. Nous rappelons que R_ν dénote l'anneau de valuations de ν et $\mathfrak{m}_\nu$ son idéal maximal.

Définition 1.2.13. *Soit R un sous-anneau de K sur lequel la valuation ν est positive (ie. $R \subseteq R_\nu$). Le centre de la valuation ν dans R est l'idéal $\mathfrak{p}$ de R défini par $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\nu \cap R$.*

Remarque 1.2.14. *Le centre $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R. Si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local, alors le centre de la valuation ν est l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, si et seulement si, l'anneau R_ν domine R. En général le centre ν est le seul idéal $\mathfrak{p}$ de R pour lequel l'anneau R_ν domine $R_\mathfrak{p}$.*

Remarque 1.2.15. *Pour toute valuation ν de K centrée dans un anneau nœthérien R, nous avons l'extension $k(\mathfrak{p}) \subseteq k(\nu)$, où $\mathfrak{p}$ est le centre de ν dans R. Nous noterons* $\text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{p})} k(\nu)$, *le degré de transcendence de cette extension. Nous rappelons ici une version faible de l'inégalité d'Abhyankar suivante (Cf.[**?**]) :*

$$\text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{p})} k(\nu) \leq \text{ht}\, \mathfrak{p} - 1.$$

Notation 1.2.16. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R, nous notons $N(\mathfrak{p})$ l'ensemble des valuations discrètes de R centrées en $\mathfrak{p}$.*

Théorème 1.2.17 (Cf. [**?**]). *La clôture intégrale $\overline{R}_{\mathfrak{p}}$ de $R_{\mathfrak{p}}$ dans le corps K est égale à l'intersection des anneaux de valuations associés aux valuations de $N(\mathfrak{p})$*

$$\overline{R}_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\nu \in N(\mathfrak{p})} R_{\nu}.$$

Dans la suite, nous allons généraliser la notion de centre d'une valuation à un schéma X, nous supposons que X est irréductible et réduit de corps de fractions $K(X)$, et ν une valuation d'un corps K qui contient $K(X)$.

Proposition 1.2.18. *Le sous-ensemble Z de X formé des points x dont l'anneau $O_{X,x}$ est inclus dans R_ν est un fermé irréductible du X, qui peut être vide.*

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition dans le cas où $X = \operatorname{Spec} R$ est un schéma affine. On peut supposer que $R \subseteq R_\nu$ parce que dans le cas contraire, on a bien $Z = \emptyset$. Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\nu \cap R$, nous allons montrer que

$$Z = V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Prenons d'abord $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$. Pour montrer que $\mathfrak{q} \in Z$, il suffit de montrer que $R_{\mathfrak{q}} \subseteq R_\nu$. Soit $x = a/b \in R_{\mathfrak{q}}$, avec $a \in R$ et $b \in R \setminus \mathfrak{q}$, on a $\nu(a) \geq 0$ et $\nu(b) = 0$, d'où $\nu(x) \geq 0$, donc $x \in R_\nu$.
Réciproquement, si $\mathfrak{q} \in Z$ et $b \in R \setminus \mathfrak{q}$, l'élément $y = 1/b$ appartient à $R_{\mathfrak{q}}$, et comme $R_{\mathfrak{q}} \subset R_\nu$, on a l'inégalité $\nu(y) \geq 0$, d'où $\nu(b) \leq 0$ et $b \in R \setminus \mathfrak{p}$, ce qui prouve que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. □

Si X est un schéma intègre quelconque, il peut arriver que la valuation ν n'ait pas de centre dans X. Mais dans certains cas, nous pouvons affirmer l'existence d'un centre dans X pour toute valuation ν.

Dans la suite, nous présentons le lien entre les valuations et les morphismes séparables, et ainsi que les morphismes propres. Pour plus de détailles sur ce type de morphismes, on envoie le lecteur à voir [**? ?**].

Soient X un schéma intègre, K le corps de fonctions rationnelles sur X, et L une extension de corps de K, et soit ν une valuation de L ait un centre dans X. Rappelons le rôle que jouent les anneaux de valuation dans l'étude locale de morphismes des schémas. C'est-à-dire les critères valuatifs de séparation et de propreté pour tout morphisme de schéma $f : X \longrightarrow Y$. Considérons les diagrammes commutatifs de la forme :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} R_v \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

où i est le morphisme naturel induit par l'inclusion $R_v \subset L$.

A) Critère valuatif de séparation (Cf. [**? ?**]). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schéma, avec X nœthérien. Le morphisme f est séparé, si et seulement si, pour tout anneau de valuation R_v, pour tout couple de morphismes (g, h) de $(i : \operatorname{Spec} L \longrightarrow \operatorname{Spec} R_v)$ dans $(f : X \longrightarrow Y)$, il existe au plus un morphisme $\overline{h} = \operatorname{Spec} R_v \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} R_v \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

B) Critère valuatif de propreté (Cf. [**? ?**]). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schéma de type fini, avec X nœthérien. Le morphisme f est propre, si et seulement si, pour tout anneau de valuation R_v, pour tout couple de morphismes (g, h) de $(i : \operatorname{Spec} L \longrightarrow \operatorname{Spec} R_v)$ dans $(f : X \longrightarrow Y)$, il existe un et un seul morphisme $\overline{h} = \operatorname{Spec} R_v \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} R_v \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

1.2.4 Valuations divisorielles

Soient R un anneau nœthérien intègre, K son corps de fractions et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R, et soit v une valuation discrète de K centrée dans R en $\mathfrak{p}$.

Définition 1.2.19. *La valuation v est appelée divisorielle si elle vérifie l'égalité suivante*

$$\text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{p})}\, k_v = \operatorname{ht} \mathfrak{p} - 1.$$

Définition 1.2.20. *Soient R un anneau intègre et K son corps de fractions. Nous disons que R est N-2 si pour toute extension finie L de K, la clôture intégrale de R dans L est un R-module de type fini.*

Définition 1.2.21. *Un anneau R qui n'est pas forcément intègre, est dit de Nagata (ou universellement japonais) s'il est nœthérien et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, l'anneau $R/\mathfrak{p}$ est N-2.*

Remarque 1.2.22 (Cf. [**?**], Corollaire 2, page 234). *Les anneaux nœthériens locaux complets sont des anneaux de Nagata.*

1.3 Valuations de Rees

Dans cette partie, nous rappelons certains résultats concernant les valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau nœthérien R, et nous précisons leur importance dans l'étude de la clôture intégrale de I. Nous allons voir dans le deuxième chapitre une autre méthode géométrique qui nous permettra de trouver les valuations de Rees associées à I en passant par la normalisation de l'éclatement de Spec R le long de l'idéal I.

1.3.1 Algèbre de Rees

Soient R un anneau, I un idéal de R, et T une indéterminé. Pour tout entier naturel n inférieur ou égal à zero, nous admettons la convention $I^n = R$. L'anneau gradué

$$\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^n T^n = R \oplus IT \oplus I^2T^2 \oplus \ldots \oplus I^nT^n \oplus \ldots$$

est appelé algèbre de Rees associée à l'idéal I, on la note $B(I)$. En général pour tout idéal I d'un anneau R et pour tout R-module M, nous définissons les trois R-modules $G(I, M)$, $B(I, M)$ et $R(I, M)$ par :

$$G(I, M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^nM/I^{n+1}M,$$

$$B(I, M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I^nM)T^n,$$

et

$$R(I, M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (I^nM)T^n.$$

Dans le cas où $M = R$, nous utilisons les notations $G(I)$, $B(I)$ et $R(I)$ au lieu de $G(I, R)$, $B(I, R)$ et $R(I, R)$.

Remarque 1.3.1. *Nous pouvons voir les R-modules $B(I,M)$ et $R(I,M)$ comme des sous-groupes de $M[T,U] = M \otimes_R R[T,U]$ où $U = T^{-1}$, et nous avons :*

$$G(I) \simeq B(I)/IB(I) \simeq R(I)/UR(I)$$

et

$$\forall n \geq 0 : I^n = U^n R(I) \cap R.$$

1.3.2 Construction des valuations de Rees

Dans cette section, nous donnons la définition d'une valuation de Rees associée à un idéal I d'un anneau R nœthérien intègre. Pour plus de détails sur ce type de valuation, nous envoyons le lecteur à [**? ? ?**].

Définition 1.3.2. *Un anneau intègre A est appelé domaine de Krull, s'il vérifie les conditions suivantes :*
1) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de hauteur 1, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation principal.*
2) *Tout idéal principal $(a) \neq (0)$ de A est un intersection finie des idéaux primaires de hauteur 1.*

Notation 1.3.3. *Si $A = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A_i$ est un anneau gradué et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, nous notons*

$$A_{(\mathfrak{p})} = \{x \in A_{\mathfrak{p}} \quad \textit{tel que} \ \deg x = 0\}.$$

Soient R un anneau nœthérien intègre et K son corps de fractions, et soit I un idéal propre de R. Notons :

$$S(I) = \overline{B(I)} = \overline{R} \oplus \overline{I}T \oplus \overline{I^2}T^2 \oplus ... \oplus \overline{I^n}T^n \oplus ...$$

la normalisation de l'anneau $B(I)$. Le fait que $B(I)$ est nœthérien, implique d'après le théorème de Mori-Nagata (Cf. [**?**], Théorème 33.10) que $S(I)$ est un domaine de Krull. Soit

$$IS(I) = Q_1 \cap Q_2 ... \cap Q_s$$

une décomposition primaire de $IS(I)$. Posons pour tout $i = 1, 2, ..., s$: $\mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i}$. On a :

$$\overline{B(I)}/I\overline{B(I)} \cong \overline{B(I)[T^{-1}]}/T^{-1}\overline{B(I)[T^{-1}]}.$$

Ceci implique qu'il existe une correspondance bijective entre les idéaux premiers minimaux de $IS(I)$, et les idéaux premiers minimaux de $T^{-1}\overline{B(I)[T^{-1}]}$. Puisque ce dernier est de hauteur 1, les idéaux $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 ..., \mathfrak{p}_s$ sont aussi de hauteur 1. Par conséquent, les anneaux

$$S(I)_{(\mathfrak{p}_1)}, S(I)_{(\mathfrak{p}_2)}, ..., S(I)_{(\mathfrak{p}_s)}$$

sont des anneaux de valuation discrète. Pour tout $i = 1, 2, \cdots, s$, soit v_i la valuation associée à $S(I)_{(\mathfrak{p}_i)} \cap K$.

Définition 1.3.4. *Les valuations $v_1, ..., v_2$ sont appelées les valuations de Rees associées à l'idéal I.*

1.3.3 Théorème de la dimension

Pour simplifier les démonstrations des résultats annoncés dans les chapitres qui suivent, nous utiliserons fréquemment le théorème de la dimension. C'est pourquoi nous allons donner dans cette section l'énoncé et la démonstration de ce théorème.

Définition 1.3.5. *Un schéma X localement nœthérien est dit caténaire, si et seulement si, pour tout triple de sous-ensemble irréductible fermé $T \subseteq Y \subseteq Z$:*

$$\operatorname{codim}(T, Z) = \operatorname{codim}(T, Y) + \operatorname{codim}(Y, Z).$$

Nous disons que X est universellement caténaire si pour tout entier naturel n, le schéma $\mathbb{A}^n_X$ est caténaire.

Notation 1.3.6. *Si X est un schéma intègre et x un point appartenant à X, nous notons :*
- $K(X)$ *le corps de fonctions rationnelles sur X,*
- $\mathfrak{m}_{X,x}$ *l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$,*
- $k(x)$ *le corps résiduel de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Théorème 1.3.7 (Théorème de la dimension (Cf. [**?**]. Théorème 2.5, Page 333))**.** *Soient X, Y deux schémas intègres localement nœthériens et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dominant localement de type fini. Alors pour tout point $x \in X$, $y = f(x)$:*

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} + \text{deg. tr.}_{k(y)}\, k(x) \leq \dim \mathcal{O}_{Y,y} + \text{deg. tr.}_{K(Y)}\, K(X).$$

De plus, nous avons l'égalité si Y est universellement caténaire.

Démonstration. Comme la propriété qu'on veut démontrer est locale dans X et Y, on peut supposer que $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$, et X est un sous-schéma fermé de $Z = \mathbb{A}^n_Y$. On a :

$$\text{deg. tr.}_{k(y)}\, k(x) = \dim \overline{\{x\}}.$$

Nous allons utiliser la démonstration par récurrence sur n pour montrer le théorème.

Si $n = 0$, alors le morphisme f est un isomorphisme. Dans ce cas il n'y a rien à montrer. Soit ξ le point générique de Y.

Si $n = 1$: On a $\operatorname{codim}(X, Z) \leq 1$ car le fibre X_ξ est de codimension 0 ou 1 dans Z_ξ. Si $\operatorname{codim}(X, Z) = 0$, alors $X = Z$. Si x est un point fermé dans X_y, alors $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{Y,y}$. Autrement dit x est le point générique de $X_y = \mathbb{A}^1_{k(y)}$, par suite deg. tr.$_{k(y)}\, k(x) = 1$. Dans les deux cas on a l'égalité.

Supposons maintenant que $\operatorname{codim}(X, Z) = 1$. Alors X_ξ est aussi de codimension 1 dans $Z_\xi = \mathbb{A}^1_{k(\xi)}$, et donc réduit à un point fermé de Z_ξ.

On vient de voir que

$$\dim \mathcal{O}_{Z,x} + \text{deg. tr.}_{k(y)}\, k(x) = \dim \mathcal{O}_{Y,y} + 1.$$

Remarquons que X et Z ont le même corps résiduel en x. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_Z$ qui définit X, et η le point générique de X. Alors

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}\mathcal{O}_{Z,x}) = \dim\, (\mathcal{O}_{Z,x})_{\mathfrak{p}} = \dim \mathcal{O}_{Z,\eta} = 1$$

Par suite,

$$\dim \mathcal{O}_{Z,x} \geq \dim(\mathcal{O}_{Z,x}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_{Z,x}) + \operatorname{ht} \mathfrak{p}\mathcal{O}_{Z,x} = \dim \mathcal{O}_{X,x} + 1.$$

Ici on a l'égalité si Y est universellement caténaire.

Soit $n \geq 2$. Supposons que le théorème est vrai pour tout sous-schéma fermé intégral de $\mathbb{A}^{n-1}_Y$. Soit $p : Z \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}_Y$ (resp. $q : Z \longrightarrow \mathbb{A}^1_Y$) les projections définies par :

$$p(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \cdots, x_{n-1}),$$

et

$$q(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = x_n$$

pour tout $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ appartenant à Z. Soit W le schéma réduit $(\overline{p(X)})_{red}$. Alors $(p, q) : X \longrightarrow W \times_Y \mathbb{A}^1_Y = \mathbb{A}^1_W$ est une immersion fermée. Le morphisme $f : X \longrightarrow Y$ se décompose en

$$X \longrightarrow W \longrightarrow Y, \quad \text{avec} \quad W \subset \mathbb{A}^{n-1}_Y, X \subset \mathbb{A}^1_W.$$

Soit $w = p(x)$. D'après l'hypothèse de récurrence et le cas $n = 1$, on a :

$$\dim \mathcal{O}_{W,w} + \text{deg. tr.}_{k(y)}\, k(w) \leq \dim \mathcal{O}_{Y,y} + \text{deg. tr.}_{K(Y)}\, K(W),$$

et

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} + \text{deg. tr.}_{k(w)}\, k(x) \leq \dim \mathcal{O}_{W,w} + \text{deg. tr.}_{K(W)}\, K(X).$$

En additionnant ces inégalités, on obtient

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} + \text{deg. tr.}_{k(y)}\, k(x) \leq \dim \mathcal{O}_{Y,y} + \text{deg. tr.}_{K(Y)}\, K(X).$$

Cette dernière inégalité devient une égalité si Y est universellement caténaire, car d'après l'hypothèse de récurrence, les deux inégalités qu'on a additionné deviennent des égalités puisque dans ce cas W est aussi universellement caténaire. □

Chapitre 2

Théorème de valuations de Rees

Dans ce chapitre nous donnons une démonstration géométrique du théorème de valuations (Cf. Théorème 2.1.9) pour les anneaux de Nagata (Cf. Théorème 2.1.8), et aussi pour les anneaux analytiquement irréductibles (Cf. Corollaire 2.1.12). L'idée de notre démonstration du théorème 2.1.8 est basée sur certains résultats de M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier concernant la clôture intégrale des idéaux et l'équisingularité (Cf. [**?**]).

Plus précisément, nous allons étudier les valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau R de Nagata (Cf. Définition 1.2.20) ou d'un anneau analytiquement irréductible (Cf. Définition 2.1.11). Autrement dit, nous allons donner une version géométrique du théorème de valuations qui nous permettra de trouver les valuations de Rees en normalisant l'éclatement de Spec R le long de I. Plus précisément, si R est un anneau de Nagata et

$$\pi : Y = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^n} \to X = \mathrm{Spec}\ R$$

l'éclatement normalisé de X le long de I, alors toute composante irréductible $E_1, ..., E_r$ de $V(I\mathcal{O}_Y)_{red}$ définit une valuation divisorielle de $K(R)$. Nous obtenons ainsi r valuations divisorielles $\nu_1, ..., \nu_r$ de $K(R)$ telles que pour tout x non nul de R :

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_{1\leq i\leq r} \frac{\nu_i(x)}{e_i},$$

où $e_i = \min_{x\in I}\{\nu(x)\}$.

2.1 Théorème de Valuations de Rees

Soient (R, m) un anneau local nœthérien et I un idéal de R. Nous définissons la fonction ν_I par la manière suivante : Pour tout x appartenant à R

$$\nu_I(x) = \begin{cases} s & \text{si } x \in I^s - I^{s+1}, \\ +\infty & \text{si } \forall s \in \mathbb{N}, \quad \text{on a : } \quad x \in I^s. \end{cases}$$

La valeur $\nu_I(x)$ est appelée l'ordre de x dans I.

La fonction ν_I est une pseudo-valuation de R à valeurs dans $\mathbb{Z}$, parce que nous avons, par définition de la fonction ν_I, $\nu_I(0) = +\infty$ et $\nu_I(1) = 0$ et si x, y sont deux éléments de R tels que $\nu_I(x) = n$, $\nu_I(x) = m$, c'est-à-dire $x \in I^n - I^{n+1}$ et $y \in I^m - I^{m+1}$, alors $xy \in I^{n+m}$. Cela signifie que :

$$\nu_I(xy) \geq n + m = \nu(x) + \nu_I(y).$$

Supposons que $n \geq m$, alors $(x + y) \in I^m$, par suite

$$\nu_I(x + y) \geq m = \min(\nu_I(x), \nu_I(y)).$$

Nous notons aussi, pour tout $x \in R$

$$\overline{\nu}_I(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\nu_I(x^n)}{n}.$$

Cette limite existe toujours (Cf. Lemme 1.2.4).

Définition 2.1.1. *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. La fonction ν_I (resp. $\overline{\nu}_I$) est appelée l'ordre (resp. l'ordre réduit) de l'idéal I.*

Proposition 2.1.2.
1) *La fonction $\overline{\nu}_I$ est une pseudo-valuation homogène de R à valeurs dans $\mathbb{Q}$.*
2) *Soit I, J deux idéaux de R tel que $I \subset J$. Alors pour tout $x \in R$, nous avons :*

$$\nu_I(x) \leq \nu_J(x) \;\; \text{et} \;\; \overline{\nu}_I(x) \leq \overline{\nu}_J(x).$$

Démonstration. 1) Pour montrer que $\overline{\nu}_I$ est une pseudo-valuation homogène, il suffit d'appliquer le théorème 1.2.5. La propriété 2) est triviale. □

Proposition 2.1.3 (Cf. [?], Paragraphe 1)**.** *Soient I, J deux idéaux d'un anneau nœthérien R et n un entier naturel non nul. Nous avons les propriétés suivantes :*
1) $n\overline{\nu}_{I^n} = \overline{\nu}_I$.
2) $(1/\overline{\nu}_{IJ}) \leq (1/\overline{\nu}_I) + (1/\overline{\nu}_J)$.
3) $\overline{\nu}_I \geq l_I(J)\overline{\nu}_J$, *où* $l_I(J) = \min_{x \in J} \overline{\nu}_I(x)$.

Notation 2.1.4. *Pour tout idéal I d'un anneau R, nous notons I^* l'idéal de R défini par*

$$I^* = \{x \in R \mid \overline{v}_I(x) \geq 1\}.$$

Lemme 2.1.5. *Soient R un anneau nœthérien intègre et I un idéal de R. Alors*

$$\overline{v}_I = \overline{v}_{I^*} = \overline{v}_{\overline{I}}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord l'inclusion $\overline{I} \subseteq I^*$. Si $x \in \overline{I}$, alors il existe $a_k \in I^k$, $k = 1, ..., n$ tels que $x^n = a_1 x^{n-1} + ... + a_n$. On a :

$$\begin{aligned}
n\overline{v}_I(x) = \overline{v}_I(x^n) &\Rightarrow n\overline{v}_I(x) = \overline{v}_I(a_1 x^{n-1} + ... + a_n) \\
&\Rightarrow n\overline{v}_I(x) \geq \min_{1 \leq k \leq n} \overline{v}_I(a_k x^{n-k}) \\
&\Rightarrow \exists k \geq 1, \text{tel que : } n\overline{v}_I(x) \geq \overline{v}_I(a_k x^{n-k}) \\
&\Rightarrow \exists k \geq 1, \text{tel que : } n\overline{v}_I(x) \geq \overline{v}_I(a_k) + \overline{v}_I(x^{n-k}) \\
&\Rightarrow \exists k \geq 1, \text{tel que : } n\overline{v}_I(x) \geq k + (n-k)\overline{v}_I(x) \\
&\Rightarrow \overline{v}_I(x) \geq 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $I \subset \overline{I} \subset I^*$. Ce qui montre que :

$$\overline{v}_I \leq \overline{v}_{\overline{I}} \leq \overline{v}_{I^*}. \tag{2.1.1}$$

En utilisant la propriété 3) de la proposition 2.1.3, on obtient l'inégalité :

$$\overline{v}_{I^*} \leq \overline{v}_I, \tag{2.1.2}$$

car $l_{I^*}(I) = 1$. Les deux équations précédentes donnent :

$$\overline{v}_I = \overline{v}_{I^*} = \overline{v}_{\overline{I}}.$$

Ceci achève la démonstration. □

Autre méthode pour montrer que : $\overline{v}_{\overline{I}} = \overline{v}_I$.
On a bien évidemment l'inégalité $\overline{v}_I \leq \overline{v}_{\overline{I}}$, car $I \subseteq \overline{I}$. Il suffit de montrer l'inégalité $\overline{v}_{\overline{I}} \leq \overline{v}_I$. Soit $x \in R$ et $\alpha = v_{\overline{I}}(x)$. Prenons $\beta < \alpha$, donc il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $x^n \in (\overline{I})^{[n\beta]}$. On sait que $(\overline{I})^k \subset \overline{I^k}$, donc $\forall n \geq n_0$, on a $x^n \in \overline{I^{[n\beta]}}$, c'est-à-dire que $y = x^n$ est une racine d'une équation de la forme

$$y^s = a_1 y^{s-1} + ... + a_s \quad \text{où} \quad a_k \in I^{k[n\beta]}.$$

Cet équation implique que $y^m \in I^{k[n\beta](m-s)}$ pour tout $m \geq s$, ce qui nous donne

$$\overline{v}_I(x) = \frac{1}{n}\overline{v}_I(y) \geq \lim_{m\to\infty} \frac{[n\beta](m-s)}{m} = \frac{[n\beta]}{n}.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\overline{\nu}_I(x) \geq \beta$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\beta < \overline{\nu}_{\overline{I}}(x)$, on en déduit que $\overline{\nu}_{\overline{I}}(x) \leq \overline{\nu}_I(x)$, et par conséquent $\overline{\nu}_{\overline{I}} = \overline{\nu}_I$.

Lemme 2.1.6. *Soit R un anneau intègre, et $\pi : X \to \operatorname{Spec} R$ un morphisme birationnel propre, tel que X est normal et $I\mathcal{O}_X$ est un faisceau inversible. Alors*

$$\overline{I} = H^0(X, I\mathcal{O}_X).$$

Démonstration. Soit S l'ensemble de toutes les valuations sur K le corps des fractions de R telles que $R \subseteq R_\nu$, donc

$$\overline{I} = \bigcap_{\nu \in S} IR_\nu.$$

D'après le critère valuatif de propreté toute valuation $\nu \in S$ a un centre $x \in X$. La birationalité de π permettant de ne regarder que des valuations sur K, ainsi on peut regrouper les éléments de S suivant leurs centres, ce qui donne

$$\overline{I} = \bigcap_{x \in X} \bigcap_{\nu \in S_x} IR_\nu, \tag{2.1.3}$$

où S_x est l'ensemble des valuations centrées en x. Puisque $I\mathcal{O}_X$ est inversible, les idéaux $I\mathcal{O}_{X,x}$ sont principaux dans l'anneau normal $\mathcal{O}_{X,x}$, donc ils sont intégralement clos (Cf. [**?**]), par conséquent, nous trouvons

$$I\mathcal{O}_{X,x} = \bigcap_{\nu \in S_x} IR_\nu. \tag{2.1.4}$$

En regroupant les équations (2.1.3) et (2.1.4), on obtient

$$\overline{I} = \bigcap_{x \in X} I\mathcal{O}_{X,x}.$$

Ce qui, via [**?**] (Cf. (8.2.1.1)) donne bien $\overline{I} = H^0(X, I\mathcal{O}_X)$. □

Corollaire 2.1.7. *Soient R un anneau intègre, I un idéal de R, et $\pi_I : Y \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ l'éclatement normalisé de $\operatorname{Spec} R$ le long de I. Alors pour tout faisceau des idéaux $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$ tel que $\mathcal{J} \subset I\mathcal{O}_Y$:*

$$H^0(Y, \mathcal{J}) \subset \overline{I}.$$

Théorème 2.1.8. *Soient R un anneau nœthérien intègre de Nagata et I un idéal de R. Il existe un nombre fini de valuations discrètes $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ telles que pour tout x non nul appartenant à R :*

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{\nu_i(x)}{\nu_i(I)}.$$

Si de plus, R est universellement caténaire, alors les valuations $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ sont divisorielles.

Ce théorème est un cas particulier du théorème général des valuations de Rees qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.1.9 (Théorème de Valuations de Rees, Cf. [**?**]). *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Il existe un nombre fini de valuations discrètes $\{\nu_i\}_{1\le i\le r}$ de R telles que pour tout x non nul appartenant à R :*

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_{1\le i\le r} \frac{\nu_i(x)}{e_i},$$

où $e_i = \nu_i(I)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour démontrer le théorème 2.1.8.

Lemme 2.1.10. *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Posons pour tout $x \in R - \{0\}$:*

$$\mu_I(x) = \sup\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in \overline{I^k}\} \quad et \quad \overline{\mu}_I(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_I(x^n)}{n}.$$

Alors pour tout $x \in R - \{0\}$, on a : $\overline{\nu}_I(x) = \overline{\mu}_I(x)$.

Démonstration. On a bien évidemment $\overline{\nu}_I \le \overline{\mu}_I$, donc il suffit de montrer l'inégalité $\overline{\mu}_I \le \overline{\nu}_I$. Soit $x \in R$ tel que $\overline{\mu}_I(x) = \alpha$. Prenons $\beta < \alpha$, donc il existe n_0 tel que $\forall n \ge n_0$, on a $x^n \in \overline{I^{[n\beta]}}$, où $[n\beta]$ est la partie entière de $n\beta$. Donc $y = x^n$ est une racine d'une équation de la forme

$$y^s = a_1 y^{s-1} + \cdots + a_s \quad \text{où} \quad a_k \in I^{k[n\beta]}.$$

Cette équation implique que $y^m \in I^{k[n\beta](m-s)}$ pour tout $m \ge s$, ce qui nous donne

$$\overline{\nu}_I(x) = \frac{1}{n}\overline{\nu}_I(y) \ge \lim_{m\to\infty} \frac{[n\beta](m-s)}{nm} = \frac{[n\beta]}{n}.$$

En Passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve $\overline{\nu}_I(x) \ge \beta$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\beta < \overline{\nu}_I(x)$, on en déduit que $\overline{\mu}_I(x) \le \overline{\nu}_I(x)$. □

Démonstration du Théorème 2.1.8 :

Soient $\pi : Y = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\ge 0} \overline{I^n} \to X = \mathrm{Spec}\, R$ l'éclatement normalisé de X le long de I, $E \subset Y$ le sous-schéma réduit de Y associé à $I\mathcal{O}_Y$ et $E_1, E_2, ..., E_r$ les composantes irréductibles de E. Comme le faisceau $I\mathcal{O}_Y$ est inversible et Y est normal, l'anneau $A_i = \mathcal{O}_{Y,E_i}$ est un anneau de valuation discrète pour tout $i = 1, 2, .., r$. Soient ν_i la valuation associée à A_i, $e_i = \nu_i(I)$ et $\mathfrak{p}_i$ le centre de ν_i dans R. Le fait que R est un anneau de Nagata, entraîne que Y est de type fini sur X, et donc le morphisme π est birationnel propre. Si nous supposons que R est universellement caténaire, nous en déduisons d'après le théorème de la dimension (Cf. Théorème 1.3.7), l'égalité :

$$\text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{p}_i)} k_{\nu_i} = \text{ht}\, \mathfrak{p}_i - 1$$

Ce qui prouve que les valuations $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ sont divisorielles. Les idéaux $I_n(\nu_i)$ sont intégralement clos, donc d'après la définition de e_i, pour tout $n \geq 0$ l'inclusion

$$\overline{I^n} \subset \bigcap_{i=1}^{r} I_{ne_i}(\nu_i). \tag{2.1.5}$$

Soient maintenant D_I le diviseur de Cartier associé à $I\mathcal{O}_Y$ et ξ_i le point générique de E_i. Comme l'idéal $I\mathcal{O}_{Y,\xi_i}$ est principal, il existe $a_i \in I$ tel que

$$I\mathcal{O}_{Y,\xi_i} = a_i \mathcal{O}_{Y,\xi_i} \ \ et \ \ \nu_i(a_i) = e_i.$$

Alors nous pouvons écrire le diviseur D_I sous la forme

$$D_I = \sum_{i=1}^{r} e_i E_i.$$

Soit f une fonction rationnelle non nulle sur Y, on a :

$$\begin{aligned} f \in H^0(Y, \cap_{i=1}^r I_{e_i n}(\nu_i)\mathcal{O}_Y) &\Rightarrow \forall i = 1, 2, .., r \ : \ \nu_i(f) \geq ne_i \\ &\Rightarrow (f) - nD_I \geq 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{O}_Y(-nD_I)(Y) = I^n \mathcal{O}_Y(Y). \end{aligned}$$

Donc

$$H^0(Y, \bigcap_{i=1}^{r} I_{e_i n}(\nu_i)\mathcal{O}_Y) \subset H^0(Y, I^n \mathcal{O}_Y).$$

Ce qui implique, d'après le corollaire 2.1.7, l'inclusion

$$\bigcap_{i=1}^{r} I_{ne_i}(\nu_i) \subset \overline{I^n}. \tag{2.1.6}$$

Ensuite, les équations (2.1.5) et (2.1.6) impliquent

$$\overline{I^n} = \bigcap_{i=1}^{r} I_{ne_i}(\nu_i). \tag{2.1.7}$$

Cette équation entraîne que

$$\overline{\mu}_I(x) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{\nu_i(x)}{e_i}.$$

D'après le lemme 2.1.10 précédent, on obtient :

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_{1\leq i\leq r} \frac{\nu_i(x)}{e_i}.$$

Ceci achève la démonstration. □

Définition 2.1.11. *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local intègre. Nous disons que l'anneau* R *est analytiquement non-ramifié (resp. analytiquement irréductible) si le complété* $\mathfrak{m}$*-adique de* R *est réduit (resp. intègre).*

Théorème 2.1.12. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local intègre analytiquement irréductible et* I *un idéal de* R*. Alors il existe un nombre fini de valuations discrètes* $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ *telles que pour tout* x *non nul appartenant à* R *:*

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_{1\leq i\leq r} \frac{\nu_i(x)}{\nu_i(I)}.$$

Démonstration. Soit $\widehat{R}$ le complété m-adique de R. Le morphisme naturel $R \hookrightarrow \widehat{R}$ est fidèlement plat ce qui donne pour tout entier naturel n

$$I^n = (I\widehat{R})^n \cap R.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in R - \{0\} \quad : \quad \nu_I(x) = \nu_{I\widehat{R}}(x) \quad \text{et} \quad \overline{\nu}_I(x) = \overline{\nu}_{I\widehat{R}}(x).$$

On peut donc supposer que R est un anneau local intègre complet. Comme tout anneau local complet est un anneau de Nagata, le corollaire devient donc une conséquence immédiate du théorème 2.1.8. □

2.2 Examples

Exemple 2.2.1. Soient x, y, et z des indéterminés, et

$$R = \frac{\mathbb{C}[[x, y, z]]}{(xy - z^3)} = \mathbb{C}[[X, Y, Z]].$$

Prenons $I = (X, Y, Z)$ l'idéal maximal de R. Comme l'éclatement de Spec R le long de I est normal, on a :

$$E_I = \text{Proj } \frac{\mathbb{C}[xT, yT, zT]}{(xT)(yT)}$$

Posons $E_1 = V(xT)$ et $E_2 = V(yT)$ les deux composantes irréductibles de E_I. Par suite, l'idéal I a deux valuations de Rees associées ν_1 et ν_2. Déterminons maintenant les valeurs de $\nu_1(x), \nu_1(y)$ et $\nu_1(z)$. On sait que :

$$R_{\nu_1} = \frac{\mathbb{C}[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, z]_{(\frac{x}{z})}}{\frac{x}{z}\frac{y}{z} - z} \cong \mathbb{C}[X', Y']_{(X')}.$$

Notons $\tilde{\nu}_1$ l'extension de ν_1 dans le corps $\mathbb{C}(XT, YT, ZT, T^{-1})$. Donc $\tilde{\nu}_1(yT) = \tilde{\nu}_1(zT) = 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\nu_1(y) &= \tilde{\nu}_1(yTT^{-1}) \\
&= \tilde{\nu}_1(yT) + \tilde{\nu}_1(T^{-1}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De même, on obtient $\nu_1(z) = 1$. Dans l'anneau $R_{\tilde{\nu}_1}$, on a :

$$(xT)(yT) = (zT)^3 T^{-1},$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}
\nu_1(x) &= \tilde{\nu}_1(xTT^{-1}) \\
&= \tilde{\nu}_1(xT) + \tilde{\nu}_1(T^{-1}) \\
&= \tilde{\nu}_1(xTyT) - \tilde{\nu}_1(yT) + 1. \\
&= 3\tilde{\nu}_1(zT) + \tilde{\nu}_1(T^{-1}) + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \nu_1(x) = 2 \\ \nu_1(y) = 1 \\ \nu_1(z) = 1. \end{cases}$$

De façon analogue, on peut obtenir que :

$$\begin{cases} \nu_2(x) = 1 \\ \nu_2(y) = 2 \\ \nu_2(z) = 1. \end{cases}$$

Exemple 2.2.2. Soient s un entier naturel supérieur où égal à zéro, et

$$R = \frac{\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]}{(x_n^{n+s} - \prod_{i=1}^{n-1} x_i)} = \mathbb{C}[[X_1, ..., X_n]]$$

et $I = (x_1, x_2, ..., x_n)R$. On a :

$$E_I = \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{C}[x_1T, x_2T, ..., x_nT]}{(x_1T)(x_2T)...(x_{n-1}T)}.$$

Posons, $E_1 = V(x_1T)$,...., $E_{n-1} = V(x_{n-1}T)$ les composantes irréductibles de E_I. L'idéal I a $(n-1)$-valuations de Rees associées. Soit ν_i la valuation de Rees correspondant à la composante E_i. Nous allons déterminer les valeurs de $\nu_i(x_1), ..., \nu_i(x_n)$. Notons $\tilde{\nu}_i$ l'extension de ν_i dans le corps $\mathbb{C}(X_1T, ..., X_nT, T^{-1})$. On sait que :

$$R_{\nu_i} = \left(\frac{\mathbb{C}[\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}, x_n]}{x_n^{s+1} - \frac{x_1}{x_n} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}}\right)_{(\frac{x_i}{x_n})}.$$

De fait, pour tout $j \neq i$, on a $\tilde{\nu}_i(x_jT) = 0$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \nu_i(x_j) &= \tilde{\nu}_i(x_jTT^{-1}) \\ &= \tilde{\nu}_i(x_jT) + \tilde{\nu}_i(T^{-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Reste maintenant à determiner $\nu_i(x_i)$. Dans l'anneau $R_{\tilde{\nu}_i}$, on a :

$$(x_1T)(x_2T)...(x_{n-1}T) = (x_nT)^{n+s}(T^{-1})^{s+1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_i(x_i) &= \tilde{\nu}_i(x_iTT^{-1}) \\ &= \tilde{\nu}_i(T^{-1}) + \tilde{\nu}_i(x_iT) \\ &= 1 + (n+s)\tilde{\nu}_i(x_nT) - \Big(\sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} \tilde{\nu}_i(x_jT)\Big) + (s+1)\tilde{\nu}_i(T^{-1}) \\ &= s+2. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, on a :

$$\begin{cases} \nu_i(x_1) & = 1 \\ \nu_i(x_2) & = 1 \\ \quad\vdots & \\ \nu_i(x_{i-1}) & = 1 \\ \nu_i(x_i) & = s+2 \\ \nu_i(x_{i+1}) & = 1 \\ \quad\vdots & \\ \nu_i(x_n) & = 1. \end{cases}$$

Chapitre 3

Applications du théorème de valuations de Rees

L'objectif de ce chapitre est de montrer que les valuations de Rees associées à un idéal I jouent un rôle très important pour étudier les propriétés de I.

3.1 Théorème de Rees et clôture intégrale des idéaux

Dans la suite, nous nous intéressons à l'etude de la clôture intégrale d'idéaux I d'un anneau nœthérien vérifiant pour toute valuation de Rees v associé à I, $v(I) = 1$.

Définition 3.1.1. *Un idéal I d'un anneau R est dit normal, si pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\overline{I^n} = I^n$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant pour simplifier les preuves des résultat de cette section.

Lemme 3.1.2. *Soit I un idéal d'un anneau nœthérien R. Posons pour tout $x \in R - \{0\}$,*

$$\mu_I(x) = \sup\{k \in \mathbb{N},\ \textit{tel que } x \in \overline{I^k}\}.$$

Alors pour tout $x \in R - \{0\}$, on a

$$[\overline{v}_I(x)] = \mu_I(x), \tag{3.1.1}$$

où $[\ \ ]$ est la partie entière.

Démonstration. D'après le théorème de valuations de Rees, on sait que pour tout entier naturel $n \geq 0$,

$$\overline{I^n} = \{x \in R \mid \overline{\nu}_I(x) \geq n\}. \tag{3.1.2}$$

Soient x un élément de R, et $k = \mu_I(x)$, donc $x \in \overline{I^k} - \overline{I^{k+1}}$. En utilisant l'équation (3.1.2), on obtient :

$$k \leq \overline{\nu}_I(x) < k + 1.$$

Ceci implique que $[\overline{\nu}_I(x)] = \mu_I(x)$. □

Corollaire 3.1.3. *Soit I un idéal d'un anneau nœthérien R. Alors I est normal, si et seulement si $[\overline{\nu}_I(x)] = \nu_I(x)$ pour tout $x \in R - \{0\}$.*

Démonstration. En remarquant que : I est normal $\Longleftrightarrow$ $\nu_I(x) = \mu_I(x)$, pour tout $x \in R - \{0\}$, ce corollaire devient une conséquence immédiate du lemme 3.1.2. □

Corollaire 3.1.4. *Soit I un idéal d'un anneau nœthérien R. Nous avons les propriétés suivantes :*
1) *Si I est normal et pour toute valuation ν_i de Rees associée à I, on a $\nu_i(I) = 1$, alors $\overline{\nu}_I(x) = \nu_I(x)$ pour tout $x \in R - \{0\}$.*
2) *Si $\overline{\nu}_I(x) = \nu_I(x)$ pour tout $x \in R - \{0\}$, alors I est normal.*

Démonstration. 1) Supposons que I est normal et pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$, $\nu_i(I) = 1$, alors $\nu_I(x) = \mu_I(x)$ et $[\overline{\nu}_I(x)] = \overline{\nu}_I(x)$, car

$$\Big[\min_{1\leq i\leq s} \frac{\nu_i(x)}{\nu_i(I)}\Big] = \min_{1\leq i\leq s} \frac{\nu_i(x)}{\nu_i(I)}.$$

Par conséquent, $\overline{\nu}_I(x) = \mu_I(x) = \nu_I(x)$, (Cf. (3.1.1)).
2) Supposons que $\overline{\nu}_I(x) = \nu_I(x)$ pour tout $x \in R - \{0\}$. Nous allons montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\overline{I^n} = I^n$. Soit $x \in R$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{I^n} &\Longrightarrow \mu_I(x) \geq n \\ &\Longrightarrow [\overline{\nu}_I(x)] \geq n, \quad \text{(Cf. (3.1.1))} \\ &\Longrightarrow \nu_I(x) \geq n \\ &\Longrightarrow x \in I^n. \end{aligned}$$

Donc I est normal. □

Proposition 3.1.5. *Soient R un anneau nœthérien de I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R$, *on a :* $x^k \in I^{kn+1} \Longrightarrow x \in I^{n+1}$.
2) $\exists k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R$, *on a :* $x^k \in I^{kn+1} \Longrightarrow x \in I^{n+1}$.
3) $\forall x \in R, \forall n \in \mathbb{N}$, *on a :* $x^2 \in I^{2n+1} \Longrightarrow x \in I^{n+1}$.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Est triviale.
2) $\Longrightarrow$ 3) : Soient $x \in$ un élément de R et $\nu_I(x) = n$, alors $x \in I^n - I^{n+1}$. D'après la condition 2), il est clair que $x^k \in I^{kn} - I^{kn+1}$ et ceci implique que $\nu_I(x^k) = kn$. Donc pour tout $x \in R$, on a $\nu_I(x^k) = k\nu_I(x)$. Pour montrer que $\forall x \in R, \forall n \in \mathbb{N}$, on a $x^2 \in I^{2n+1} \Longrightarrow x \in I^{n+1}$, il suffit de montrer que $\forall x \in R$, on a $\nu_I(x^2) = 2\nu_I(x)$. En utilisant l'égalité $\nu_I(x^k) = k\nu_I(x)$, non peut montrer par récurrence que $\nu_I(x^{k^n}) = k^n\nu_I(x)$, par suite :

$$\forall x \in R \quad : \quad \frac{\nu_I(x^{k^n})}{k^n} = \nu_I(x)$$

En passant à la limite quand n tend vers $(+\infty)$, on obtient :

$$\forall x \in R \quad : \quad \overline{\nu}_I(x) = \nu_I(x).$$

Donc $\nu_I(x^2) = \overline{\nu}_I(x^2)$, et comme la pseudo-valuation $\overline{\nu}_I$ est homogène, il résulte que

$$\forall x \in R \quad : \quad \nu_I(x^2) = 2\nu_I(x).$$

3) $\Longrightarrow$ 1) : Voir la proposition 1.2.2. □

Proposition 3.1.6. *Si I vérifie l'une des conditions précédentes, alors I est normal.*

Démonstration. Il est clair que si l'idéal I vérifie l'une des conditions de la proposition précédente, alors pour tout $x \in R$, on a :

$$\overline{\nu}_I(x) = \nu_I(x).$$

Le corollaire 3.1.4 entraîne immédiatement que l'idéal I est normal. □

Proposition 3.1.7. *Si pour toute valuation ν_i de Rees associée à I, $\nu_i(I) = 1$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *I est normal.*
2) *Pour tous $x \in R$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $x^2 \in I^{2n+1} \Longrightarrow x \in I^{n+1}$.*

Démonstration. 2) $\Longrightarrow$ 1) : Voir la proposition précédente
1) $\Longrightarrow$ 2) : Supposons que I est normal, et soient $x \in R$ et n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} x^2 \in I^{2n+1} &\Longrightarrow x^2 \in \overline{I^{2n+1}} \\ &\Longrightarrow \overline{\nu}_I(x^2) \geq 2n+1 \\ &\Longrightarrow \min_{1 \leq i \leq s}\{\nu_i(x^2)\} \geq 2n+1 \\ &\Longrightarrow \forall i = 1, ..., s, \text{ on a} : \nu_i(x) \geq n+1 \\ &\Longrightarrow \overline{\nu}_I(x) \geq n+1 \\ &\Longrightarrow x \in \overline{I^{n+1}} = I^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.8. *Si pour toutes valuation v_i de Rees associée à I, $v_i(I) = 1$, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *Pour tout $x \in R$: $x^2 \in I \Longrightarrow x \in I$.*
2) *I est intégralement clos.*
3) *I est radical.*

Démonstration. 3) $\Longrightarrow$ 2) : Est triviale.
2) $\Longrightarrow$ 1) : Supposons que $\bar{I} = I$. On a :

$$\begin{aligned} x^2 \in I &\Longrightarrow x^2 \in \bar{I} \\ &\Longrightarrow \bar{v}_I(x^2) \geq 1 \\ &\Longrightarrow \min_{1 \leq i \leq s}\{v_i(x^2)\} \geq 1 \\ &\Longrightarrow \forall i = 1, ..., s, \text{ on a} : v_i(x) \geq 1 \\ &\Longrightarrow \bar{v}_I(x) \geq 1 \\ &\Longrightarrow x \in \bar{I} = I. \end{aligned}$$

1) $\Longrightarrow$ 3) : Supposons qu'on a la condition 1). Soit x un élément de $\sqrt{I}$, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2^r} \in I$. Par récurrence, il est clair que $x^{2^{r-1}} \in I, x^{2^{r-2}} \in I, ..., x \in I$. Ce qui montre que I est radical. □

Définition 3.1.9. *Soient v une valuation sur K a valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_v \cap R$ le centre de v dans R. Nous disons que la topologie $v-$adique et la topologie $\mathfrak{p}-$adique sont linéairement équivalentes, s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 1$:*

$$I_{ln}(v) := \{x \in R \mid v(x) \geq ln\} \subset \mathfrak{p}^n.$$

Remarque 3.1.10. *Par définition, il est clair que pour tout entier naturel $n \geq 1$:*

$$\mathfrak{p}^n \subset I_n(v).$$

Proposition 3.1.11. *Soient R un anneau de Nagata intègre et $\mathfrak{p}$ un idéal premier normal de R. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *$R_{\mathfrak{p}}$ est analytiquement irréductible.*
2) *Pour toute valuation divisorielle centrée en $\mathfrak{p}$, les topologies v-adique et $\mathfrak{p}$-adique sont linéairement équivalentes.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) : Soit v une valuation divisorielle centré en $\mathfrak{p}$ et $v_1, v_2......v_s$ les valuations de Rees associés à $\mathfrak{p}$. D'après le théorème d'Izumi, on trouve que, pour tout $i = 1, .., s$, il existe $r_i \geq 1$ tel que pour tout x non nul de R, on a :

$$v(x) \leq \frac{r_i}{v_i(\mathfrak{p})} v_i(x).$$

Par suite,

$$I_{rn}(\nu) \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} I_n(\nu_i),$$

où $r = \max_i\{r_i\}$. D'après la démonstration du théorème 2.1.8, on a :

$$I_{rn}(\nu) \subset \overline{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}^n.$$

Donc la topologie ν-adique et la topologie $\mathfrak{p}$-adique sont linéairement équivalentes. L'implication 2) $\Rightarrow$ 1) est triviale, car si ν est une valuation discrète, l'anneau R_ν (ie. le complété ν-adique de R) est intègre. Or on sait que $\widehat{R} \subset R_\nu$. □

3.2 La question de Hübl et Swanson

Soient R un anneau nœthérien analytiquement irréductible et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R. Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tous x et y de R, on a : $xy \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$ ou $y \in I^n$ (en particulier, pour tout x de R, on a : $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$). L'idéal I est-il normal ?

Cette question a été posé par R. Hübl et I. Swanson dans un article intitulé "Discrete valuations centered on local domains" (Cf. **[?]**, Question 2.9). Il est clair que si l'idéal I est normal, alors pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout x de R, on a $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$, car :

$$\begin{aligned} x^2 \in I^{2n} &\Longrightarrow x^2 \in \overline{I^{2n}} \\ &\Longrightarrow \overline{\nu}(x^2) \geq 2n \\ &\Longrightarrow \overline{\nu}(x) \geq n \\ &\Longrightarrow x \in \overline{I^n} = I^n. \end{aligned}$$

Nous remarquons que si l'idéal I vérifie la propriété : "Pour tout entier naturel $n \geq 0$, et pour tout $x \in R$, on a $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$", alors pour tout entier naturel $s \geq 1$ l'idéal I^s vérifie aussi cette propriété. Donc il suffit de donner une réponse à la question suivante :

Question 3.2.1. *Soient R un anneau nœthérien analytiquement irréductible et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R. Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, et pour tout x de R, on a $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$. I est-il intégralement clos ?*

Lemme 3.2.2. *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Si pour tout entier naturel $n \geq 1$, et pour tout x de R, nous avons $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$, alors pour tout $n \geq 0$, $\overline{I^{n+1}} \subset I^n$.*

Démonstration. Soient $x \in R$ et $s = \nu_I(x)$ (ie. $x \in I^s - I^{s+1}$). Par récurrence, on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^{2^k} \in I^{s2^k}$ et $x^{2^k} \notin I^{(s+1)2^k}$, ce qui donne $s2^k \leq \nu_I(x^{2^k}) \leq (s+1)2^k - 1$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$s \leq \frac{\nu_I(x^{2^k})}{2^k} \leq s + 1 - \frac{1}{2^k}.$$

En passant à la limite quand k tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\nu_I(x) \leq \overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + 1.$$

L'inégalité $\overline{\nu}_I \leq \nu_I + 1$ entraîne, pour tout $n \geq 0$, l'inclusion : $\overline{I^{n+1}} \subset I^n$. □

La proposition suivante donne une réponse affirmative à la question de Hübl et Swanson, dans le cas où, toute valuation de Rees ν_i associée à I, vérifie $\nu_i(I) = 1$, et pour tout $x \in R$, on a $\nu_I(x) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \nu_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$.

Proposition 3.2.3. *Soient I un idéal d'un anneau nœthérien R. Considérons les conditions suivantes :*
(a) *$\forall x \in R$, on a : $\nu_I(x) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \nu_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$.*
(b) *$\forall x \in R$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $x^2 \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n$.*
(c) *I est normal.*

Alors : (a) $\wedge$ (b) $\Longrightarrow$ (c). De plus, si pour toute valuation de Rees ν_i associée à I, $\nu_i(I) = 1$, alors la réciproque est vraie (ie. (c) $\Longrightarrow$ (a) $\wedge$ (b).)

Démonstration. Supposons qu'on a les deux conditions (a) et (b). Soient x un élément de R et $n \geq 1$ un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{I^n} &\Longrightarrow \overline{\nu}_I(x) \geq n \\ &\Longrightarrow \overline{\nu}_I(x^2) \geq 2n. \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 3.2.2, on sait que $\nu_I(x) + 1 \geq \overline{\nu}_I(x)$. Par conséquent,

$$\nu_I(x^2) + 1 \geq 2n.$$

Donc $x^2 \in I^{2n}$, car $\nu_I(x^2) \in 2\mathbb{Z}$. La condition ($b$) implique que $x \in I^n$. Ceci montre que l'idéal I^n est intégralement clos pour tout entier naturel $n \geq 1$.
Supposons maintenant que I est normal. Soit x un élément de R. On a déjà vu que : I normal implique la condition (b). Si pour tout $1 \leq i \leq s$, on a $\nu_i(I) = 1$, alors

$$\nu_I(x) = \overline{\nu}_I(x).$$

Ce qui montre que $\nu_I(x^2) = \overline{\nu}_I(x^2) = 2\overline{\nu}_I(x) \in 2\mathbb{Z}$. □

Définition 3.2.4. *Soient R un anneau nœthérien et k un entier naturel. Nous disons que R possède la propriété S_k, si et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R :*

$$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \geq \inf\{k, \operatorname{ht} \mathfrak{p}\}.$$

Définition 3.2.5. *Soient R un anneau nœthérien et k un entier naturel. Nous disons que R possède la propriété R_k, si et seulement si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur inférieure ou égale à k, l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est régulier.*

Notation 3.2.6. *Si $A = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A_i$ est un anneau gradué et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, nous notons : $A_{(\mathfrak{p})} = \{x \in A_{\mathfrak{p}} \ \ \text{tel que} \ \deg x = 0\}$.*

Proposition 3.2.7. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *L'anneau $\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]}$ possède la propriété (R_0).*
2) *Pour toute valuation de Rees v associée à I, on a $v(I) = 1$.*

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit v une valuation de Rees associée a I. Alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \overline{R[IT]}$ de hauteur 1, minimal sur $I\overline{R[IT]}$ tel que $R_v = \overline{R[IT]}_{(\mathfrak{p})}$. Posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/I\overline{R[IT]}$, alors $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = 0$. Si l'anneau $\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]}$ possède la propriété (R_0), alors l'anneau

$$(\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]})_{(\mathfrak{q})} = R_v/IR_v \tag{3.2.1}$$

est intègre, donc $IR_v \subset \mathfrak{m}_v$ est un idéal premier de R_v de hauteur supérieure ou égale à 1, car $(0) \subsetneq I$. Comme $\operatorname{ht} \mathfrak{m}_v = 1$, il en résulte $IR_v = \mathfrak{m}_v$. Donc $v(I) = 1$.
2) $\Longrightarrow$ 1) : Supposons maintenant que pour toute valuation de Rees v associée à I, on a $v(I) = 1$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]}$ de hauteur égale à zéro. Soit $\mathfrak{p}$ la pré-image de $\mathfrak{q}$ dans $\overline{R[IT]}$. Donc $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\overline{R[IT]}$ de hauteur 1 tel que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/I\overline{R[IT]}$. Soit v la valuation de Rees associée à I telle que $R_v = \overline{R[IT]}_{(\mathfrak{p})}$. Donc $IR_v = \mathfrak{m}_v$ car $v(I) = 1$. D'après l'égalité (3.2.1), il est clair que $(\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]})_{(\mathfrak{q})}$ est intègre. Donc $\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]}$ possède la propriété (R_0). □

Remarque 3.2.8. *Sachant que l'anneau $\overline{R[IT]}$ possède la propriété (S_2) de Serre, alors dire que l'anneau $(\overline{R[IT]}/I\overline{R[IT]})$ possède la propriété (R_0), c'est la même chose de dire qu'il est réduit, car cet anneau possède la propriété (S_1) de Serre.*

3.3 La propriété (Z_k)

Nous allons introduire dans cette partie, une nouvelle propriété des idéaux, qu'on l'appelle (Z_k), et nous présentons divers résultats liés à cette propriété.

Définition 3.3.1. *Soient I un idéal d'un anneau nœthérien R et k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Nous disons que I possède la propriété (Z_k), s'il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$:*

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n. \tag{3.3.1}$$

Proposition 3.3.2. *Soient I un idéal d'un anneau nœthérien R et k, s deux entiers naturels supérieurs ou égal à 2. Nous avons :*
1) *Si I possède la propriété (Z_k), alors I^s possède la propriété (Z_k) pour tout $s \geq 1$.*
2) *Si I possède les propriétés (Z_k) et (Z_s), alors I^s et I^k possèdent la propriété (Z_{sk}).*
3) *Si I possède la propriété (Z_{k^2}), alors I possède la propriété (Z_k). En général, s'il existe un entier naturel $r \geq 0$, tel que I possède la propriété $(Z_{k^{2^r}})$, alors I possède la propriété (Z_k).*

Démonstration. 1) Supposons que I possède la propriété (Z_k). Alors il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n. \tag{3.3.2}$$

Soit $s \in \{2, ..., k\}$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{s(kn+b)} &\Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{k(sn)+sb} \subseteq I^{k(sn)+b} \\ &\Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^{sn}, \ (\text{Cf. } (3.3.2)). \end{aligned}$$

Donc I^s possède la propriété (Z_k).
2) Supposons que I possède les propriétés (Z_k) et (Z_s). Alors par définition, il existe deux entiers naturels $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$, tels que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_s$ dans R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b_1} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n. \tag{3.3.3}$$

et

$$\prod_{j=1}^{s} y_i \in I^{sn+b_2} \Longrightarrow \exists j \in \{1, ..., s\} \ : \ y_j \in I^n. \tag{3.3.4}$$

Pour montrer que I^s possède la propriété (Z_{sk}), il suffit de montrer qu'il existe un entier naturel $c \geq 0$, tel que pour tous $x_{11}, x_{12}, ...x_{sk}$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq s\\ 1\leq j\leq k}} x_{ij} \in I^{ks^2n+cs} \Longrightarrow \exists\alpha \in \{1,...,s\}, \exists\beta \in \{1,...,k\} \ : \ x_{\alpha\beta} \in I^{sn}.$$

Prenons c un entier naturel qui vérifie $cs \geq kb_2 + b_1$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{1\leq i\leq s\\ 1\leq j\leq k}} x_{ij} \in I^{ks^2n+cs} &\Longrightarrow \prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{s} x_{ij} \in I^{k(s^2n+b_2)+b_1} \\
&\Longrightarrow \exists\beta \in \{1,...,k\} \ : \ \prod_{i=1}^{s} x_{i\beta} \in I^{(s^2n+b_2)}, \ \text{(Cf. (3.3.3))} \\
&\Longrightarrow \exists\alpha \in \{1,...,s\}, \exists\beta \in \{1,...,k\} \ : \ x_{\alpha\beta} \in I^{sn}, \ \text{(Cf. (3.3.3))}.
\end{aligned}$$

Donc I^s possède la propriété (Z_{sk}). Par un raisonnement analogue, on peut montrer que I^k possède la propriété (Z_{sk}).
3) Supposons que I possède la propriété (Z_{k^2}). Alors il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous $x_{11}, x_{12}, ..., x_{kk}$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}} x_{ij} \in I^{k^2n+b} \Longrightarrow \exists i, j \in \{1,...,k\} \ : \ x_{ij} \in I^{n}. \tag{3.3.5}$$

Montrons maintenant que I possède la propriété (Z_k). Soient $x_1, x_2, ..., x_k \in R$, et $n \geq 1$ un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b} &\Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} x_i^{\,k} \in I^{k^2n+bk} \subseteq I^{k^2n+b} \\
&\Longrightarrow \exists i \in \{1,...,k\} \ : \ x_i \in I^{n}, \ \text{(Cf. (3.3.5))}.
\end{aligned}$$

S'il existe un entier naturel $r \geq 0$ tel que I possède la propriété $(Z_{k^{2^r}})$, alors d'après ce qu'on vient de démontrer, on en déduit par récurrence que I possède les propriétés $(Z_{k^{2^{r-1}}})$, $(Z_{k^{2^{r-2}}})$,...,(Z_{k^2}), (Z_k). □

Proposition 3.3.3. *Soit I un idéal d'un anneau nœthérien R. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *I possède la propriété* (Z_2).
2) *Il existe un entier naturel* $s \geq 0$, *tel que I possède la propriété* $(Z_{2^{2^s}})$.
3) *Pour tout entier naturel* $s \geq 0$, *I possède la propriété* $(Z_{2^{2^s}})$.

Démonstration. 3) $\Longrightarrow$ 2) : Est triviale.
2) $\Longrightarrow$ 1) : Est une conséquence immédiate de la proposition 3.3.2. Il suffit de remplacer k par 2 dans la condition 3) de la proposition 3.3.2.
1) $\Longrightarrow$ 3) : Nous allons utiliser la démonstration par récurrence sur s pour montrer que : I possède la propriété $(Z_{2^{2^s}})$.
Si $s = 0$: Il n'y a rien à montrer.
La récurrence : Supposons que I possède la propriété $(Z_{2^{2^s}})$. Alors il existe un entier naturel $b_s \geq 0$, tel que $x_1, ..., x_{(2^{2^s})} \in R$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{2^{2^s}} x_i \in I^{2^{2^s} n + b_s} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., 2^{2^s}\} \; : \; x_i \in I^n. \tag{3.3.6}$$

Montrons maintenant que I possède la propriété $(Z_{2^{2^{s+1}}})$. Posons $b_{s+1} = (2^{2^s} + 1)b_s$. Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $(y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2^{2^s} \\ 1 \leq j \leq 2^{2^s}}}$ $2^{2^{s+1}}$-éléments de R. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2^{2^s} \\ 1 \leq j \leq 2^{2^s}}} y_{ij} \in I^{2^{2^{s+1}} n + b_{s+1}} &\Longrightarrow \prod_{1 \leq i \leq 2^{2^s}} \prod_{1 \leq j \leq 2^{2^s}} y_{ij} \in I^{2^{2^s}\left(2^{2^s} n + b_s\right) + b_s} \\
&\Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., 2^{2^s}\} \;\; : \prod_{1 \leq j \leq 2^{2^s}} y_{ij} \in I^{2^{2^s} n + b_s}, \text{ (Cf. (3.3.6))} \\
&\Longrightarrow \exists i, j \in \{1, ..., 2^{2^s}\} \;\; : \;\; y_{ij} \in I^n, \text{ (Cf. (3.3.6)).}
\end{aligned}$$

Donc I possède la propriété $(Z_{2^{2^{s+1}}})$. □

Lemme 3.3.4. *Si I possède la propriété (Z_k), alors il existe un entier naturel $l \geq 1$, tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a $\overline{I^{n+l}} \subseteq I^n$.*

Démonstration. Soient x un élément non nul de R et $s = \nu_I(x)$. Donc $x \notin I^{s+1}$. Comme I possède la propriété (Z_k) (Cf. (3.3.1)), $\nu_I(x^k) < k(s+1) + b$. Par récurrence, on peut montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\nu_I(x^{k^n}) < k^n(s+1) + (k^{n-1} + ... + k + 1)b = k^n(s+1) + \frac{(k^n - 1)b}{k - 1}.$$

Donc

$$\frac{\nu_I(x^{k^n})}{k^n} < (s+1) + \frac{(1 - 1/k^n)b}{k - 1}.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + \frac{b + k - 1}{k - 1}. \tag{3.3.7}$$

En prenant $l = \left[\frac{b+k-1}{k-1}\right] + 1$, nous allons montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, l'inclusion :

$$\overline{I^{n+l}} \subseteq I^n.$$

Soit x un élément de R, on a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{I^{n+l}} &\Longrightarrow \bar{v}_I(x) \geq n + l \\ &\Longrightarrow v_I(x) + \frac{b+k-1}{k-1} \geq n + l \quad \text{(Cf. (3.3.7))} \\ &\Longrightarrow v_I(x) \geq n \\ &\Longrightarrow x \in I^n. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Proposition 3.3.5. *Soient R un anneau nœthérien, I un idéal de R, et k un entier naturel supérieur où égal à 2. Si I possède la propriété* (Z_k)*, alors* $\bar{I}$ *possède la propriété* (Z_k)*. En plus, si l'anneau R est analytiquement non-ramifié, alors la réciproque est vraie.*

Démonstration. Supposons que I possède la propriété (Z_k). Alors il existe un entier naturel $b \geq 0$, tel que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n.$$

D'après le lemme précédent, il existe un entier naturel $l \geq 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$\overline{I^{n+l}} \subset I^n. \tag{3.3.8}$$

Posons $d = b + l$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k} x_i \in (\bar{I})^{kn+d} &\Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} x_i \in \overline{I^{kn+d}} \\ &\Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b}, \ \text{(Cf. (3.3.8))} \\ &\Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n \subseteq (\bar{I})^n. \end{aligned}$$

Donc $\bar{I}$ possède la propriété (Z_k). Réciproquement, supposons que l'idéal $\bar{I}$ possède la propriété (Z_k). Alors il existe un entier naturel $s \geq 0$, tel que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k$ de R, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in (\bar{I})^{kn+s} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in (\bar{I})^n. \tag{3.3.9}$$

Si l'anneau R est analytiquement non-ramifié, alors d'après Rees (Cf. [?]), il existe un entier naturel $r \geq 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$\overline{I^{n+r}} \subset I^n. \tag{3.3.10}$$

Posons $c = s + kr$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+c} &\Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} x_i \in (\bar{I})^{k(n+r)+s} \\
&\Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in (\bar{I})^{n+r} \subseteq \overline{I^{n+r}}, \ \text{(Cf. (3.3.9)} \\
&\Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n, \ \text{(Cf. (3.3.10).}
\end{aligned}$$

Donc I possède la propriété (Z_k). □

Nous allons démontrer le principal résultat de ce chapitre (Cf. Théorème 3.3.7), qui sert à majorer le nombre de valuations de Rees associées à un idéal I d'un anneau R nœthérien analytiquement non-ramifié vérifiant la propriété (Z_k). Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.6. *Soient I un idéal d'un anneau nœthérien R et $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ ses valuation de Rees associées. Alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$, il existe un élément $x_i \in R$ tel que pour tout $j \neq i$:*

$$\nu_i(x_i)/e_i < \nu_j(x_i)/e_j,$$

où $e_i = \nu_i(I)$.

Démonstration. Soient pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$, $\mathfrak{p}_i$ l'idéal premier homogène de $S = \overline{R[IT, U]}/(UT - 1)$ associé à (U) tel que $R_{\nu_i} = S_{(\mathfrak{p}_i)}$. Notons $\tilde{\nu}_i$ l'extension de ν_i à $S_{\mathfrak{p}_i}$. Comme les idéaux $(\mathfrak{p}_i)_i$ sont deux à deux distincts, pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$, il existe un élément $h_i \notin \mathfrak{p}_i$ et $h_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Par conséquent $\tilde{\nu}_i(h_i) = 0$ et $\tilde{\nu}_j(h_i) \geq 1$ pour tout $j \neq i$. Comme les idéaux $(\mathfrak{p}_i)_i$ sont homogènes, on peut considérer que l'élément h_i est homogène (ie. $h_i = aT^n$, avec $a \in \overline{I^n}$). Nous distinguons trois cas :
<u>Si $n = 0$</u>, on peut prendre $x_i = a$.
<u>Si $n < 0$</u>, on a :

$$h_i = aT^n = aT^{n+1}U \in US \subset \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j,$$

ceci contredit le fait que $h_i \notin \mathfrak{p}_i$.
<u>Si $n > 0$</u>, on a :

$$\nu_i(a) = \tilde{\nu}_i(a) = \tilde{\nu}_i(aT^nU^n) = \tilde{\nu}_i(aT^n) + n\tilde{\nu}_i(U) = ne_i.$$

D'autre part, pour tout $j \neq i$, on a :

$$\nu_j(a) = \tilde{\nu}_j(a) = \tilde{\nu}_j(aT^nU^n) = \tilde{\nu}_j(aT^n) + n\tilde{\nu}_j(U) > ne_j.$$

On a donc : $\nu_i(a)/e_i < \nu_j(a)/e_j$. □

Théorème 3.3.7. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau nœthérien, k un entier naturel supérieur ou égal à 2, et I un idéal de R qui possède la propriété* (Z_k). *Alors I a au plus* $(k-1)$ *valuations de Rees associées.*

Démonstration. Soient $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ les valuations de Rees associées à I. Supposons que $r \geq k$. D'après le lemme 3.3.6, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, il existe un élément $a_i \in R$ tel que pour tout $j \neq i$, on a $\omega_i(a_i) < \omega_j(a_i)$, où $\omega_i = \nu_i/e_i$. On peut choisir les a_i de R tels que $\nu_i(a_i) > 0$. Soit

$$y_i = a_i^{e_i \prod_{j=1, j\neq i}^{r} e_j\omega_j(a_j)}.$$

Donc pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, et pour tout $j \neq i$, on a $\omega_i(y_i) < \omega_j(y_i)$, et

$$\omega_1(y_1) = \cdots = \omega_r(y_r) = \prod_{i=1}^{r} e_i\omega_i(a_i).$$

Posons $s = \prod_{i=1}^{r} e_i\omega_i(a_i)$. Soit q un nombre rationnel tel que pour tout $j \neq i$, on a :

$$\omega_i(y_i) + q \leq \omega_j(y_i).$$

Comme l'idéal I possède la propriété (Z_k), il existe un entier naturel b tel que pour tous $x_1, x_2, ..., x_k$ de R et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \in I^{kn+b} \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\} \ : \ x_i \in I^n.$$

De plus, d'après le lemme 3.3.4, il existe un entier naturel $l \geq 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$\overline{I^{n+l}} \subset I^n.$$

Prenons m un entier naturel vérifiant l'inégalité suivante :

$$m(k-1)q \geq k + b + l. \tag{3.3.11}$$

Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\omega_i(y_1^m y_2^m \cdots y_k^m) &= m\omega_i(y_i) + m \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \omega_i(y_j) \\
&\geq ms + m \sum_{j=1, j\neq i}^{k} (s+q) \\
&= ms + m(k-1)(s+q) \\
&= kms + (k-1)mq,
\end{aligned}$$

et pour tout $i \in \{k+1, ..., r\}$, on a :

$$\begin{aligned}\omega_i(y_1^m y_2^m \cdots y_k^m) &= m \sum_{j=1}^{k} \omega_i(y_j) \\ &\geq m \sum_{j=1}^{k} (s+q) \\ &= km(s+q) \\ &= kms + kmq.\end{aligned}$$

Donc $\forall i \in \{1, ..., r\}$, on a :

$$\begin{aligned}\omega_i(y_1^m y_2^m \cdots y_k^m) &\geq kms + (k-1)mq \\ &\geq k(sm+1) + (k-1)mq - k \\ &\geq k(sm+1) + b + l, \text{(Cf. (3.3.11))}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$y_1^m y_2^m \cdots y_k^m \in \overline{I^{k(sm+1)+b+l}}.$$

Donc

$$y_1^m y_2^m \cdots y_k^m \in I^{k(sm+1)+b}.$$

Sachant que l'idéal I possède la propriété (Z_k), il existe $i \in \{1, ...k\}$ tel que $y_i^m \in I^{(sm+1)}$, ce qui contredit le fait que $\omega_i(y_i^m) = sm$. □

Corollaire 3.3.8. *Soient R un anneau nœthérien analytiquement non-ramifié et I un idéal de R. I possède la propriété (Z_2), si et seulement si, I a exactement une seule valuation de Rees associée.*

Démonstration. D'après le théorème 3.3.7, il est clair que si I possède la propriété (Z_2), alors I a une seule valuation de Rees associée. Réciproquement, si I a une seule valuation de Rees associée, alors la fonction $\overline{\nu}_I$ définit une valuation à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Posons $b = 2l$ où l est l'entier naturel qui vérifie pour tout $n \geq 0$, l'inclusion $\overline{I^{n+l}} \subset I^n$ (Cf. [**?**]). Soient x_1, x_2 deux éléments de R tels que $x_1x_2 \in I^{2n+b}$. Alors $\overline{\nu}_I(x_1) + \overline{\nu}_I(x_2) = \overline{\nu}_I(x_1x_2) \geq 2n + b \geq 2(n+l)$. Par conséquent, $\overline{\nu}_I(x_1) \geq (n+l)$ ou $\overline{\nu}_I(x_2) \geq (n+l)$, par suite $x_1 \in \overline{I^{n+l}}$ ou $x_2 \in \overline{I^{n+l}}$. Donc $x_1 \in I^n$ ou $x_2 \in I^n$, car $\overline{I^{n+l}} \subset I^n$. Cela montre que I possède la propriété (Z_2). □

Remarque 3.3.9. *Ce dernier corollaire est une généralisation du critère "One-fiberedness" (Cf. [**?**], Proposition 2.8).*

Corollaire 3.3.10. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien analytiquement irréductible et I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *I possède la propriété (Z_2).*
2) *$I\widehat{R}$ possède la propriété (Z_2), où $\widehat{R}$ est le complété $\mathfrak{m}$-adique de R.*

Démonstration. Puisque l'anneau R est analytiquement irréductible, I et $I\widehat{R}$ ont le même nombre de valuations de Rees associées. Donc si I (resp. $I\widehat{R}$) possède la propriété (Z_2), alors I (resp. $I\widehat{R}$) a une seule valuation de Rees associée (Cf. Proposition 3.3.8). De ce fait, $I\widehat{R}$ (resp. I) a également une seule valuation de Rees associée. Donc $I\widehat{R}$ (resp. I) possède la propriété (Z_2) (Cf. Proposition 3.3.8). □

Définition 3.3.11. *Soient I un idéal d'un anneau nœthérien, et ν_1, ν_2 deux valuations de Rees associées à I. Nous disons que la topologie ν_1-adique et la topologie ν_2-adique sont linéairement équivalentes (ou ν_1 et ν_2 sont linéairement comparables), si et seulement si, il existe un entier naturel r tel que pour tout $x \in R$ non nul, on a :*

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x) \quad \textit{et} \quad \nu_2(x) \leq r\nu_1(x).$$

Notation 3.3.12. *Soient ν une valuation de Rees associée à un idéal I d'un anneau nœthérien R, et n un entier naturel. Nous notons :*
1) $\nu(I) = \min\{\nu(x) \quad \textit{tel que} \quad x \in I\}$.
2) $I_n(\nu) = \{x \in R \quad \textit{tel que} \quad \nu(x) \geq n\}$.

Proposition 3.3.13. *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Si toutes les valuations de Rees associées à I sont linéairement comparables, alors $\sqrt{I}$ est premier.*

Démonstration. Soient $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ les valuations de Rees associées à I. D'après le théorème de valuations de Rees, on sait que :

$$\overline{I} = \bigcap_{i=1}^{s} I_{e_i}(\nu_i), \text{ où } e_i = \nu_i(I).$$

Donc

$$\sqrt{\overline{I}} = \bigcap_{i=1}^{s} \sqrt{I_{e_i}(\nu_i)} = \bigcap_{i=1}^{s} I_1(\nu_i).$$

Comme toute les valuations de Rees $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$ sont linéairement comparables, on a :

$$I_1(\nu_1) = I_1(\nu_2) = \cdots = I_1(\nu_s),$$

donc $\sqrt{\overline{I}} = I_1(\nu_1)$, ce qui montre que $\sqrt{\overline{I}}$ est premier, il en est de même pour I, car $\sqrt{\overline{I}} = \sqrt{I}$. □

Corollaire 3.3.14. *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Si $\sqrt{I}$ n'est pas premier, alors I a au moins deux valuations de Rees non-linéairement comparables.*

Proposition 3.3.15. *Soient R un anneau nœthérien analytiquement non-ramifié et I un idéal de R dont le radical n'est pas premier. Si I possède la propriété (Z_3), alors I a exactement deux valuations de Rees associées.*

Démonstration. Cette proposition est une conséquence immediate du théorème 3.3.7 et du corollaire 3.3.14. □

3.4 Valuations divisorielles centrées dans un anneau analytiquement irréductible

Nous allons suivre, dans cette partie, les travaux de Swanson, Izumi et Rees sur les valuations divisorielles et l'équivalence linéaire des topologies I-adiques (Cf. [**? ? ?**]).

Soient R un anneau nœthérien intègre, K son corps de fractions, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R. En supposant que l'idéal $\mathfrak{p}$ est normal, nous allons donner un critère pour que l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ soit analytiquement irréductible (Cf. Proposition 3.4.5).

Lemme 3.4.1 (Cf. [**?**], Lemme 1.1)**.** *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien intègre analytiquement irréductible et $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de R. Alors pour toute valuation divisorielle ν de R centrée en $\mathfrak{m}$, il existe une seule valuation divisorielle $\widehat{\nu}$ de $\widehat{R}$ centrée en $\widehat{\mathfrak{m}}$ telle que pour tout $x \in R$, on a $\widehat{\nu}(x) = \nu(x)$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'existence de $\widehat{\nu}$. Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d] & R_\nu \arrow[d] \\ \widehat{R} \arrow[r, "\widehat{i}"] & \widehat{R_\nu} \end{tikzcd}$$

où $\widehat{R_\nu}$ est le completé $\mathfrak{m}_\nu$-adique de R_ν. L'anneau $\widehat{R_\nu}$ est un anneau de valuation discrète. Posons $\widehat{\nu}$ la valuation associée à $\widehat{R_\nu}$. Nous allons montrer que le morphisme $\widehat{i}$ est injectif. Supposons le contraire (ie. $\mathfrak{p} = \ker \widehat{i} \neq (0)$). Puisque l'anneau $\widehat{R_\nu}$ est intègre, l'idéal $\mathfrak{p}$ est premier. Notons μ la restriction de $\widehat{\nu}$ à $k(\mathfrak{p})$. Soient ν_0 une valuation de $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ centrée en $\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ et ν_1 une extension de μ au corps résiduel de

ν_0. Prenons $\nu_2 = \nu_0 \circ \nu_1$ la valuation composée des valuations ν_0 et ν_1 (Cf. [**?**]). Nous avons l'égalité

$$\text{rang rat.}\,\nu_2 = \text{rang rat.}\,\nu_0 + \text{rang rat.}\,\nu_1. \tag{3.4.1}$$

Comme $\widehat{R}$ est intègre, la hauteur de $\mathfrak{p}$ est supérieure ou égale à 1. Donc le rang rationnel de ν_0 est supérieur ou égal à 1. Nous en déduisons d'après l'égalité (3.4.1) que

$$\text{rang rat.}\,\nu_2 \geq 2. \tag{3.4.2}$$

De plus, on a :

$$\text{deg. tr.}_{k(\widehat{\mathfrak{m}})}\, k_{\nu_2} \geq \text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{m})}\, k_\nu. \tag{3.4.3}$$

Les inégalités (3.4.2) et (3.4.3) donnent

$$\text{deg. tr.}_{k(\widehat{\mathfrak{m}})}\, k_{\nu_2} + \text{rang rat.}\,\nu_2 \geq 2 + \text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{m})}\, k_\nu = \dim R + 1.$$

Ce qui contredit l'inégalité d'Abhyankar (Cf. [**?**]). Donc le morphisme $\widehat{i}$ est injectif. Soit x un élément de $\widehat{R}$. Posons $\widehat{\nu}(x) = s$ et $\widehat{\nu}(\widehat{\mathfrak{m}}) = r_1$. Pour tout entier naturel $n > s/r_1$, il existe un élément x' appartenant à R tel que $x - x' \in \widehat{\mathfrak{m}^n}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(x) &= \widehat{\nu}\Big((x - x') + x'\Big) \\ &= \widehat{\nu}(x') \\ &= \nu(x') \end{aligned}$$

Donc les valuations ν et $\widehat{\nu}$ ont le même groupe de valeurs (ie $\Gamma_\nu = \Gamma_{\widehat{\nu}}$). Maintenant, soient x et $y \neq 0$ deux éléments appartenant à $\widehat{R}$ tels que $x/y \in R_{\widehat{\nu}}$. Nous pouvons choisir deux éléments x' et y' appartenant à R tels que $\widehat{\nu}(x - x') > \widehat{\nu}(x)$ et $\widehat{\nu}(y - y') > \widehat{\nu}(y)$. Donc $\widehat{\nu}(x) = \nu(x')$ et $\widehat{\nu}(y) = \nu(y')$, par suite $x'/y' \in R_\nu$. Nous avons :

$$\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'} = \frac{x - x'}{x} \cdot \frac{x}{y} + \frac{y' - y}{y} \cdot \frac{x'}{y'} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\nu}}.$$

ce qui entraîne que ν et $\widehat{\nu}$ ont même corps résiduel (ie $k_{\widehat{\nu}} \simeq k_\nu$). Le fait que $\dim \widehat{R} = \dim R$ et $k(\widehat{\mathfrak{m}}) \simeq k(\mathfrak{m})$ entraîne que la restriction de la valuation $\widehat{\nu}$ au corps de fractions de $\widehat{R}$, que l'on note aussi $\widehat{\nu}$, est une valuation divisorielle centrée dans $\widehat{R}$ en $\widehat{\mathfrak{m}}$, et elle vérifie bien évidemment $\nu(x) = \widehat{\nu}(x)$ pour tout $x \in R$.

Montrons maintenant l'unicité de la valuation $\widehat{\nu}$. Soit $\tilde{\nu}$ une autre valuation divisorielle de $K(\widehat{R})$ centrée dans $\widehat{R}$ en $\widehat{\mathfrak{m}}$ qui vérifie $\nu(x) = \tilde{\nu}(x)$ pour tout $x \in R$. Prenons z un élément de $\widehat{R}$. Soient $\widehat{\nu}(z) = s_1$, $\tilde{\nu}(z) = s_2$ et $\tilde{\nu}(\mathfrak{m}) = r_2$. Alors pour tout entier naturel $n \geq \sup(s_1/r_1, s_2/r_2)$, il existe $z' \in R$ tel que $z - z' \in \mathfrak{m}^n\widehat{R}$. Par conséquent $\widehat{\nu}(z) = \widehat{\nu}(z')$ et $\tilde{\nu}(z) = \tilde{\nu}(z')$, comme $z' \in R$ et les valuations $\widehat{\nu}$ et $\tilde{\nu}$ sont égales sur R. Il en résulte que $\widehat{\nu}(z) = \tilde{\nu}(z)$. □

Proposition 3.4.2. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau intègre analytiquement irréductible et* ν *une valuation divisorielle de* R *centrée en* $\mathfrak{p}$*. Si la topologie* $\widehat{\nu}$*-adique et la topologie* $\widehat{\mathfrak{p}}$*-adique sont équivalentes, alors il en est de même pour la topologie* $\nu-$*adique et la topologie* $\mathfrak{p}-$*adique.*

Lemme 3.4.3. *Soient* R *un anneau intègre nœthérien et* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* R*. L'existence d'une valuation divisorielle* ν *centrée dans* R *en* $\mathfrak{p}$ *telle que la topologie* $\mathfrak{p}$*-adique et la topologie* ν*-adique sont équivalentes, nécessite que la localisation* $R_{\mathfrak{p}}$ *soit analytiquement irréductible.*

Démonstration. Soit ν une valuation divisorielle de R centrée en $\mathfrak{p}$ telle que la topologie $\mathfrak{p}$-adique et la topologie ν-adique sont équivalentes. Voyant ν comme une valuation divisorielle centrée en $R_{\mathfrak{p}}$ et que la topologie $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$-adique et la topologie ν-adique sont équivalentes nous permet de supposer que $(R, \mathfrak{p})$ est local et $\mathfrak{p}$ est son idéal maximal.

Soient $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n$ deux éléments de $\widehat{R}$ tels que $xy = 0$. D'après la démonstration du lemme 3.4.1, on sait que le morphisme $\widehat{i} : \widehat{R} \longrightarrow \widehat{R}_\nu$ est injectif. Soient $x' = \widehat{i}(x)$ et $y' = \widehat{i}(y)$. Nous avons $x'y' = 0$, et comme $\widehat{R}_\nu$ est intègre, $x' = 0$ ou $y' = 0$, par suite $x = 0$ ou $y = 0$ car $\widehat{i}$ est injectif. Donc $\widehat{R}$ est intègre. □

Nous rappelons le théorème d'Izumi (Cf. [**?**] ou [**?**]) qui s'énonce comme suit :

Théorème 3.4.4 (Théorème d'Izumi)**.** *Soient* (R, m) *un anneau intègre local et* K *son corps de fractions. Si* R *est analytiquement irréductible, alors toutes deux valuations divisorielles* ν_1, ν_2 *de* K *centrées en* $\mathfrak{m}$ *sont linéairement comparables.*

Proposition 3.4.5. *Soient* R *un anneau et* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier normal de* R*. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $R_{\mathfrak{p}}$ *est analytiquement irréductible.*
2) *Pour toutes valuations divisorielles* ν_1, ν_2 *centrées en* $\mathfrak{p}$*, il existe* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall x \in R \ : \ \nu_1(x) \leq r\nu_2(x)$$

Démonstration. On peut supposer que R est local et $\mathfrak{p}$ son idéal maximal.
1) $\Rightarrow$ 2) : Est une conséquence du théorème d'Izumi.
2) $\Rightarrow$ 1) : Soit ν une valuation divisorielle centrée en $\mathfrak{p}$ et $\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_s$ les valuations de Rees associés à $\mathfrak{p}$. Par hypothèse pour tout $i = 1, .., s$ il existe $r_s \geqslant 1$ tel que :

$$\forall x \in R \ : \ \nu(x) \leq \frac{r_s}{\nu_s(\mathfrak{p})}\nu_s(x).$$

En utilisant le théorème de valuations, on obtient :

$$I_{rn}(\nu) \subset \overline{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}^n,$$

où $r = \max_s\{r_s\}$. Donc la topologie ν-adique et la topologie $\mathfrak{p}$-adique sont linéairement équivalentes. Ce qui prouve que R est analytiquement irréductible, car pour toute valuation discrète ν de R, le complété ν-adique de R est un anneau intègre (Cf. Lemme 3.4.3). $\square$

Chapitre 4

Comparaison des valuations divisorielles

Ce chapitre présente différentes approches du théorème d'Izumi (Cf. Théorème 4.1.4). Plus précisément, nous allons présenter dans la première section quelques résultats élémentaires concernant les valuations divisorielles avec leurs démonstrations. La deuxième section est consacrée à la comparaison des valuations divisorielles. Nous allons donner une approche géométrique du théorème d'Izumi pour les anneaux analytiquement irréductibles de dimension quelconque en ajoutant la condition "ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1". De manière générale, nous allons montrer le résultat suivant : Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre nœthérien analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles associées à un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I telles que les centres E_1 et E_2 de $\widehat{\nu_1}$ et $\widehat{\nu_2}$ respectivement dans l'éclatement normalisé $\overline{X}_{\widehat{I}}$ de Spec $\widehat{R}$ le long de $\widehat{I} = I\widehat{R}$ sont liés en codimension 1. C'est-à-dire, qu'il existe une suite finie $Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$ de composantes irréductibles de $E_{\widehat{I}} = V(\widehat{I\mathcal{O}_{\overline{X}_{\widehat{I}}}})$, telles que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, $\mathrm{codim}(Y_i \cap Y_{i+1}, Y_{i+1}) = 1$. Alors les topologies ν_1-adique et ν_2-adique sont linéairement équivalentes.

Ensuite, nous en déduisons une nouvelle démonstration du théorème d'Izumi pour les anneaux analytiquement irréductibles de dimension deux, une démonstration différente de celles connues auparavant (Cf. [**? ? ?**]).

Toutes les démonstrations connues auparavant du théorème d'Izumi en dimension deux sont basées sur le fait que la matrice $M = (E_i.E_j)_{1 \leq i,j \leq s}$ est définie négative. En dimension supérieure où égale à trois, la matrice d'intersection n'a pas de sense. Pour cette raison, D. Rees utilise une démonstration par récurrence sur la dimension de R (Cf. [**?**]) quand la dimension de R est supérieure ou égale à trois. La démonstration qu'on donne dans cette thèse sous quelques hypothèses est directe en dimension quelconque (sans récurrence sur la dimension de R). Nous trouvons un remplacement géométrique en dimension supérieure pour la négativité de la matrice M qui est un phénomène spécifique en dimension deux.

4.1 Présentation du théorème d'Izumi

Dans cette section nous allons donner une présentation du théorème d'Izumi.

Proposition 4.1.1. *Soient R un anneau analytiquement non-ramifié et I un idéal de R. Alors il existe une constante réelle λ dépendant de I telle que pour tout $x \in R$:*

$$\overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + \lambda.$$

Démonstration. Sachant que l'anneau R est analytiquement non-ramifié, il existe d'après Rees [**?**] un entier naturel λ tel que pour tout entier naturel $n \geq \lambda$:

$$\overline{I^n} \subset I^{n-\lambda}.$$

Soit x un élément de R, et soit $p = \overline{\nu}(x)$. Le fait que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$\overline{I^n} = \{x \in R \ \mid \ \overline{\nu}_I(x) \geq n\},$$

entraîne que $x \in \overline{I^{[p]}}$. Donc $x \in I^{[p]-\lambda}$. Ceci implique que $\overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + (\lambda + 1)$. □

Proposition 4.1.2. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien analytiquement non-ramifié et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *Il existe deux constantes réelles a et b telles que pour tous x et y appartenant à R, nous avons :*

$$\nu_I(xy) \leq a(\nu_I(x) + \nu_I(y)) + b.$$

2) *Il existe une constante réelle c telle que pour tous x et y appartenant à R, nous avons :*

$$\overline{\nu}_I(xy) \leq c(\overline{\nu}_I(x) + \overline{\nu}_I(y)).$$

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tous x et y de R, nous avons :

$$\nu_I(xy) \leq a(\nu_I(x) + \nu_I(y)) + b.$$

Alors pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{\nu_I(x^n y^n)}{n} \leq a\Big(\frac{\nu_I(x^n)}{n} + \frac{\nu_I(y^n)}{n}\Big) + \frac{b}{n}.$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$\overline{\nu}_I(xy) \leq a(\overline{\nu}_I(x) + \overline{\nu}_I(y)).$$

On peut donc prendre $c = a$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Supposons qu'il existe un réel c tel que pour tous x et y de R, nous avons :

$$\overline{\nu}_I(xy) \leq c(\overline{\nu}_I(x) + \overline{\nu}_I(y)).$$

Pour tout x appartenant à R, nous avons :

$$\nu_I(x) \leq \overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + \lambda$$

(Cf. Proposition 4.1.1). Donc pour tous x et y appartenant à R, on a :

$$\begin{aligned}\nu_I(xy) &\leq \overline{\nu}_I(xy)\\ &\leq c(\overline{\nu}_I(x) + \overline{\nu}_I(y))\\ &\leq c(\nu_I(x) + \nu_I(y)) + 2c\lambda.\end{aligned}$$

On peut donc prendre $a = c$ et $b = 2c\lambda$. □

Proposition 4.1.3 (Cf. [**?**]). *Soient R un anneau nœthérien et I un idéal de R. Si toutes les valuations de Rees associées à I sont linéairement comparables, alors il existe une constante réelle c telle que pour tous x et y appartenant à R :*

$$\overline{\nu}_I(xy) \leq c(\overline{\nu}_I(x) + \overline{\nu}_I(y)).$$

Démonstration. Soient $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ les valuations de Rees associées à I et $e_i = \nu_i(I)$. Comme toutes les valuations de Rees associées à I sont linéairement comparables, pout tous $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s$, il existe un entier naturel r_{ij} telles que

$$\forall x \in R - \{0\}, \quad \text{on a} \quad \nu_i(x) \leq r_{ij}\nu_j(x).$$

Soit

$$c = \max_{1\leq i,j\leq s}\{\frac{e_i r_{ij}}{e_j}, 1\}.$$

D'après le théorème de valuations de Rees, pour tout x appartenant à R, on a :

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_{1\leq i\leq s}\frac{\nu_i(x)}{e_i}.$$

Soient x et y deux éléments de R. Alors il existe deux valuations de Rees ν_{i_1} et ν_{i_2} associées à I telles que

$$\overline{\nu}_I(x) = \frac{\nu_{i_1}(x)}{e_{i_1}} \;\; et \;\; \overline{\nu}_I(y) = \frac{\nu_{i_2}(x)}{e_{i_2}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_I(xy) &\le \frac{\nu_{i_1}(xy)}{e_{i_1}}\\ &\le \frac{\nu_{i_1}(x)}{e_{i_1}} + \frac{\nu_{i_1}(y)}{e_{i_1}}\\ &\le \overline{\nu}_I(x) + \frac{e_{i_2} r_{i_1 i_2}}{e_{i_1}} \cdot \frac{\nu_{i_2}(y)}{e_{i_2}}\\ &\le \overline{\nu}_I(x) + c\overline{\nu}_I(y)\\ &\le c\Big(\overline{\nu}_I(x) + \overline{\nu}_I(y)\Big).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition. □

Voici maintenant la version générale du théorème d'Izumi :

Théorème 4.1.4 (Théorème d'Izumi, Cf. [**? ?**]). *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local nœthérien analytiquement irréductible. Alors pour toutes valuations divisorielles* ν_1, ν_2 *centrées en* $\mathfrak{m}$*, il existe* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* x *non nul appartenant à* R *:*

$$\nu_1(x) \le r\nu_2(x).$$

Remarque 4.1.5. *En utilisant les deux propositions précédentes, il est clair que si l'anneau* R *est complet, alors les deux conditions* 1) *et* 2) *de la proposition 4.1.2 sont vérifiées en supposant que l'idéal* I *est* $\mathfrak{m}$*-primaire, car toutes les valuations de Rees associées un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire d'un anneau complet sont divisorielles (Cf. Théorème 1.3.7).*

4.2 Comparaison des valuations divisorielles

Soient $X = \operatorname{Spec} R$ où R est un anneau local nœthérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et K son corps de fractions. Pour tout idéal I de R, nous notons $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long de I et $E_I = V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I})_{red}$ le sous-schéma réduit de $\overline{X}_I$ associé au faisceau $I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$. Soient E_1 et E_2 deux composantes irréductibles de E_I. Nous disons que E_1 et E_2 sont liées en codimension 1, s'il existe une suite finie $Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$ de composantes irréductibles de E_I telles que pour tout $1 \le i \le s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. De même, soient ν_1 et ν_2 sont deux valuations divisorielles de K centrées dans R en $\mathfrak{m}$. Nous disons que ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1, s'il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que le centre de ν_1 et le centre de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1.

4.2.1 Démonstration du théorème d'Izumi

Supposons que l'anneau R est analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 sont deux valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{m}$. Le but de cette section est de donner une nouvelle démonstration du théorème d'Izumi dans les cas suivants :

(I) : R est de dimension quelconque et les extensions de ν_1, ν_2 dans le corps de fractions de $\widehat{R}$ sont liées en codimension 1 (Cf. Théorème 4.2.11).

(II) : R est de dimension inférieure ou égale à 2 et ν_1, ν_2 sont deux valuations divisorielles quelconques (Cf. Théorème 4.2.14).

4.2.2 Le cas (I)

Notation 4.2.1. *Si $D = \sum n_i D_i$ est un diviseur de Weil d'un schéma X et $Y \subset X$ un sous-schéma de X, nous notons :*

$$D \cap |Y| = \sum_{D_i \subset Y} n_i D_i$$

Définition 4.2.2. *Un anneau R est dit équidimensionnel, si toute les composantes irréductibles de* Spec *R ont la même dimension.*

Définition 4.2.3. *Un anneau local $(R, \mathfrak{m})$ est dit quasi-unmixed, si son complété $\mathfrak{m}$-adique est équidimensionnel. Un anneau R non nécessairement local est dit localement quasi-unmixed, si $R_\mathfrak{m}$ est quasi-unmixed pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R.*

Exemple 4.2.4. Les anneaux locaux analytiquement irréductibles sont des anneaux quasi-unmixed.

Théorème 4.2.5 (Cf. [**?**], Théorème 18.13)**.** *Soit R un anneau nœthérien quasi-unmixed. Alors nous avons :*
1) *L'anneau $R_\mathfrak{p}$ est quasi-unmixed pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R.*
2) *L'anneau $R[X_1, \cdots, X_n]$ est localement quasi-unmixed.*
3) *L'anneau R est universellement caténaire.*

Corollaire 4.2.6. *Tout anneau local nœthérien analytiquement irréductible est universellement caténaire.*

Théorème 4.2.7 (Cf. [**?**], Théorème 18.23)**.** *Soient R un anneau local et I un idéal propre de R. Considérons les conditions suivantes :*
1) *R est quasi-unmixed.*
2) *$B(I) = R \oplus IT \oplus \cdots I^nT^n \oplus \cdots$ est localement quasi-unmixed.*
3) *$R(I) = \cdots RT^{-2} \oplus RT^{-1} \oplus R \oplus IT \oplus \cdots I^nT^n \oplus \cdots$ est localement quasi-unmixed.*

Nous avons : 1) $\Longleftrightarrow$ 3)*, et si* $\operatorname{ht} I > 0$*, alors les trois conditions sont équivalentes.*

Corollaire 4.2.8. *Si* $(R, \mathfrak{m})$ *est un anneau de Nagata local analytiquement irréductible et* $I \neq (0)$ *un idéal de* R*, alors l'anneau* $B(I)$ *et sa normalisation* $S(I) = \overline{B(I)}$ *sont universellement caténaires.*

Démonstration. Comme les anneaux analytiquement irréductibles sont des anneaux quasi-unmixed, l'anneau $B(I)$ est universellement caténaire (Cf. Théorème 4.2.5). Si de plus R est de Nagata, alors $B(I)$ est aussi de Nagata, par suite $S(I)$ est une $B(I)$-algèbre de type fini. Donc $S(I)$ est universellement caténaire, car toute algèbre de type finie sur un anneau universellement caténaire est universellement caténaire. □

Proposition 4.2.9. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata analytiquement irréductible et* ν_1, ν_2 *deux valuations divisorielles de* $K(R)$ *centrées en* $\mathfrak{m}$*. Si* ν_1 *et* ν_2 *sont liées en codimension* 1*, alors leurs extensions* $\widehat{\nu_1}$ *et* $\widehat{\nu_2}$ *dans* $\widehat{R}$ *sont également liées en codimension 1.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que les centres de ν_1 et ν_2 sont liés en codimension 1. Soit E_1 (resp. E_2) le centre de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X}_I$, il existe donc une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I telles que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Par conséquent, nous pouvons supposer que la codimension de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 est égale à 1. Soient

$$S(I) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \overline{I^n} T^n$$

et

$$S(I\widehat{R}) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \overline{I^n \widehat{R}} T^n$$

les algèbres graduées définies par les filtrations $\{\overline{I^n}\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{\overline{I^n \widehat{R}}\}_{n=0}^{+\infty}$ respectivement. Les deux diviseurs E_1 et E_2 sont définis respectivement par deux idéaux premiers homogènes $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ de $S(I)$ tels que :

$$\operatorname{ht} \mathfrak{q}_1 = \operatorname{ht} \mathfrak{q}_2 = 1$$

et

$$IS(I) \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2.$$

Nous avons donc $R_{\nu_1} = S(I)_{(\mathfrak{q}_1)}$ et $R_{\nu_2} = S(I)_{(\mathfrak{q}_2)}$. Comme le morphisme naturel $R \hookrightarrow \widehat{R}$ est fidèlement plat et I est $\mathfrak{m}$-primaire, $\overline{I^n \widehat{R}} = \widehat{\overline{I^n} R}$.

Par suite,

$$S(I)/IS(I) \cong S(I\widehat{R})/IS(I\widehat{R}).$$

Pour finir la démonstration, on a besoin de l'affirmation suivante :

Affirmation 4.2.10. *Pour tout $i = 1, 2$, il existe un unique idéal premier homogène Q_i minimal de $IS(I\widehat{R})$ tel que :*

$$Q_i = \mathfrak{q}_i S(I\widehat{R}).$$

D'abord, admettons que cette affirmation et finissons la preuve de la proposition. On a :

$$(Q_1 + Q_2) = (\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)S(I\widehat{R}).$$

Par fidèle platitude de l'extension $S(I) \longrightarrow S(I\widehat{R})$, nous obtenons

$$\mathrm{ht}(Q_1 + Q_2) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2).$$

De plus, comme les anneaux R et $\widehat{R}$ sont analytiquement irréductibles, les anneaux $S(I)$ et $S(I\widehat{R})$ sont universellement caténaires (Cf. Corollaire 4.2.8). Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}((Q_1 + Q_2)/Q_2) &= \mathrm{ht}(Q_1 + Q_2) - \mathrm{ht}\, Q_2 \\ &= \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2) - \mathrm{ht}\, \mathfrak{q}_2 \\ &= \mathrm{ht}((\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)/\mathfrak{q}_2). \end{aligned}$$

Par construction de $\widehat{\nu_1}$ (resp. $\widehat{\nu_2}$), et l'unicité de Q_1 (resp. Q_2), on obtient que le centre $\widehat{E_1}$ (resp. $\widehat{E_2}$) de $\widehat{\nu_1}$ (resp. $\widehat{\nu_2}$) dans l'éclatement normalisé de Spec $\widehat{R}$ le long de $I\widehat{R}$ est définie par l'idéal homogène Q_1 (resp. Q_2). Nous savons que la codimension de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 est égale à la hauteur de $(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)/\mathfrak{q}_2$ et ainsi la codimension de $\widehat{E_1} \cap \widehat{E_2}$ dans $\widehat{E_2}$ est égale à la hauteur de $(Q_1 + Q_2)/Q_2$. Par conséquent $\widehat{E_1}$ et $\widehat{E_2}$ sont liés en codimension 1. □

Démonstration de l'affirmation 4.2.10 : Le fait que le morphisme $S(I) \longrightarrow S(I\widehat{R})$ est fidèlement plat entraîne que l'idéal $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$ n'a pas d'idéaux premiers associés plongés. Pour tout idéal premier minimal $\tilde{Q}_1$ de $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$, l'anneau $S(I\widehat{R})_{(\tilde{Q}_1)}$ est un anneau de valuation discrète. La valuation $\widehat{\nu_1}$ associée à cet anneau est une extension de ν_1 à $\widehat{R}$. Comme cette valuation $\widehat{\nu_1}$ est unique (Cf. lemme 3.4.1), $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$ admet un unique idéal premier Q_1 associé. Par conséquent, $\sqrt{\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})} = Q_1$. De plus, d'après le lemme 3.4.1, les valuations ν_1 et $\widehat{\nu_1}$ ont le même groupe de valeurs, ce qui implique que :

$$\nu_1\Big(\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R}) \cap S(I\widehat{R})_{(Q_1)}\Big) = \widehat{\nu_1}\Big(\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R}) \cap S(I\widehat{R})_{(Q_1)}\Big) = 1.$$

Donc

$$\mathfrak{q}_1 S(\widehat{IR})_{(Q_1)} = Q_1 S(\widehat{IR})_{(Q_1)}.$$

Ceci donne :

$$\mathfrak{q}_1 S(\widehat{IR})_{Q_1} = Q_1 S(\widehat{IR})_{Q_1}.$$

D'après cette dernière égalité et le fait que Q_1 est le seul idéal premier associé à $\mathfrak{q}_1 S(\widehat{IR})$, il résulte que $\mathfrak{q}_1 S(\widehat{IR}) = Q_1$. De façon analogue, nous montrons que $\mathfrak{q}_2 S(\widehat{IR}) = Q_2$. □

Théorème 4.2.11. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{m}$. Si $\widehat{\nu_1}$ et $\widehat{\nu_2}$ sont liées en codimension 1, alors il existe un entier naturel $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout x non nul appartenant à R, on a :*

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que R est complet et que ν_1, ν_2 sont liées en codimension 1. Alors par définition, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que le centre de ν_1 et le centre de ν_2 dans $\overline{X_I}$ sont liés en codimension 1. Soit E_1 (resp. E_2) le centre de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X_I}$. Il existe donc une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I telles que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Comme $\overline{X_I}$ est normal et l'anneau R est de Nagata, l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{X_I}, Y_i}$ est un anneau de valuation divisorielle de R centrée en $\mathfrak{m}$. Donc pour montrer le théorème, nous pouvons supposer que $E_1 \cap E_2$ est de codimension 1 dans E_2. Notons D le diviseur de E_2 défini par

$$D := E_1 \cap E_2.$$

Soient x un élément arbitraire non nul appartenant à R et $t \in K(R)$ un paramètre régulier de R_{ν_2} (i.e. $\nu_2(t) = 1$). Soient $l = \nu_1(x)$ et $m = \nu_2(x)$. En regardant l'ensemble $E_2 \subseteq \mathbb{P}^n_k$ comme une variété projective sur le corps résiduel k de R, la restriction de $\frac{x}{t^m}$ sur E_2 est une fonction rationnelle sur E_2 qui n'est pas identiquement nulle. Soient $V(t)$ le sous-schéma de $\overline{X_I}$ défini par t et B le sous-schéma de E_2 défini par

$$B := E_2 \cap (\overline{V(t) - E_2}).$$

Notons $\varphi : \mathbb{P}^n_{\overline{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ le morphisme naturel induit par l'inclusion $k \subset \overline{k}$, où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k, et $\overline{E}_2$ (resp. $\overline{D}$, $\overline{B}$) l'image réciproque de E_2 (resp. D, B) dans $\mathbb{P}^n_{\overline{k}}$.

Soit ξ un point régulier de $\overline{E}_2 - (\overline{D} \cup \overline{B})$. Prenons L un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^n_{\overline{k}}$ de dimension $n - \dim\ E_2 + 1$ qui contient ξ et qui intersecte $\overline{E}_2$ transversalement en ξ. L'intersection $C := L \cap \overline{E}_2$ est une courbe, réduite et irréductible dans un voisinage de ξ. Soit Y l'unique composante irréductible de C qui passe par ξ ; par construction, Y est réduite. Soient $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\overline{k}}$ l'inclusion naturelle, $\psi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ une résolution des singularités de Y, et $\tilde{E_2}$ (resp. $\tilde{B}$ et $\tilde{D}$) la pré-image naturelle dans $\tilde{Y}$ de E_2 (resp. B et D).

Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, hook] & & \overline{B} \arrow[d, hook] & & & \tilde{B} \arrow[d, hook] \\
\overline{X}_I & E_2 \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n_k & \mathbb{P}^n_{\overline{k}} \arrow[l, "\varphi"'] & \overline{E}_2 \arrow[l, hook', "i_1"'] & Y \arrow[l, hook', "i_2"'] & \tilde{Y} \arrow[l, "\psi"'] \\
 & D \arrow[u, hook] & & \overline{D} \arrow[u, hook] & & & \tilde{D} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Notons $\phi = \varphi \circ i_1 \circ i_2 \circ \psi$, où i_1, i_2 sont les injections naturelles. Soient maintenant $B = B_1 \cup ... \cup B_s$ la décomposition de B en composantes irréductibles. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$, soient $V_{i1}, ..., V_{ik_i}$ toutes les composantes irréductibles de $V \setminus E_2$ qui contiennent B_i pour tous $i \in \{1, ..., s\}$ et $j \in \{1, ..., k_i\}$, on a :

$$B_i \subset V_{ij} \cap E_2 \text{ et } V_{ij} \neq E_2.$$

En tout point $\xi \in E_2 - B$ la fonction $\frac{x}{t^m}$ est régulière en codimension 1, elle est donc régulière car $\overline{X}_I$ est normal. Soit ν_{ij} la valuation associée à V_{ij}. Pour tous $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq k_i$, soit

$$t_{ij} \in \bigcap_{i=1}^{s} O_{\overline{X}_I, B_i}$$

tel que :

$$\nu_{ij}(t_{ij}) \geq \nu_{ij}(t). \tag{4.2.1}$$

Posons pour tout $1 \leq i \leq s$:

$$t_i = \prod_{j=1}^{k_i} t_{ij}.$$

Il est clair que la fonction t_i est régulière sur Spec $O_{\overline{X}_I, B_i}$, et comme $Y \not\subset \overline{B}$, nous pouvons supposer que cette fonction ne s'annule pas identiquement sur Y. En particulier le pullback de t_i définit une fonction rationnelle sur $\tilde{Y}$ non identiquement nulle, qui est régulière sur $\phi^{-1}(B_i)$. L'inégalité (4.2.1) entraîne :

$$\frac{x}{t^m}\prod_{i=1}^{s} t_i^m \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\overline{X}_I,B_i}. \tag{4.2.2}$$

Soit H_i le diviseur de $\tilde{Y}$ défini par $H_i = (\phi^*(t_i))_0 \cap |\phi^{-1}(B_i)|$ (Cf. Notation 4.2.1). La fonction $\phi^*(\frac{x}{t^m})$ n'a pas de pôles dans $\tilde{Y} - \tilde{B}$ et la fonction $\phi^*(\frac{x}{t^m}\prod_{i=1}^{s} t_i^m)$ n'a pas de pôles dans $\tilde{B}$ (Cf. (4.2.2)). Alors

$$\deg(\phi^*(\frac{x}{t^m}))_\infty \leq \deg\Big((\phi^*(\prod_{i=1}^{s} t_i^m) \cap |\tilde{B}|)_0\Big).$$

Par suite,

$$\deg(\phi^*(\frac{x}{t^m}))_\infty \leq m\sum_{i=1}^{s}\deg H_i. \tag{4.2.3}$$

Soient $u \in \mathcal{O}_{\overline{X}_I}(-E_1) \setminus \mathcal{O}_{\overline{X}_I}(-E_2)$ et $p = \nu_1(u)$. Nous distinguons deux cas :
<u>Cas 1</u> : $l - m\nu_1(t) \leq 0$.
<u>Cas 2</u> : $l - m\nu_1(t) > 0$.
Dans le cas 1, on a bien $\nu_1(x) \leq \nu_1(t)\nu_2(x)$, ce qui implique le résultat recherché. Il reste maintenant à démontrer le théorème dans le cas 2. Supposons $l - m\nu_1(t) > 0$. Alors par la définition de u et p, la fonction $x^{2p}/(t^{2mp}u^{l-m\nu_1(t)})$ s'annule sur D. Ainsi sa restriction à $L \cap \overline{E_2}$ s'annule sur $L \cap \overline{D}$. Donc

$$\deg(\phi^*(\frac{x}{t^m}))_0 \geq \frac{l - m\nu_1(t)}{2p}\deg\phi^*((u)_0 \cap \tilde{D}) \geq \frac{l - m\nu_1(t)}{2p}. \tag{4.2.4}$$

Sachant que tout diviseur d'une fonction rationnelle sur $\tilde{Y}$ est de degré zéro, alors d'après les deux inégalités (4.2.3) et (4.2.4), nous obtenons

$$\frac{l - m\nu_1(t)}{2p} \leq m\sum_{i=1}^{s}\deg H_i.$$

Par suite,

$$\nu_1(x) \leq \Big(\nu_1(t) + 2p\sum_{i=1}^{s}\deg H_i\Big)\nu_2(x),$$

(on rappelle que $l = \nu_1(x)$ et $m = \nu_2(x)$).

Ce qui achève la démonstration. $\square$

4.2.3 Le cas (II)

Pour démontrer le théorème d'Izumi dans ce cas (Cf. Théorème 4.2.14), nous admettons le résultat suivant qui sera démontrer dans le chapitre cinq :

Lemme 4.2.12 (Cf. Chap. 5, Corollaire 5.2.10)**.** *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata normal et de dimension inférieure ou égale à 2, et* v_1 *et* v_2 *deux valuations divisorielles de* R *centrées en* $\mathfrak{m}$. *Alors* v_1 *et* v_2 *sont liées en codimension* 1.

Nous aurons besoin au lemme suivant :

Lemme 4.2.13. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local intègre complet et* $\overline{R}$ *la normalisation de* R. *Alors pour toute valuation divisorielle* v *de* R *centrée en* $\mathfrak{m}$, *il existe une valuation divisorielle* $\overline{v}$ *de* $\overline{R}$ *centrée en* $\overline{\mathfrak{m}}$ *telle que :*

$$\forall x \in R, \quad \textit{on a } \overline{v}(x) = v(x).$$

Où $\overline{\mathfrak{m}}$ *est l'idéal maximal de* $\overline{R}$[1].

Démonstration. On a bien l'inclusion :

$$R \subseteq \overline{R} \subseteq R_v.$$

Notons $\overline{v}$ l'extension de v dans $\overline{R}$. Puisque R est analytiquement irréductible, l'anneau $\overline{R}$ est local et $\overline{\mathfrak{m}}$ est son idéal maximal [**?**]. La valuation $\overline{v}$ est donc centrée dans $\overline{R}$ en $\overline{\mathfrak{m}}$. De plus, comme v est divisorielle,

$$\operatorname{ht} \mathfrak{m} = \operatorname{ht} \overline{\mathfrak{m}}$$

et

$$\text{deg. tr.}_{k(\mathfrak{m})}\, k(\overline{\mathfrak{m}}) = 0,$$

il en résulte que la valuation $\overline{v}$ est aussi divisorielle. □

Théorème 4.2.14. *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local nœthérien analytiquement irréductible de dimension inférieure ou égale à deux. Alors pour tout couple* v_1, v_2 *de valuations divisorielles centrées en* $\mathfrak{m}$, *il existe un entier naturel* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* x *non nul appartenant à* R, *on a :*

$$v_1(x) \leq r v_2(x).$$

[1] *Sous les hypothèses de ce lemme, la normalisation de R est anneau local (Cf. [**?**]), Proposition 2.14, (c), page 344).*

Démonstration. Si la dimension de R est égale à 1, alors :

$$R_{v_1} = R_{v_2} = \overline{R}.$$

Cela signifie que $v_1(x) = v_2(x)$ pour tout x non nul appartenant à R. Supposons maintenant que R est de dimension égale à 2. D'après les lemmes précédents (Cf. Lemme 3.4.1, lemme 4.2.13), il nous suffit de montrer le théorème en supposant que R est intègre, normal et complet. Puisque tout anneau nœthérien complet est un anneau de Nagata, il en résulte que v_1 et v_2 sont liées en codimension 1 (Cf. Lemme 4.2.12). Par conséquent, le théorème devient donc une conséquence immédiate du cas (I) (Cf. Théorème 4.2.11). □

4.3 Exemples

Exemple 4.3.1. Dans cet exemple, nous allons montrer qu'on peut trouver deux valuations divisorielles non-linéairement comparables centrées dans un anneau qui n'est pas analytiquement irréductible.

Soient

$$R = \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{(Y^2 - X^2 - X^3)} = \mathbb{C}[x, y].$$

où x, y sont respectivement les images naturelles de X, Y dans R. Prenons $\mathfrak{m} = (x, y)$ l'idéal maximal de R.

Soient $\pi : Y \longrightarrow X = \operatorname{Spec} R$ l'éclatement de X le long de $\mathfrak{m}$, et Y_1 et Y_2 les deux cartes affines de Y :

$$Y_1 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\Big[x, \frac{y}{x}\Big],$$
$$Y_2 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}\Big[y, \frac{x}{y}\Big].$$

Les restrictions π_1 (resp. π_2) de π sur Y_1 (resp. Y_2) sont les morphismes $Y_1 \longrightarrow X$ (resp. $Y_2 \longrightarrow X$) donnés par les homomorphismes d'anneaux suivants :

$$\pi_1^* : \mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1} = \mathbb{C}\Big[x, \frac{y}{x}\Big]$$
$$\pi_2^* : \mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_2} = \mathbb{C}\Big[y, \frac{x}{y}\Big].$$

Le diviseur exceptionnel $E_{\mathfrak{m}}$ est défini dans la carte Y_1 par l'équation $x = 0$. Autrement dit,

$$E_{\mathfrak{m}} \cap Y_1 = \pi_1^{-1}\{\mathfrak{m}\} = V(x),$$

et comme dans l'anneau $\mathcal{O}_{Y_1}$, nous avons :

$$(x) = \Big(\frac{y}{x} - 1\Big)\Big(\frac{y}{x} + 1\Big),$$

alors $E_{\mathfrak{m}} \cap Y_1$ a deux points génériques (Cf. FIG 4.1) :

$$\mathfrak{p}_1 = \Big(\frac{y}{x} - 1, x\Big),$$

et

$$\mathfrak{p}_2 = \Big(\frac{y}{x} + 1, x\Big).$$

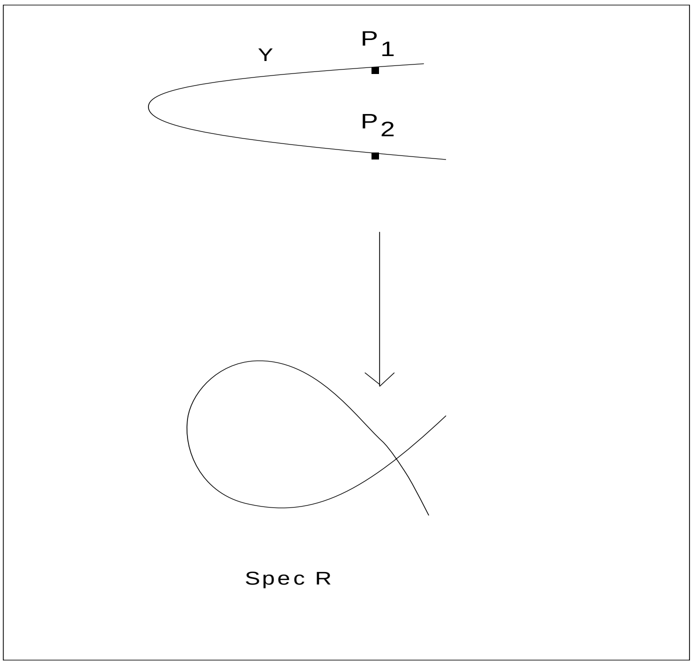

FIG. 4.1 –

Soient ν_1 (resp. ν_2) les valuations divisorielles de R définies par $\mathfrak{p}_1$ (resp. $\mathfrak{p}_2$). Nous avons :

$$R_{\nu_1} = \Big(\mathbb{C}\Big[x, \frac{y}{x}\Big]\Big)_{(\mathfrak{p}_1)} \cong \mathbb{C}\Big[\frac{y}{x}\Big]_{(\frac{y}{x}+1)},$$

et

$$R_{\nu_2} = \Big(\mathbb{C}\Big[x, \frac{y}{x}\Big]\Big)_{(\mathfrak{p}_2)} \cong \mathbb{C}\Big[\frac{y}{x}\Big]_{(\frac{y}{x}-1)}.$$

Soient

$$y - x\sqrt{1+x} = y - x + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i x^i,$$

et

$$y + x\sqrt{1+x} = y - x - \sum_{i=2}^{+\infty} a_i x^i$$

les développements de Taylor des fonctions $x \longmapsto y - x\sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto y + x\sqrt{1+x}$. Considérons $\alpha = (\alpha_n)_n$ et $\beta = (\beta_n)_n$ les deux suites de Cauchy de R (par rapport a la topologie (x, y)-adique) définies comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_1 & = y - x \\ \alpha_n & = y - x + \sum_{i=2}^{n} a_i x^i, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta_1 & = y + x \\ \beta_n & = y -' x + \sum_{i=2}^{n} a_i x^i. \end{cases}$$

IL est clair que pour tout $n \geq 0$, nous avons :

$$\begin{cases} \nu_1(\alpha_n) & = n + 1 \\ \nu_1(\beta_n) & = 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nu_2(\alpha_n) & = 1 \\ \nu_2(\beta_n) & = n + 1. \end{cases}$$

Soient

$$\widehat{R} = \frac{\mathbb{C}[[X, Y]]}{(Y - X\sqrt{1+X})(Y + X\sqrt{1+X})}$$

le complété $\mathfrak{m}$-adique de R, et $\widehat{\nu_1}$ (resp.$\widehat{\nu_2}$) les extensions de ν_1 (resp.ν_2) dans $\widehat{R}$. Nous avons :

$$\left(\widehat{\nu_1}(\alpha), \widehat{\nu_2}(\alpha)\right) = (+\infty, 1)$$

et

$$\left(\widehat{\nu_1}(\beta), \widehat{\nu_2}(\beta)\right) = (1, +\infty).$$

Ceci montre que les valuations divisorielles $\widehat{\nu_1}, \widehat{\nu_2}$ ne sont pas linéairement comparables.

Exemple 4.3.2. Soit s un entier naturel. Prenons

$$R = \frac{\mathbb{C}[[x_1, ..., x_n]]}{(x_n^{n+s} - \prod_{i=1}^{n-1} x_i)},$$

et $I = (x_1, x_2, ..., x_n)R$. Donc I admet s valuations divisorielles associées $v_1, \cdots, v_s$ (Cf. Exemple 2.2.2), telles que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, nous avons :

$$\begin{cases} v_i(x_1) & = 1 \\ v_i(x_2) & = 1 \\ \quad \vdots & \\ v_i(x_{i-1}) & = 1 \\ v_i(x_i) & = s+2 \\ v_i(x_{i+1}) & = 1 \\ \quad \vdots & \\ v_i(x_n) & = 1. \end{cases}$$

Donc $\forall i \neq j, \forall x \in R,$ nous avons : $v_i(x) \leq (s+2)v_j(x)$.

Chapitre 5

Valuations divisorielles et connexité en codimension 1

Soient $X = \operatorname{Spec} R$ où R est un anneau local nœthérien intègre, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et I un idéal de R. Nous notons $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long de I et $E_I = V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I})_{red}$ le sous-schéma réduit de $\overline{X}_I$ associé au faisceau $I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$. En suivant les travaux de R. Hartshorne concernant la connexité en codimension (Cf. [**?**]), et ceux de M. Spivakovsky sur les valuations divisorielles (Cf. [**?**]), nous posons dans ce chapitre les deux questions suivantes :

1. Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, intègre, normal et complet. Pour toutes valuations divisorielles ν_1, ν_2 de R centrées en $\mathfrak{m}$, existe-t-il un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1 (Cf. Définition 5.2.3) ?
2. Soient X un schéma intègre et normal, x un point de X tel que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est analytiquement irréductible. Le cône tangent $C_{X,x}$ de X en x est-il connexe en codimension 1 (Cf. Définition 5.1.1) ?

A l'aide du théorème principal de Zariski (Cf. [**?**]), nous démontrons que la première question a une réponse positive si la dimension de X est inférieure ou égale à 2, (Cf. Proposition 5.3.1). Puis nous montrons, quelque soit la dimension de X, si la deuxième question a une réponse affirmative, alors il est de même pour la première question (Cf. Théorème 5.3.4).
Enfin, nous étudions le lien entre la première question et la résolution des singularités plongée. Plus précisément, prenons I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire d'un anneau nœthérien local $(R, \mathfrak{m})$ à singularité isolé telle que le schéma $\overline{X_I}$ admet une résolution des singularités plongée, c'est-à-dire, pour tout sous-schéma fermé E de $\overline{X_I}$, il existe une résolution de singularités $\pi : Y \longrightarrow \overline{X_I}$ tel que $\pi^{-1}(E)$ est un diviseur

à croisements normaux. Nous allons montrer que pour tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles de Rees associées à I, ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1.

5.1 Connexité en codimension k

Nous rappelons ici, les définitions et les résultats de Hartshorne (Cf. [?]) qui nous permettront de donner quelques commentaires sur les deux questions proposées dans la troisième section.

Définition 5.1.1. *Soit k un entier naturel. Un espace topologique nœthérien X est dit connexe en codimension k si pour tout sous-ensemble fermé Y de X de codimension strictement supérieure à k, l'ensemble $X - Y$ est connexe.*

Proposition 5.1.2. *Soit X un schéma nœthérien, et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ses composantes irréductibles. Alors X est connexe, si et seulement si, pour tout couple (X_i, X_j), il existe une suite finie*

$$X_{i_1} = X_i, X_{i_2}, \cdots, X_{i_{s-1}}, X_{i_s} = X_j$$

de composantes irréductibles de X, telle que pour tout $r < s$, on a $X_{i_r} \cap X_{i_{r+1}} \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons que X est connexe et soit "$\sim$" la relation d'équivalence sur l'ensemble des composantes irréductibles de X définie par :

$$X_i \sim X_j \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ une suite finie } \quad X_{i_1} = X_i, X_{i_2}, \cdots, X_{i_{s-1}}, X_{i_s} = X_j, \\ \text{telle que } \ \forall r < s, \text{ on a} : X_{i_r} \cap X_{i_{r+1}} \neq \emptyset. \end{cases}$$

La proposition équivaut à dire que X est connexe, si et seulement si, pour tous $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a $X_i \sim X_j$.

Notons pour toute composante irréductible X_i de X :

$$X_i^{(1)} = \bigcup_{X_k \sim X_i} X_k, \quad \text{et} \quad X_i^{(2)} = \bigcup_{X_k \nsim X_i} X_k.$$

Donc $X = X_i^{(1)} \cup X_i^{(2)}$. Le fait que X est connexe et que $X_i^{(1)} \cap X_i^{(2)} = \emptyset$, entraîne que $X_i^{(2)} = \emptyset$. Par conséquent, toutes les composantes irréductibles de X sont équivalentes les unes aux autres par la relation "$\sim$". Réciproquement, si nous supposons que X n'est pas connexe, alors il existe A, B deux parties fermées disjointes de X, telles que $X = A \cup B$. Ceci implique que toute composante irréductible de X est contenu dans l'une des parties A ou B. Nous pouvons donc supposer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}, \text{ on a } : E_i \subseteq A,$$

et

$$\forall i \in \{r+1, \cdots, s\}, \text{ on a } : E_i \subseteq B.$$

Puisque

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{r} E_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i=r+1}^{s} E_i\Big) = \emptyset,$$

E_1 et E_{r+1} ne sont pas équivalentes par la relation "$\sim$". Ceci achève la démonstration.

$\square$

Proposition 5.1.3 (Cf. [?], Proposition 1.1)**.** *Soient X un espace topologique nœthérien et k un entier naturel. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
1) *X est connexe en codimension k,*
2) *Pour tout couple* (Y, Z) *de composantes irréductibles de X, il existe une suite finie*

$$Y = Y_1, Y_2, \cdots, Y_{s-1}, Y_s = Z$$

de composantes irréductibles de X telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, *la codimension de* $Y_i \cap Y_{i+1}$ *dans X est inférieure ou égale à k.*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition précédente.

Définition 5.1.4. *Soient X un espace topologique et* y, z *deux points de X. Nous disons que z est une généralisation de y, si et seulement si,* $y \in \overline{\{z\}}$. *Nous notons* X_y *le sous-espace de X défini par*

$$X_y = \{z \in X \mid z \text{ est une généralisation de } y\}.$$

Définition 5.1.5. *Si X satisfait l'une des deux conditions de la proposition précédente, nous disons que X est localement connexe en codimension k.*

5.2 Diviseurs liées en codimension 1

Soient $X = \operatorname{Spec} R$ où R est un anneau local nœthérien intègre, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, K son corps de fractions, et I un idéal de R. Nous notons $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long de I et $E_I = V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I})_{red}$ le sous-schéma réduit de $\overline{X}_I$ associé au faisceau $I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$. Autrement dit,

$$V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}) = \operatorname{Proj} \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \overline{I^n}/I \cdot \overline{I^n}$$

Définition 5.2.1. *Soient E_1 et E_2 deux composantes irréductibles de E_I. Nous disons que E_1 et E_2 sont liées en codimension 1, s'il existe une suite finie*

$$Y_1 = E_1, Y_2, \cdots, Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I, telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1.

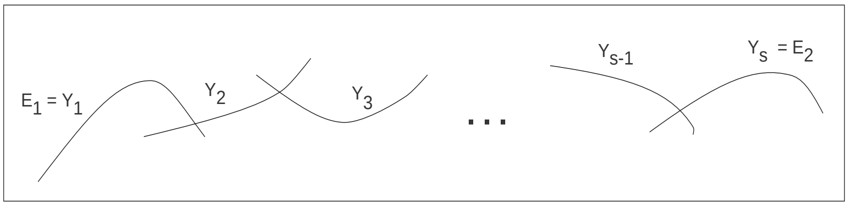

FIG. 5.1 –

Remarque 5.2.2. *Le schéma E_I est connexe en codimension 1, si et seulement si, il est connexe et tout couple (E_1, E_2) de composantes irréductibles de E_I sont liées en codimension 1.*

Définition 5.2.3. *Soient ν_1 et ν_2 deux valuations divisorielles de K centrées dans R en $\mathfrak{m}$. Nous disons que ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1, s'il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que le centre de ν_1 et le centre de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont deux composantes irréductibles de E_I liés en codimension 1. Nous admettons que toute valuation divisorielle ν de R centrée en $\mathfrak{m}$ est liée en codimension 1 avec elle même.*

Exemple 5.2.4. Soient $R = k[x, y, z, t]$ l'anneau des polynômes à quatre variables sur un corps k, et $I = (xy, zt)$. Nous avons :

$$I = (x, z) \cap (x, t) \cap (y, t) \cap (y, z).$$

Montrons que l'idéal I est normal. Soit n entier naturel supérieur ou égal à 1, nous avons :

$$I^n = (x^n y^n, x^{n-1} y^{n-1} zt, \cdots, x^i y^i z^{n-i} t^{n-i}, \cdots, z^n t^n).$$

Prenons $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\lambda$ un monôme dans l'idéal

$$(x, z)^n \cap (x, t)^n \cap (y, t)^n \cap (y, z)^n.$$

Nous pouvons supposer que $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \lambda$. Nous avons :

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\lambda \in (x, z)^n \Longrightarrow \alpha + \gamma \geq n.$$

Nous distinguons deux cas :
Si $\alpha > n$: alors $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}t^{\lambda} = (xy)^n x^{\alpha-n}y^{\beta-n}z^{\gamma}t^{\lambda}$
Si $\alpha \leq n$: alors $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}t^{\lambda} = (xy)^{\alpha}(zt)^{n-\alpha}y^{\beta-\alpha}z^{\alpha+\gamma-n}t^{\alpha+\lambda-n}$

Dans les deux cas, nous obtenons : $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}t^{\lambda} \in I^n$. Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons :

$$I^n = (x,z)^n \cap (x,t)^n \cap (y,t)^n \cap (y,z)^n.$$

Notons : $\mathfrak{p}_1 = (x,z)$, $\mathfrak{p}_2 = (x,t)$, $\mathfrak{p}_3 = (y,t)$, $\mathfrak{p}_4 = (y,z)$.

Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, soit ν_i la valuation de Rees associé à l'idéal $\mathfrak{p}_i$. Le fait que les idéaux $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$, sont normaux, implique d'après le théorème de valuations de Rees (Cf. [**? ?**]) que :

$$\mathfrak{p}_1^n \cap \mathfrak{p}_2^n \cap \mathfrak{p}_3^n \cap \mathfrak{p}_4^n = \{f \in R \mid \forall i = 1,2,3,4, \text{ on a } : \nu_i(f) \geq n\} = \overline{I^n}$$

Ceci montre que l'idéal I est normal. Donc $E_I = \text{Proj } k[x,y,z,t]/(xy,zt)$. Nous remarquons que E_I a quatre composantes irréductibles.

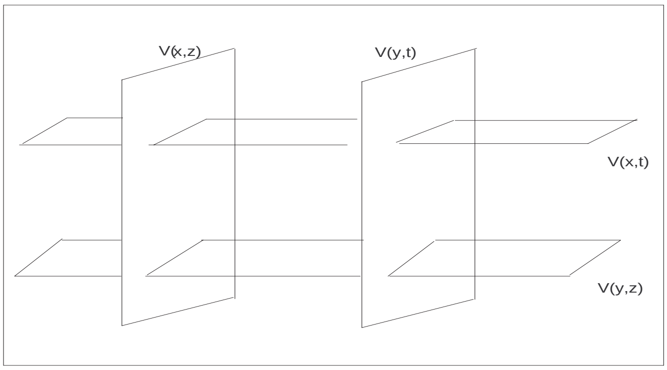

FIG. 5.2 –

Il est clair que toutes les composantes irréductibles de E_I sont liées en codimension 1. Par conséquent, toutes les valuations $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sont liées en codimension 1 deux à deux. Dans cet example, les valuations $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sont divisorielles, car l'anneau R est universellement caténaire (Cf. Théorème 1.3.7).

Exemple 5.2.5. Soit

$$X = \text{Spec } \frac{\mathbb{C}[x,y,z,w]}{(xz,xw,yz,yw)}$$

Alors X a deux composantes irréductibles :

$$X_1 = \text{Spec } \frac{\mathbb{C}[x,y,z,w]}{(x,y)}$$

et
$$X_2 = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{C}[x,y,z,w]}{(z,w)}.$$

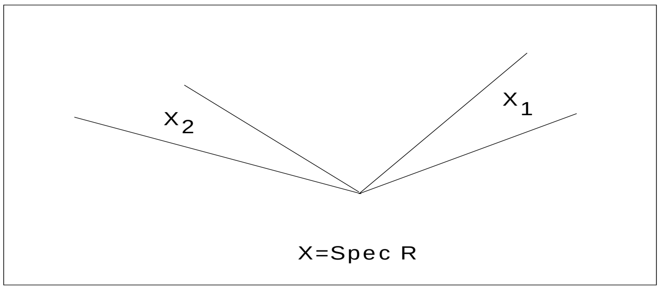

FIG. 5.3 –

Nous avons :
$$\dim X = \dim X_1 = \dim X_2 = 2,$$
et
$$\dim(X_1 \cap X_2) = 0.$$
Donc X n'est pas connexe on codimension 1.

A présent, nous allons montrer que l'anneau $R = \mathcal{O}_X(X)$ ne possède pas la propriété (S_2) de Serre, et pour cela, il suffit de trouver un élément $f \in R$ tel que l'anneau $R/(f)$ ne possède pas la propriété (S_1) de Serre. Soient X, Y, Z, W les images naturelles de x, y, z, x dans R, et $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}$ les images naturelles de X, Y, Z, W dans l'anneau $A = R/(X+Z)$. Nous remarquons que $X^2 = X(X+Z) = 0$ dans A, donc l'anneau A n'est pas réduit. Comme un anneau réduit est un anneau qui possède les propriétés (S_1) et (R_0), pour montrer que A ne possède pas la propriété S_1 il suffit de montrer qu'il possède la propriété R_0, c'est-à-dire : $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\operatorname{Ass}_A A) : \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (0)$. Nous avons :
$$\operatorname{Min}(\operatorname{Ass}_A A) = \{\mathfrak{p}_1 = ((x,y,z)/I)/(X+Z), \mathfrak{p}_2 = ((x,z,w)/I)/(X+Z)\},$$
où $I = (xz, xw, yz, yw)$.

Soit $h/g \in \mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1}$, nous avons :
$$\begin{aligned} h \in \mathfrak{p}_1 &\Rightarrow \exists h_1, h_2, h_3 \in A \text{ tel que } h = h_1\overline{X} + h_2\overline{Y} + h_3\overline{Z} \\ &\Rightarrow \overline{W}h = h_3\overline{WZ}, \text{ car } \overline{WX} = \overline{WY} = 0 \\ &\Rightarrow \overline{W}h = -h_3\overline{WX} = 0, \text{ car } \overline{Z} = -\overline{X} \\ &\Rightarrow h = 0 \text{ dans } A_{\mathfrak{p}_1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}_1} = (0)$. De façon analogue, nous obtenons $\mathfrak{p}_2 A_{\mathfrak{p}_2} = (0)$. Par conséquent, l'anneau A ne possède pas la propriété S_1.

Rappelons ici, le théorème principal de Zariski, qui s'énonce comme suit :

Théorème 5.2.6 (Théorème principal de Zariski, Cf.[**?**]). *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un schéma projectif sur un schéma localement nœthérien, tel que $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme. Alors pour tout point $x \in X$, le fibre Y_x est connexe.*

Lemme 5.2.7 (Cf. [**?**], Corollaire 4.4.3). *Soient X un schéma normal et localement nœthérien, et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme birationnel propre. Alors $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme.*

Il est important de noter que le schéma Y dans le lemme 5.2.7 n'est pas supposé normal. Ci-dessous, on va appliquer ce lemme à l'éclatement normalisé (resp. non-normalisé) du spectre d'un anneau normal le long de son idéal maximal.

Corollaire 5.2.8. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau de Nagata intègre et normal de dimension 2, I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R, et E_1, E_2 deux composantes irréductibles de E_I. Alors E_1 et E_2 sont liées en codimension* 1*.*

Démonstration. Comme l'application $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow X = \operatorname{Spec} R$ est un morphisme birationnel propre et que l'anneau R est nœthérien et normal, le morphisme naturel ${\pi_I}^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow (\pi_I)_*\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$ est un isomorphisme (Cf. Lemme 5.2.7). Donc d'après le théorème principal de Zariski (Cf. Théorème 5.2.6), le diviseur exceptionnel E_I est connexe. Ceci implique que pour toutes composantes irréductibles E_1 et E_2 de E_I, il existe une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, \cdots, Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I, telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, nous avons :

$$Y_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$$

(Cf. Proposition 5.1.2). Comme la dimension de R est égale à 2, cela revient à dire que la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Donc les deux composantes irréductibles E_1 et E_2 sont liées en codimension 1. □

De façon analogue, on démontre le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.9. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local et normal, et $f : Y \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ l'éclatement de* Spec *R le long de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Alors pour toutes composantes irréductibles E_1 et E_2 de $Y_\mathfrak{m} = f^{-1}\{\mathfrak{m}\}$, il existe une suite finie*

$$Y_1 = E_1, Y_2, \cdots, Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de $f^{-1}\{\mathfrak{m}\}$, telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, $Y_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$.

Corollaire 5.2.10. *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata normal et de dimension inférieure ou égale à 2, et* ν_1 *et* ν_2 *deux valuations divisorielles de* R *centrées en* $\mathfrak{m}$. *Alors* ν_1 *et* ν_2 *sont liées en codimension* 1.

Démonstration. Si la dimension de R est égale à 1, les deux valuations ν_1 et ν_2 sont égales, donc par définition, elles sont liées en codimension 1. Supposons que la dimension de R est égale à 2. Puisque les valuations ν_1 et ν_2 sont divisorielles, il existe deux idéaux $\mathfrak{m}$-primaires I_1, I_2 de R tels que le centre de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X}_{I_1}$ (resp. $\overline{X}_{I_2}$) est de codimension 1. Prenons $I = I_1 I_2$, il est clair que cet idéal est aussi $\mathfrak{m}$-primaire et que les centres de ν_1 et de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1 (Cf. Corollaire 5.2.8). □

5.3 Problèmes

Nous posons dans cette section deux questions concernant la connexité en codimension 1 (Cf. Question 1, Question 2). Nous montrons que les deux questions ont une réponse positive si la dimension de X est inférieure ou égale à 2. Ensuite nous démontrons que si la question 2 a une réponse positive, alors la question 1 a également une réponse positive quelque soit la dimension de X (Cf. Théorème 5.3.4). En fin, nous donnons quelques commentaires et des approches pour étudier ces deux questions dans le cas général (ie. $\dim X \geq 3$).

Pour tout point x d'un schéma X, nous notons :

$$C_{X,x} = \operatorname{Spec} \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{m}_{X,x}^n / \mathfrak{m}_{X,x}^{n+1}$$

et

$$\mathbb{P}(C_{X,x}) = \operatorname{Proj} \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{m}_{X,x}^n / \mathfrak{m}_{X,x}^{n+1},$$

où $\mathfrak{m}_{X,x}$ est l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$. Le schéma $C_{X,\xi}$ (resp. $\mathbb{P}(C_{X,\xi})$) est appelé le cône tangent (resp. le cône tangent projectivisé) de X au point x. Les questions que nous allons étudier s'énoncent comme suit :

Question 1. Soient $X = \operatorname{Spec}(R, \mathfrak{m})$ un schéma affine, intègre, normal et complet, et soient ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{m}$. Existe-t-il un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1 ?

Question 2. Soient X un schéma intègre et normal, et soit x un point de X, tel que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est analytiquement irréductible. Le cône tangent $C_{X,x}$ de X en x est-il connexe en codimension 1 ?

5.3.1 Commentaires

Tout d'abord, rappelons le résultat suivant (Cf. [?], Théorème 9.7) : Si R est un anneau nœthérien et I un idéal de R, alors la dimension de l'anneau $G(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ est égale à la dimension maximale de $R_\mathfrak{p}$ lorsque $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux maximaux de R contenant I. En particulier si R est local, nous avons :

$$\dim G(I) = \dim R.$$

D'autre part, si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ est un anneau nœthérien gradué, il n'est pas évident de passer de la dimension de Spec A à celle de Proj A. Par contre dans le cas où l'anneau A_0 est artinien, nous avons toujours l'égalité :

$$\dim \operatorname{Proj} A = \dim \operatorname{Spec} A - 1. \tag{5.3.1}$$

Il y a une correspondance bijective naturelle entre les composantes irréductibles de Proj A et celles de Spec A. Autrement dit, nous pouvons écrire Proj A et Spec A sous la forme :

$$\operatorname{Proj} A = \bigcup_{i=1}^{s} E_i$$

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{s} F_i$$

tel que :

$$\dim E_i = \dim F_i - 1, \tag{5.3.2}$$

où $E_1, E_2, \cdots, E_s$ (resp. $F_1, F_2, \cdots, F_s$) sont les composantes irréductibles de Proj A (resp. Spec A), et que

$$E_i = \mathbb{P}(F_i).$$

En particulier, si nous prenons :

$$A = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{m}_{X,x}^n/\mathfrak{m}_{X,x}^{n+1},$$

nous obtenons :

$$\dim \mathbb{P}(C_{X,x}) = \dim C_{X,x} - 1.$$

Proposition 5.3.1. *Si la dimension de X est inférieure ou égale à 2, alors la première question a une réponse affirmative.*

Démonstration. Le fait que les anneaux complets sont des anneaux de Nagata, implique d'après le corollaire 5.2.10 que la question 1 a une réponse positive. □

Nous allons démontrer dans la suite que si la deuxième question a une réponse positive, alors il en est de même pour la première question (Cf.Théorème 5.3.4). Rappelons ici, le théorème suivant :

Théorème 5.3.2 (Cf. [**?**], Théorème 1.27, Page 167)**.** *Soit X un schéma projectif sur* Spec R*. Alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$ cohérent engendré sur X, il existe un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, le faisceau $\mathcal{F}(n)$ est engendré par ses sections globales.*

Lemme 5.3.3. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R, $\pi : X_I \longrightarrow$* Spec R *l'éclatement de* Spec R *le long de I, et soit $\mathcal{H}$ un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{X_I}$ tel que $V(\mathcal{H}) \subset V(I\mathcal{O}_{X_I})$. Alors le morphisme composé de π et de l'éclatement de X_I le long de $\mathcal{H}$ est un éclatement de* Spec R *le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire.*

Démonstration. D'après le théorème 5.3.2 le faisceau $\mathcal{H}(n) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_{X_I}} \mathcal{O}_{X_I}(n) = I^n\mathcal{H}$ est engendré par ses sections globales quand n est suffisamment grand. En considérant X_I comme un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^d_R$, soient $f_1, f_2, \cdots, f_r$ les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}$ qui engendrent le faisceau $\mathcal{H}(n)$, donc elles sont des éléments de R, car $\mathcal{H}(n) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(\mathbb{P}^d_R) = R$. En prenant $J = (f_1, f_2, \cdots, f_r)I$, nous pouvons montrer que la décomposition de π et de l'éclatement de X_I le long de $\mathcal{H}$ est exactement l'éclatement de Spec R le long de J. Reste maintenant à montrer que J est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire, et pour cela, il suffit de montrer que :

$$V(J\mathcal{O}_{X_I}) \subset V(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X_I}). \tag{5.3.3}$$

On a :

$$\begin{aligned} V(J\mathcal{O}_{X_I}) &= V(I^n\mathcal{H}) \\ &\subset V(I^n\mathcal{O}_{X_I}) \\ &= V(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X_I}). \end{aligned}$$

Donc on a bien l'inclusion (5.3.3). Ceci montre que J est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. □

Théorème 5.3.4. *Si pour tout schéma Y intègre et normal, et pour tout point y de Y tel que l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est analytiquement irréductible, le cône tangent $C_{Y,y}$ est connexe en codimension 1. Alors pour tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles centrées en $\mathfrak{m}$ d'un anneau $(R, \mathfrak{m})$ intègre, normal et complet, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X_I}$ sont liés en codimension 1.*

Démonstration. Supposons que pour tout schéma Y intègre et normal, et pour tout point y de Y tel que l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est analytiquement irréductible, le cône tangent $C_{Y,y}$ est connexe en codimension 1. Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau intègre normal et complet, et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles centrées en $\mathfrak{m}$, alors il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres des valuations ν_1, ν_2 ont codimension 1 dans $\overline{X}_I$. Notons E_1 (resp. E_2) le centre de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X}_I$. Comme R est anneau normal de Nagata, le diviseur exceptionnel E_I est connexe (Cf. Théorème 5.2.6). Il existe donc une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, \cdots, Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I, telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, nous avons :

$$Y_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset.$$

Soit x_i un point de $Y_i \cap Y_{i+1}$.

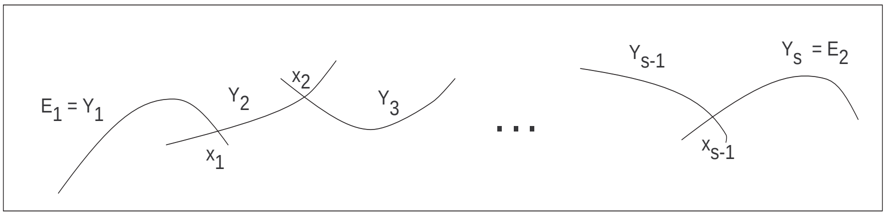

FIG. 5.4 –

Notons $\varphi : Y \longrightarrow \overline{X}_I$ l'éclatement normalisé de $\overline{X}_I$ le long de $\{x_1, x_2, \cdots, x_{s-1}\}$. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, s-1\}$, le cône tangent $C_{\overline{X}_I, x_i}$ est connexe en codimension 1, car les anneaux $\mathcal{O}_{\overline{X}_I, x_i}$ sont analytiquement irréductibles. Soit Z_i la transformée stricte de Y_i dans Y. Nous allons montrer que les diviseurs Z_1 et Z_s sont liés en codimension 1, et pour cela il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, s-1\}$, les diviseurs Z_i et Z_{i+1} sont liés en codimension 1. Fixons $i \in \{1, 2, \cdots, s-1\}$. Nous avons :

$$Z_i \supseteq \mathbb{P}(C_{Y_i, x_i}) \subseteq \mathbb{P}(C_{\overline{X}_I, x_i})$$

et

$$Z_{i+1} \supseteq \mathbb{P}(C_{Y_{i+1}, x_i}) \subseteq \mathbb{P}(C_{\overline{X}_I, x_i}).$$

Prenons F_i, F_{i+1} (resp. D_i, D_{i+1}) deux composantes irréductibles de $\mathbb{P}(C_{Y_i,x_i})$ (resp. $\mathbb{P}(C_{\overline{X}_I,x_i})$) telles que $F_i \subseteq D_i$ et $F_{i+1} \subseteq D_{i+1}$. Nous avons :

$$F_i \subseteq D_i \cap Z_i$$

et

$$F_{i+1} \subseteq D_{i+1} \cap Z_{i+1}.$$

Le fait que pour tout $j \in \{i, i+1\}$ la dimension de F_j est égale à $\dim R - 2$, entraîne que la codimension de $D_j \cap Z_j$ dans D_j est égale à 1. Donc Z_i et D_i (resp. Z_{i+1} et D_{i+1}) sont liés en codimension 1.

Puisque le cône tangent projectivisé $\mathbb{P}(C_{\overline{X}_I,x_i})$ est connexe en codimension 1, les diviseurs D_i et D_{i+1} sont liés en codimension 1. Ceci montre bien que pour tout $i \geq 1$, les diviseurs Z_i et Z_{i+1} sont liés en codimension 1 (Cf. FIG 5.5). Par conséquent les diviseurs Z_1 et Z_s sont liés en codimension 1.

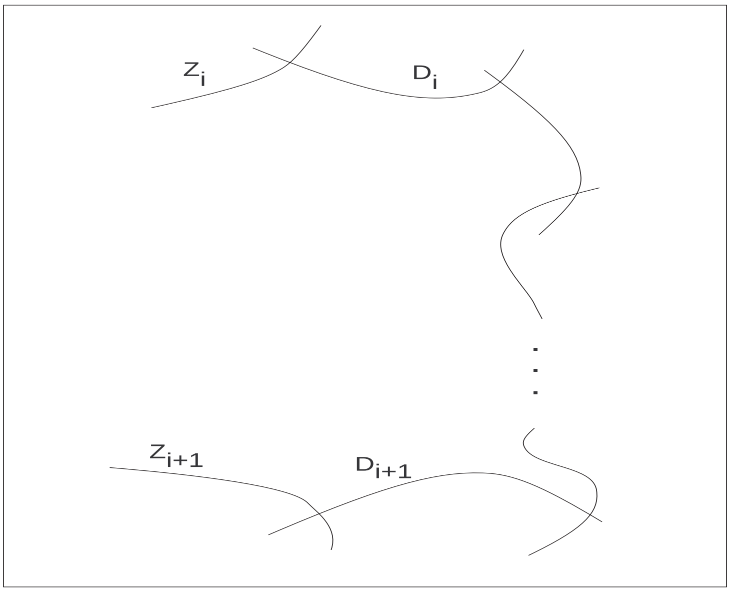

FIG. 5.5 –

Comme Z_1 et Z_s sont respectivement les centres de ν_1 et ν_2 dans Y, pour finir la démonstration, il suffit de démontrer que le schéma Y est un éclatement de X le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire J de R.

Par construction, Y est un éclatement de $\overline{X}_I$ le long d'un faisceau $\mathcal{H}$ tel que

$V(\mathcal{H}) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Or, d'après le lemme 5.3.3, le schéma Y est un éclatement normalisé de X le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire J de R, et les centres de ν_1 et ν_2 dans Y sont liés en codimension 1. □

Définition 5.3.5. *Soit X un schéma intègre. Nous disons que X admet une résolution des singularités plongée, si pour tout sous-schéma fermé E de X, il existe une résolution des singularités $\pi : Y \longrightarrow X$ telle que le diviseur $\pi^{-1}(E)$ est à croisements normaux. De plus pour tout point régulier x de X tel que le diviseur E est à croisements normaux, le morphisme π est un isomorphisme au-dessus de x.*

Proposition 5.3.6. *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local à singularité isolée et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R tel que le schéma $\overline{X}_I$ admet une résolution des singularités plongée. Alors tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles de Rees associées à I, ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1.*

Démonstration. Soient E_1 (resp. E_2) les centres de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X}_I$. Comme $\overline{X}_I$ admet une résolution des singularités plongée, il existe une résolution des singularités $\pi : Y \longrightarrow \overline{X}_I$ telle que le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(E_I)$ est à croisements normaux. Donc pour tout couple (D_1, D_2) de composantes irréductibles de $\pi^{-1}(E_I)$ telles que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, on a :

$$\operatorname{codim}(D_1 \cap D_2, D_1) = 1$$

et

$$\operatorname{codim}(D_1 \cap D_2, D_2) = 1.$$

Le fait que $\pi^{-1}(E_I)$ est de plus connexe (Cf. Théorème 5.2.6) implique qu il est connexe en codimension 1. Par suite, les transformés stricts de E_1 et E_2 sont liées en codimension 1. Il nous reste maintenant de démontrer que Y est obtenu d'un éclatement de Spec R le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. Puisque $\mathfrak{m}$ est le seul point singulier de Spec R, $\overline{X}_I \backslash V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}) \simeq \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$ est régulier. Nous pouvons donc choisir π un éclatement de $\overline{X}_I$ le long d'un faisceau d'idéaux $\mathcal{H}$ de $\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$ tel que $V(\mathcal{H}) \subseteq V(I\overline{X}_I)$. En utilisant le lemme 5.3.3, il est clair que Y est un éclatement de Spec R le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. □

Remarque 5.3.7. *En admettant que : "tout schéma X excellent fini sur* Spec $\mathbb{Q}$ *admet une résolution de singularités plongée"* [1]*. Alors suivant les hypothèse de la première question, si l'anneau R est un anneau excellent sur $\mathbb{Q}$, alors nous avons toujours une réponse positive a cette question.*

[1] *Il est possible que cette affirmation soit toujours vraie, pour plus de détails, nous envoyons le lecteur à EGA IV 7.9 (Cf. [**?**]).*

Corollaire 5.3.8. *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata a singularité isolée tel que tout schéma* Y *de type fini sur* R *admet une résolution des singularités plongée. Alors tout couple* (ν_1, ν_2) *de valuations divisorielles centrées dans* R *en* $\mathfrak{m}$, ν_1 *et* ν_2 *sont liées en codimension 1.*

Notations

$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Q}$	L'ensemble des éléments rationnels
$\mathbb{R}$	L'ensemble des éléments réels
$\mathbb{C}$	L'ensemble des éléments complexes
$(R, \mathfrak{m})$	Anneau local et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal
$k(\mathfrak{p})$	Le corps résiduel de $R_{\mathfrak{p}}$
R_ν	L'anneau de valuation associé à ν
$k(\nu)$	Le corps résiduel de R_ν
$\widehat{R}$	Le complété $\mathfrak{m}$-adique de R
$\widehat{R_\nu}$	Le complété ν-adique de R
$\dim R$	La dimension de Krull de R
$\operatorname{Spec} R$	Le spectre de l'anneau R
$\operatorname{ht} \mathfrak{p}$	La hauteur de $\mathfrak{p}$
$\operatorname{depth}_I M$	Le profondeur de M dans I
$\overline{X}$	La normalisation de X
X_I	L'éclatement de X le long de l'idéal I
$\overline{I}$	La clôture algébrique de I
$\operatorname{codim}(Y, X)$	La codimension de Y dans X
ν_I	L'ordre I-adique
$\overline{\nu}_I$	L'ordre I-adique réduit
$\nu(I)$	Le minimum de l'ensemble $\{\nu(x)$ tel que $x \in I\}$
$I_n(\nu)$	L'ensemble des $x \in R$ tel que $\nu(x) \geq n$

Bibliographie

[] S. Abhyankar. On the valuations centered in a local domain. *Amer. J. Math.*, 78 :321–348, 1956.

[] M. Artin. On isolated rational singularities of surfaces. *Amer. J. Math.*, 88 :129–136, 1966.

[] C. Beddani. Clôture intégrale des idéaux et la propriété (z_k). *Soumis.*

[] C. Beddani. Comparaisons des valuations divisorielles. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.).*

[] C. Beddani. Une version géométrique du théorème de valuations de rees. *Soumis.*

[] C. Beddani. Valuations divisorielles et connexité en codimension 1. *En préparation.*

[] D. Bump. *Algebraic Geometry*. World Scientific, first edition, 1998.

[] S. D. Cutkosky. On unique and almost unique factorization of complete ideal II. *Invent. Math.*, 98 :59–79, 1989.

[] S. D. Cutkosky. On unique and almost unique factorization of complete ideals. *Amer. J. Math.*, 111(3) :417–433, 1989.

[] D. Delfino and I. Swanson. Integral closure of ideals in excellent local rings. *J. Algebra*, 274(1) :422–428, 2004.

[] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, first edition, 1995.

[] D. Eisenbud and J. Harris. *The Geometry of Schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, first edition, 2000.

[] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier. Clôture intégrale des idéaux et équisingularité. *Séminaire. Ecole Polytechnique*, 1974.

[] Gerd Fischer. *Plane Algebraic Curves*, volume 15 of *STML*. American Mathematical Society, first edition, 2001.

[] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. le langage des schémas. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 4, 1960.

[] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV : Étude locale des schemas et des morphismes de schemas. (Seconde partie.). 1965.

[] R. Hartshorne. Complete Intersections and Connectedness. pages 497–508, 1962.

[] R. Hartshorne. *Local cohomology*, volume 1961 of *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, first edition, 1977.

[] W. Heinzer and D. Lantz. Exceptional prime divisors of two-dimensional local domains. *Préprint*.

[] R. HüblI and I. Swanson. Discrete valuations centered on local domains. *J. Pure Appl. Algebra*, 161(1-2) :145–166, 2001.

[] S. Huckaba and T. Marley. Depth properties of Rees algebras and associated graded rings. *J. Algebra*, 156(1) :259–271, 1993.

[] S. Huckaba and T. Marley. Depth formulas for certain graded rings associated to an ideal. *Nagoya Math. J.*, 133 :57–69, 1994.

[] S. Huckaba and T. Marley. On associated graded rings of normal ideals. *J. Algebra*, 222(1) :146–163, 1999.

[] S. Izumi. Gabrielov's rank condition is equivalent to an inequality of reduced orders. *Math. Ann.*, 276(1) :81–89, 1986.

[] S. Izumi. Linear complementary inequalities for orders in analytic geometry (łojasiewicz inequalities and strong approximation theorems). *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, (926) :30–40, 1995. Geometric aspects of real singularities (Japanese) (Kyoto, 1995).

[] S. Izumi. Note on linear Chevalley estimate for homomorphisms of local algebras. *Comm. Algebra*, 24(12) :3885–3889, 1996.

[] S. Izumi. Convergence of formal morphisms of completions of complex spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 51(3) :731–755, 1999.

[] E. Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, 1984.

[] J. Lipman. Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36) :195–279, 1969.

[] Q. Liu. *Algebraic geometry and Arithmetic Curves*. Oxford, New York, 2002.

[] S. Ikeda M. Herrmann and U. Orbanz. *Equimultiplicity and blowing up*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An algebraic study, With an appendix by B. Moonen.

[] H. Matsumura. *Commutative algebra*. Benjamin, New York, 1970.

[] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[] D. Mumford. *The red book of varieties and schemes*. Number 1358 in Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, 1988.

[] M. Nagata. *Local rings*. Interscience Publishers. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1962.

[] D. Rees. Valuations associated with a local ring (I). *J. London Math. Soc.*, 5 :108–128, 1955.

[] D. Rees. Valuations associated with ideals. II. *J. London Math. Soc.*, 31 :221–228, 1956.

[] D. Rees. A note on analytically unramified local rings. *J. London Math. Soc.*, 36 :24–28, 1961.

[] D. Rees. Izumi's theorem. In *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 407–416. Springer, New York, 1989.

[] P. Samuel. Some asymptotic propriétés of ideals. *Ann. Math.*, 56, 1952.

[] M. Spivakovsky. Valuations, the linear Artin approximation theorem and convergence of formal functions. In *Algebra and geometry (Santiago de Compostela, 1989)*, volume 54 of *Álxebra*, pages 237–254. Santiago de Compostela, 1990.

[] Mark Spivakovsky. Valuations in function fields of surfaces. *Amer. J. Math.*, 112(1) :107–156, 1990.

[] I. Swanson. Linear equivalence of ideal topologies. *Math. Z.*, 234(4) :755–775, 2000.

[] I. Swanson and C. Huneke. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*. Lecture Notes Serie 336. London Mathematical Society, 2006.

[] B. Teissier. Valuations, deformations and toric geometry, prépublication.

[] K. Ueno. *Algebraic Geometry 1 : From Algebraic Varieties to Schemes*. AMS, first edition, 1999.

[] M. Vaquié. Valuations. *dans Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), Progr. Math. 181, 2000*.

[] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra. Vol. II*, volume 29 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.

MOTS-CLÉS :

1	VALUATIONS DIVISORIELLES	**5**	CONNEXITE EN CODIMENSION UN
2	VALUATIONS DE REES	**6**	CLÔTURE INTEGRALE
3	RESOLUTION DES SINGULARITES	**7**	
4	DIVISEURS EXEPTIONNEL	**8**	

RESUMÉ DE LA THÈSE EN FRANÇAIS :

Les valuations divisorielles sont des objets fondamentaux pour l'étude de la résolution des singularités. Elles ont été étudiées
par Zariski, Abhyankar, Rees, Swanson et beaucoup d'autres. Plus récemment, une nouvelle approche du problème de résolution des singularités par l'étude des valuations a été proposé notamment par M. Spivakovsky et B. Teissier. Cette thèse est destinée à l'étude des valuations divisorielles et à leurs comparaison, nous avons donné une nouvelle démonstration géométrique du théorème de valuations de Rees et théorème d'Izumi, avec quelques hypothèse minimales, et nous avons introduit la propriété (Z_K). Ensuite, nous avons montré que tout idéal qui vérifie cette propriété a au plus k-1$ valuations de Rees associées. Ceci signifie géométriquement que si I est un ideal d'un anneau R de Nagata, et f est l' éclatement normalisé de Spec R le long de I, alors le nombre de composantes irréductibles de E_I est inférieur ou égal à k-1.

A l'aide de ce résultat, nous avons donné une réponse affirmative à certains questions de Swanson concernant la clôture intégrale des idéaux.

A la fin de ce travail, nous avons proposé quelques questions en expliquant le lien entre la notion de la connexité en codimension 1 et la comparabilité linéaire de valuations divisorielles centrés dans un anneau analytiquement irréductible.

RESUMÉ DE LA THÈSE EN ANGLAIS

The divisorial valuations are fundamental objects to the study of the resolution of singularities. They were studied by Zariski, Abhyankar, Rees, Swanson and much of others. Recently, some new approaches of the problem of resolution of singularities was proposed. Particularly Spivakovsky and Teissier give an approach based on the study of the divisorielles valuations. This thesis was intended to the study of the divisorial valuations and their comparison. We gave a new geometrical proof of the Rees's theorem and the Izumi's theorem, with some minimal assumption. The main contribution of this thesis is the definition of the property (Z_k).

We showed that any ideal that checks this property has at most k-1 Rees valuations. This means geometrically that if R is a ring of Nagata, and f is the normalized blowing up of I, then the exceptionnel divisor has at most k-1 irreducible components.

Using this result, we gave an affirmative answer to some questions of Swanson concerning the integral closure of idéals.

At the end of this work, we proposed some questions by explaining the relation between the notion of the connexity in codimension 1 and the comparability of divisorial valuations centered in an analytically irreducible ring.