THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :
Mathématiques Fondamentales

Présentée et soutenue par
Quang Hai DUONG
le : 08 juillet 2013

Titre :
Limites d'idéaux de fonctions holomorphes et de fonctions de Green pluricomplexes

---

École doctorale :
Mathématiques, Informatique et Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :
Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219

Directeur de thèse :
Pascal J. THOMAS, Professeur, IMT, Université Paul Sabatier, Toulouse

Co-directeur de thèse :
Duc Thai DO, Professeur, Ecole Normale Supérieure de Hanoï

Rapporteurs :
Alexander RASHKOVSKII, Professor, Faculty of Science and Technology, University of Stavanger
Huy Vui HA, Professor, Institute of Mathematics, VAST

Membres du jury :
Alexander RASHKOVSKII, Professor, Faculty of Science and Technology, University of Stavanger
Huy Vui HA, Professor, Institute of Mathematics, VAST
Jean-Paul CALVI, Maître de Conférences, IMT, Université Paul Sabatier, Toulouse
Pascal J. THOMAS, Professeur, IMT, Université Paul Sabatier, Toulouse
Duc Thai DO, Professeur, Ecole Normale Supérieure de Hanoï

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des limites d'idéaux de fonctions holomorphes et de fonctions de Green pluricomplexes sur un domaine Ω (ouvert connexe) hyperconvexe borné qui contient l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Les idéaux concernés sont définis par l'annulation sur un nombre fini de points.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques notions élémentaires de théorie du potentiel en plusieurs variables complexes et la fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles. Ensuite, on étudie la convergence de cette fonction à pôles logarithmiques simples dans le cas où le nombre de pôles est fini et tous les pôles tendent vers un seul point.

Dans le deuxième chapitre, nous allons donner une méthode pour réduire la vérification de la convergence d'une famille des idéaux de fonctions holomorphes. Plus précisément, nous allons démontrer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la limite d'une famille des idéaux de fonctions holomorphes existe.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la limite de la fonction de Green pluricomplexe sur la base de 3 points distincts qui tendent vers l'origine dans le cas particulier où les limites de toutes les directions de droites qui passent par les deux points sont alignées. Nous allons commencer par étudier la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes de même base, puis nous donnons quelques estimations pour la borne supérieure et la borne inférieure de la limite de la fonction de Green pluricomplexe. Finalement, en utilisant les notions de puissance des idéaux de fonctions holomorphes, nous introduisons une méthode de Rashkovskii-Thomas et recherchons la limite de la fonction de Green pluricomplexe dans ce cas-là.

Dans le quatrième chapitre, nous allons étudier la convergence des fonctions de Green pluricomplexes à quatre pôles distincts qui tendent vers l'origine dans $\mathbb{C}^2$ dans le cas générique. Ensuite, nous allons étudier la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes basés, de même, sur quatre points, dans le cas dégénéré. Enfin, en utilisant la notion de puissance des idéaux de fonctions holomorphes et la méthode de Rashkovskii-Thomas, nous donnons quelques estimations pour la limite des fonctions de Green pluricomplexes dans un cas particulier.

Mots-clefs

Fonction plurisousharmonique, fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles, opérateur de Monge-Ampère complexe, disque analytique, idéaux de fonctions holomorphes, longueur d'un idéal, multiplicité de Hilbert-Samuel.

Abstract

The aim of this thesis is to study the convergence of pluricomplex Green functions on a bounded hyperconvex domain Ω in $\mathbb{C}^n$, with $0 \in \Omega$ and the convergence of some families of ideals in the space $\mathcal{O}(\Omega)$ of all holomorphic functions on Ω. The zero variety of each those ideals, consisting of all common zeros of the holomorphic functions in the ideal, is a finite set.

In the first chapter, we introduce some basic notions of potential theory in several complex variables and the pluricomplex Green function with simple logarithmic poles at finitely many points. Then, we study the convergence of these functions with simple logarithmic poles at finitely many points as the poles tend to a single point.

In the second chapter, we give a method to reduce the verification of the convergence of a family of ideals of holomorphic functions. More precisely, we prove two necessary and sufficient conditions for the convergence of the family of ideals.

The third chapter is devoted to the study of the convergence of pluricomplex Green functions based on three distinct poles in the particular case where all the poles tend to the origin along the same asymptotic direction. We begin by studying the limit of the family of ideals of holomorphic functions based on the same points, then we give some estimates for the upper and the lower limit of the pluricomplex Green functions. Finally, using the notion of powers of ideals of holomorphic functions, we introduce a method of Rashkovskii - Thomas and study the limit of the pluricomplex Green functions in this case.

In the fourth chapter, we study the convergence of pluricomplex Green functions with simple logarithmic poles at four points as the poles tend to 0 in $\mathbb{C}^2$ for the generic case. Then we study the limit of the family of ideals of holomorphic functions based on the same points for the degenerate case. Finally, using the notion of powers of ideals of holomorphic functions and the method of Rashkovskii - Thomas, we give some estimates for the limit of the pluricomplex Green functions for a particular case.

Keywords

Plurisubharmonic function, pluricomplex Green function, complex Monge-Ampère equation, analytic disks, ideals of holomorphic functions, length of an ideal, Hilbert-Samuel multiplicity.

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Pascal J. Thomas pour avoir accepté de diriger mes recherches pendant ces quatre années de thèse. Il m'a confronté à un sujet riche et passionnant. Tout au long de ce chemin, il m'a consacré un temps inestimable, ainsi que de nombreuses et longues discussions en mathématiques, au cours desquelles il a beaucoup contribué à enrichir ma culture mathématique. Ses suggestions et ses encouragements me sont toujours très précieux. Cette thèse lui doit beaucoup et je suis fier de l'avoir rédigée sous sa direction.

Je suis aussi reconnaissant à mon co-directeur de recherche le Professeur Do Duc Thai, qui est mon professeur depuis longtemps. J'ai beaucoup gagné à discuter avec lui. Son enseignement au cours du programme de Master à l'ENS de Hanoï a beaucoup contribué à mes études. Je le remercie sincèrement.

Je suis très touché de l'honneur que me font Alexander Rashkovskii et Ha Huy Vui en ayant accepté de rapporter sur ma thèse. J'exprime également toute ma gratitude à Jean-Paul Calvi pour sa participation à mon jury.

Je souhaite aussi remercier Wlodzimierz Zwonek et Nguyen Quang Dieu d'avoir bien voulu venir à ma soutenance de thèse. En particulier, les discussions avec Monsieur Dieu lors de sa visite à Toulouse, autour de mon sujet de thèse m'ont permis d'approfondir mes connaissances mathématiques.

Je suis très reconnaissant envers tous les membres de l'équipe d'Analyse, géométrie et dynamiques complexes de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, plus spécialement Xavier Buff, Dan Popovici, Ahmed Zeriahi et Vincent Guedj pour tous les cours du programme de Master 2 Recherche. En particulier, j'ai eu aussi la chance de pouvoir profiter des conseils avisés de Ahmed Zeriahi et Vincent Guedj en théorie du pluripotentiel.

Je remercie Martine Labruyère, Jocelyne Picard et Agnès Requis, sans qui la vie des doctorants de mathématiques de Toulouse serait bien plus compliquée, ainsi que le Directeur de l'Ecole Doctorale MITT Monsieur Jean-Michel Roquejoffre pour son aide "administrative" pendant mes études à Toulouse.

Je souhaite exprimer un grande merci à Monsieur Nguyen Thanh Van et Monsieur Nguyen Tien Zung pour leurs encouragements et pour les discussions dans lesquels ils nous ont appris tant sur les mathématiques que sur la vie à Toulouse et la culture française.

Je ne peux pas écrire de remerciements sans citer Matthieu Arfeux, Sugata Mondal et Nguyen Minh Hoang avec qui j'ai partagé mon bureau au cours de ces années et avec qui j'ai discuté des problèmes de mathématiques, ainsi que de la vie et de la culture française. Je pense aussi à mes amis vietnamiens qui m'ont soutenu pendant mes années à Toulouse.

Que mes parents trouvent ici l'expression de mon amour et de ma reconnaissance.

Finalement, je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à ma femme qui a commencé ses études en Chine, au moment où je commençais les miennes en France. Pendant quatre ans, elle a toujours cru en moi, n'a eu de cesse de m'encourager et m'a soutenu tout au long de mes études. Ses encouragements quotidiens et sa visite à Toulouse m'ont donné de la force pendant les périodes difficiles de ma thèse. Merci mon amour !

Introduction

L'object de cette thèse est l'étude de la convergence de la famille des idéaux de fonctions holomorphes et de fonctions de Green pluricomplexes à plusieurs pôles avec un nombre fini de pôles sur un domaine Ω (ouvert connexe) hyperconvexe borné qui contient l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Les idéaux concernés sont définis par l'annulation sur un nombre fini de points.

La fonction de Green pluricomplexe a été introduite par L. Lempert [Lem81, Lem83] comme une sorte de solution fondamentale de l'opérateur (non-linéaire !) de Monge-Ampère pluricomplexe (toutes les définitions précises des notions auxquelles nous faisons référence sont données dans le chapitre 1 du présent travail). La fonction de Green est la solution d'un problème extrémal naturel pour les fonctions plurisousharmoniques négatives, et cela fournit une sorte de Lemme de Schwarz, c'est-à-dire un contrôle des modules des fonctions holomorphes bornées qui s'annulent en un point donné. Cette fonction a été étudiée par [Be-T76, Lem81, Lem83, Kli85, Le89].

Dans le cas des domaines convexes, Lempert avait montré que la fonction de Green pour un pôle coïncide avec la solution d'un problème extrémal obtenu à partir de disques analytiques passant par ce pôle. Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ et p un point dans Ω. On dit qu'une fonction plurisousharmonique u sur Ω ademt un pôle logarithmique en p avec le poids $\nu > 0$ si $u(z) \leqslant \nu \log|z-p|+C$, pour une constante C quelconque et pour z au voisinage de p. La fonction de Green pluricomplexe G_p du domaine Ω à pôle en p est définie par $G_p(z) = \sup v(z)$, où le suprémun est pris sur toutes les fonctions plurisousharmoniques négatives sur Ω à pôle logarithmique en p avec le poids $\nu = 1$.

On désigne par $\mathbb{D}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$ et nous considérons la fonction $\delta(z,p) = \inf \log|a|$, où l'infimum est défini pour tout $a \in (0,1)$ pour laquelle il existe un disque analytique $f : \mathbb{D} \to \Omega$ tel que $f(0) = z$ et que $f(a) = p$. La fonction δ_Ω est dite la fonction de Lempert du domaine Ω (terminologie due à D. Coman [Com00]). Dans le cas d'un seul pôle, il est connu que la fonction de Green $G_p(z) \leqslant \delta(z,p)$, pour tout $z \in \Omega$ (voir [Kli91]). Il a été montré, par L. Lempert, que si Ω est un domaine convexe et borné dans $\mathbb{C}^n$, alors $G_p(z) = \delta_\Omega(z,p)$, pour tout $z \in \Omega$ (voir [Lem81, Lem83]).

Comme on ne peut pas superposer des solutions élémentaires, il est très vite apparu nécessaire de considérer la solution obtenue à partir d'une somme finie de masses de Dirac (voir [Le89]). Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ et $S = \{a_1, \cdots, a_N\}$ un système fini de points $a_j \in \Omega$. Soit $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_N)$ avec $\nu_j \in \mathbb{R}, \nu_j > 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant N$. La fonction de Green pluricomplexe du domaine Ω à pôles dans S avec les poids ν_j est définie par $G_{S,\nu}(z) = \sup u(z)$, où le suprémun est pris sur toutes les fonctions plurisousharmoniques négatives sur Ω à pôle logarithmique en a_j avec le poid ν_j, pour $1 \leqslant j \leqslant N$. Cette fonction de Green dépend continûment des pôles et peut dans de bons cas converger vers la solution d'autres problèmes extrémaux (voir [Niv04]).

On généralise facilement la définition de la fonction de Lempert au cas de plusieurs pôles :

$$\delta_{S,\nu}(z) := \inf \sum_{j=1}^{N} \nu_j \log|a_j|,$$

où l'infimum est pris sur tous les $\{a_j\} \subset \mathbb{D}$ pour lesquels il existe un disque analytique $f : \mathbb{D} \to \Omega$ tel que $f(0) = z$ et que $f(a_j) = p_j$, pour $1 \leqslant j \leqslant N$.

Comme il est facile de voir que $G_{S,\nu}(z) \leqslant \delta_{S,\nu}(z)$, et que l'égalité est encore vérifiée pour deux pôles dans la boule, la question a été posée par D. Coman de l'égalité en général (voir [Com00]). Un premier contre-exemple a été trouvé en 2003 (voir [Tho-Trao03]), puis un contre-exemple minimal en 2009 (voir [Tho12]). Dans les deux cas, on déduit l'inégalité d'une inégalité stricte entre des cas limites. C'était une motivation pour étudier la limite des fonctions de Green à plusieurs pôles quand ceux-ci entrent en collision.

Une autre motivation est que les pôles de fonctions de Green correspondent à des zéros de fonctions holomorphes, et que des zéros qui se confondent s'interprètent en termes de multiplicités. Quand on considère l'annulation sur des hypersurfaces complexes (comme pour les points dans le plan !), la multiplicité est un entier ; en général, elle s'exprime en termes d'idéaux d'annulation de fonctions holomorphes. La notion de fonction de Green d'un idéal étant disponible (voir [Ras-Sig05]), il devenait naturel de se demander si les idéaux d'annulation associés à une famille de pôles admettaient une limite, et si la famille de fonctions de Green associées aux pôles convergeait vers la fonction de Green associée à l'idéal limite. La réponse est non, en général (voir [Ma-Ras-Sig-Tho11]), mais on peut trouver des théorèmes de convergence des fonctions de Green à l'aide de limites de familles d'idéaux plus compliquées (voir [Ras-Tho12]).

L'article ([Ma-Ras-Sig-Tho11]) donnait à titre d'exemple une étude détaillée des limites de fonctions de Green pour trois pôles dans $\mathbb{C}^2$. Le présent travail poursuit cette étude.

Le plan de notre travail est le suivant :

On commence, dans le chapitre 2, par donner un résultat qui facilite l'étude de la convergence d'une famille d'idéaux : si on impose une condition de codimension (facile à vérifier), il suffit de vérifier soit partie « limite supérieure », soit la partie « limite inférieure » de la définition de la convergence, ce qui simplifie de nombreuses preuves.

Puis le chapitre 3 se concentre sur un cas dégénéré de limite de fonction de Green pour trois pôles qui avait été laissé de côté dans ([Ma-Ras-Sig-Tho11]). De façon peut-être surprenante, les idéaux correspondant à trois points qui convergent vers l'origine en suivant asymptotiquement la même direction peuvent dans certains cas converger vers le carré de l'idéal maximal à l'origine.

Enfin dans le chapitre 4, on détaille les situations possibles correspondant à 4 pôles tendant vers l'origine. A l'inverse du cas de 3 points, c'est la situation d'intersection complète qui se trouve être générique ; l'étude se concentre donc sur les cas dégénérés, qui font surgir un certain nombre de questions intéressantes, et pour lesquels les limites des fonctions de Green correspondantes ne sont pas toujours connues, quoiqu'on obtienne un certain nombre d'estimations.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit quelques notions élémentaires de théorie du potentiel en plusieurs variables complexes et la fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles. Ensuite, on rappellera les résultats de convergence de cette fonction à pôles logarithmiques simples dans le cas où le nombre de pôles est fini et tous les pôles tendent vers un seul point.

1.1 Fonction de Green pluricomplexe

Dans cette section, nous donnons les définitions et propriétés principales de la fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles. Tout d'abord, on introduit quelques notions élémentaires de théorie du potentiel. Lorsque nous faisons référence aux fonctions harmoniques et sousharmoniques, nous identifions $\mathbb{C}^n$ avec $\mathbb{R}^{2n}$.

La référence générale pour cette section est [Kli91].

1.1.1 Fonctions pluriharmoniques et plurisousharmoniques

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $u \in \mathcal{C}^2\big(\Omega\big)$ une fonction à valeurs réelles. Alors u est dite *pluriharmonique* sur Ω si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où $j, k = 1, \cdots, n$. On désigne $\mathcal{PH}\big(\Omega\big)$ la famille des fonctions pluriharmoniques sur Ω. De façon équivalente, une fonction $u \in \mathcal{C}^2\big(\Omega\big)$ est pluriharmonique si et seulement si la restriction de u sur l'intersection de Ω et de toute droite complexe est harmonique. Autrement dit, si $a \in \Omega$ et $b \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, la fonction d'une variable $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$, considérée comme une fonction de deux variables réelles, est harmonique sur son domaine de définition. De plus, $u \in \mathcal{PH}\big(\Omega\big)$ si et seulement si $u \circ T \in \mathcal{H}\big(T^{-1}(\Omega)\big)$, por tout $\mathbb{C}$-isomorphisme affine $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Il est clair que, pour $n = 1$, une fonction pluriharmonique est harmonique dans $\mathbb{R}^2$. Si $n > 1$ et $\Omega \subset \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$, alors $\mathcal{PH}\big(\Omega\big) \subsetneq \mathcal{H}\big(\Omega\big)$. Par exemple, compte tenu des équations de Cauchy-Riemann, si $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\big)$, alors $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f \in \mathcal{PH}\big(\Omega\big)$.

De la même manière, une fonction u est dite *plurisousharmonique*, si elle reste encore sousharmonique après un changement de coordonnées localement biholomorphes. De façon équivalente, u est plurisousharmonique, si elle est sousharmonique sur chaque droite complexe, i.e. pour chaque $a \in \Omega$ et $b \in \mathbb{C}^n$, la fonction $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ est sousharmonique ou identiquement $-\infty$ sur chaque composante de l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$. On désigne $\mathcal{PSH}\big(\Omega\big)$ la famille des fonctions plurisousharmoniques sur Ω. Cette famille est un cône convexe. Si $u \in \mathcal{C}^2\big(\Omega\big)$, alors $u \in \mathcal{PSH}\big(\Omega\big)$ si et seulement si la matrice carrée d'ordre n, $H(u) := \big(\partial^2 u / \partial z_j \partial \bar{z}_k\big)$ est semi-définie positive.

Une fonction plurisousharmonique u sur Ω est dite *maximale* si elle satisfait la propriété suivante : Pour tout domaine relativement compact U dans Ω, et pour chaque fonction semi-continue supérieurement v sur $\overline{U}$ telle que $v \in \mathcal{PSH}\big(U\big)$, si $v \leqslant u$ sur ∂U, alors $v \leqslant u$ sur U. Comme la fonction

$$\begin{cases} \max\{u(z), v(z)\} \text{ si } z \in U \\ u(z) \text{ si } z \in \Omega \backslash U, \end{cases}$$

est plurisousharmonique sur Ω, cette définition est équivalente à ce qui suit : Pour chaque $v \in \mathcal{PSH}\big(\Omega\big)$ et pour tout domaine $U \Subset \Omega$, la condition $v \leqslant u$ sur $\Omega \backslash U$ implique $v \leqslant u$ sur U. On écrit $u \in \mathcal{MPSH}\big(\Omega\big)$. Si $u \in \mathcal{C}^2\big(\Omega\big)$, alors $u \in \mathcal{MPSH}\big(\Omega\big)$ si et seulement si $\det H(u) = 0$. Il est évident que $\mathcal{PH}\big(\Omega\big) \subset \mathcal{MPSH}\big(\Omega\big)$, et dans le cas où $n = 1$ ils sont égaux. Par contre, si $n \geqslant 2$, $\mathcal{MPSH}\big(\Omega\big)$ est beaucoup plus grand. Par exemple, les fonctions plurisousharmoniques maximales ne sont pas nécessairement lisses. Un exemple sur $\mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$ est la fonction $\max\{\log|z_1|, \log|z_2|\}$. En dimension $n > 1$, Bedford et Taylor [Be-T76] ont démontré que les fonctions plurisousharmoniques localement bornés $u \in \mathcal{PSH} \cap L^{\infty}_{loc}\big(\Omega\big)$ sont maximales si et seulement si l'équation de Monge-Ampère homogène $\big(dd^c u\big)^n = 0$ est vérifiée sur Ω.

On peut considérer que les fonctions plurisousharmoniques maximales sont comme les fonctions harmoniques pour la théorie classique.

1.1.2 Fonctions de Green pluricomplexes à plusieurs pôles G_S

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ et $a \in \Omega$. La définition suivante figure dans Klimek [Kli85].

Définition 1.1.1. *La fonction de Green pluricomplexe* du (ou relative au) domaine Ω à pôle en $a \in \Omega$ est définie par

$$G_{\{a\}}(z) := \sup \big\{u(z) : u \in \mathcal{PSH}\_(\Omega), \\ u(z) \leqq \log||z-a|| + O(1), \text{ lorsque } z \to a\},$$

où $\mathcal{PSH}\_(\Omega)$ désigne par l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques négatives sur Ω.

Ecrivons en abrégé $G_a := G_{\{a\}}$. On définit $G(z,a) := G_a(z)$, pour tout $z \in \Omega$. Cette fonction a les propriétés suivantes [De87], [Kli91].

1) Elle est invariante par le groupe des automorphismes de Ω. Plus généralement, si $\Omega' \Subset \mathbb{C}^m$ un domaine hyperconvexe, et si $f : \Omega \to \Omega'$ une application holomorphe. Alors pour tout $z, a \in \Omega$ on a

$$G_\Omega(z,a) \geqslant G_{\Omega'}\big(f(z), f(a)\big) =: f^* G_{\Omega'}(z,a),$$

où on désigne par G_Ω la fonction de Green pluricomplexe du domaine Ω. En particulier si f est biholomorphe alors $G_\Omega = f^* G_{\Omega'}$.

3) Elle est plurisousharmonique négative à pôle logarithmique en a.

4) Elle est maximale sur $\Omega \backslash \{a\}$.

5) Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine hyperconvexe, alors $G_\Omega(.,.)$ est continue sur $\overline{\Omega} \times \Omega$.

Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas que $G_a(z)$ tend vers zéro au bord de Ω, même si $\partial\Omega$ est lisse. En fait, il faut et il suffit pour cela que Ω soit un domaine hyperconvexe. Rappelons qu'un ensemble $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est dit un *domaine hyperconvexe* si Ω est ouvert, borné, connexe et il existe une fonction $u \in \mathcal{PSH}\_\big(\Omega\big)$ telle que $\{z \in \Omega \mid u(z) < -c\}$ est relativement compact dans Ω, pour tout $c > 0$. Une telle fonction est dite *exhaustive* pour Ω. Par exemple, un ensemble convexe est toujours hyperconvexe. Plus généralement, un ensemble pseudoconvexe à bord lipschitzien est hyperconvexe [De85].

Ce n'est pas en général vrai que la fonction de Green pluricomplexe est symétrique, i.e. $G(z,a) = G(a,z)$ [Be-De88]. Cependant, elle est symétrique si Ω est un domaine convexe [Lem81].

Soit Ω est un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$. Demailly [De87] a démontré que la fonction de Green pluricomplexe est la solution unique du problème de Dirichlet suivant, relatif à l'opérateur de Monge-Ampère : Pour tout $a \in \Omega$, existe-t-il une fonction $u : \overline{\Omega} \to [-\infty, 0]$, vérifiant

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}\big(\overline{\Omega}\backslash\{a\}\big) \cap \mathcal{PSH}(\Omega), \\ \big(dd^c u\big)^n = 0 \text{ sur } \Omega\backslash\{a\} \\ u(z) = \log|z-a| + O(1) \text{ quand } z \to a, \\ u(z) \to 0 \text{ quand } z \to \partial\Omega \qquad\qquad ? \end{cases} \tag{1.1.1}$$

La résolution du problème de Dirichlet (1.1.1) ci-dessus a été étudiée en détail par L. Lempert [Lem81], [Lem83], qui a obtenu le même résultat ainsi que de nombreux autres résultats quantitatifs lorsque Ω est un domaine convexe. En fait, l'existence de solutions pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur de Monge-Ampère complexe a été démontrée de manière générale par Bedford-Taylor [Be-T76]. Le problème particulier ci-dessus a été étudié aussi par M. Klimek [Kli85] et par L. Lempert [Lem81], [Lem83] ; ce dernier a obtenu des résultats très précis dans la cas d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ strictement convexe. La méthode de Lempert s'appuie sur une étude poussée des disques extrêmaux de Ω pour la métrique de Kobayashi. Dans le cas général cette méthode ne fonctionne plus, et nous avons dû reprendre l'idée de M. Klimek [Kli85], basée sur la méthode antérieure de Perron-Bremermann et sur les résultats de Bedford-Taylor [Be-T76] : la fonction u cherchée du problème de Dirichlet (1.1.1) est l'enveloppe supérieure des fonctions plurisousharmoniques $v \leqslant 0$ sur Ω telles que $v(z) \leqslant \log|z-a| + O(1)$. Enfin, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution unique u du problème de Dirichlet (1.1.1) ci-dessus est que l'ouvert Ω soit hyperconvexe [Kli85, Théorème 1.6].

Plus généralement, Lelong [Le89] a défini et étudié la fonction de Green pluricomplexe multipôle avec un nombre fini de pôles.

Définition 1.1.2. Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ et $S = \{a_1, \cdots, a_N\}$ un système fini de points $a_j \in \Omega$. Soit $\nu := (\nu_1, \cdots, \nu_N)$ avec $\nu_j \in \mathbb{R}, \nu_j > 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant N$. La fonction de Green pluricomplexe du domaine Ω à pôles dans S avec les poids ν_j est définie par

$$G_{S,\nu}(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}\big(\Omega\big), u \leqslant 0\},$$

où $\mathcal{L}\big(\Omega\big) := \{u \in \mathcal{PSH}\big(\Omega\big) : u(z) \leqslant \nu_j \log||z-a_j|| + O(1), \text{ quand } z \to a_j, 1 \leqslant j \leqslant N\}$.

Autrement dit, les fonctions dans $\mathcal{L}\big(\Omega\big)$ ont des pôles logarithmiques d'ordre au moins ν_j en chaque point a_j, $1 \leqslant j \leqslant N$. Le théoreme suivant est dû à Lelong [Le89].

Théorème 1.1.3. *Si Ω est un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$, alors la fonction $u(z) = G_{S,\nu}(z)$ satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}\big(\overline{\Omega}\backslash\{a_1, \cdots, a_N\}\big) \cap \mathcal{PSH}\big(\Omega\big), \\ \big(dd^c u\big)^n = (2\pi)^n \sum \nu_j^n \delta_{a_j}, \\ u(z) \to 0 \text{ quand } z \to \partial\Omega, \end{cases}$$

où δ_{a_j} est la masse de Dirac en a_j, pour tout $1 \leqslant j \leqslant N$.

Ensuite, Carlehed [Ca98] a démontré aussi que la fonction de Green pluricomplexe est la solution unique du problème de Dirichlet.

Théorème 1.1.4 ([Ca98])**.** *Si Ω est un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$, alors la fonction $u(z) = G_{S,\nu}(z)$ est la solution unique du problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}\big(\overline{\Omega}\backslash\{a_1, \cdots, a_N\}\big) \cap \mathcal{PSH}\big(\Omega\big), \\ \big(dd^c u\big)^n = 0 \ \text{sur } \Omega\backslash\{a_1, \cdots, a_N\}, \\ u(z) = \nu_j \log|z-a_j| + O(1) \ \text{quand } z \to a_j, \ \text{pour tout } j, \\ u(z) \to 0 \ \text{quand } z \to \partial\Omega. \end{cases}$$

La fonction de Green pluricomplexe multipôle logarithmiques sur les ensembles dénombrables et sur les variétés analytiques a été introduit et étudié à différents niveaux de généralité par plusieurs auteurs comme Zeriahi [Zer97] et Lárusson and Sigurdsson [La-Sig98], [La-Sig]. Cependant, il existe encore beaucoup de problèmes fondamentaux sans solution concernant cette fonction dans le cas général.

Dans cette thèse, on n'étudiera que le cas où Ω est un domaine borné et hyperconvexe dans $\mathbb{C}^n$ tel que Ω contient l'origine 0, et la fonction de Green pluricomplexe a le poids 1 en tous les pôles, i.e. $\nu_1 = \cdots = \nu_N = 1$. On écrit alors G_S au lieu de $G_{S,\nu}$.

Il est facile de démontrer l'estimation suivante qui résulte directement de la définition de la fonction de Green pluricomplexe.

Proposition 1.1.5. *Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ et $S = \{a_1, \cdots, a_N\}$ un système fini de points $a_j \in \Omega$. Alors*

$$\sum_{j=1}^{N} G_{a_j}(z) \leqslant G_S(z) \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant N} G_{a_j}(z).$$

Démonstration. De la définition de la fonction de Green pluricomplexe, il résulte que la fonction sur le côté gauche est, par abus de langage, un "candidat" dans la famille de définition pour G_S. De même, G_S est une fonction dans la famille de définition pour chaque fonction sur le côté droit. □

Les exemples de fonction de Green pluricomplexe, comme tous les invariants biholomorphes, sont difficiles à calculer explicitement. Par exemple, il est facile de vérifier que $G_0(z) = \log|z|$ est la fonction de Green pluricomplexe de la boule unité $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$ à pôle logarithmique en 0. Pour calculer, plus généralement, la formule de cette fonction à pôle logarithmique en point $a \in B(0,1)$ quelconque, on a besoin du Lemme suivant.

Lemme 1.1.6. *Soit $w \in B(0,1)$ et on définit*

$$T_w(z) := \frac{w - P_w(z) - \big(1 - |w|^2\big)^{1/2} Q_w(z)}{1 - \langle z, w\rangle},$$

où P_w est la projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ sur sous-espace vectoriel engendré par w, et Q_w est la projection de $\mathbb{C}^n$ sur le supplémentaire orthogonal du sous-espace vectoriel ci-dessus. Alors

1) T_w est un automorphisme holomorphe de $B(0,1)$ qui est appelé transformation de Möbius,

2) $T_w(0) = w$ et $T_0(w) = 0$,

3) $T_w\big(T_w(z)\big) = z$,

4) On a

$$|T_w(z)|^2 = 1 - \frac{\big(1 - |z|^2\big)\big(1 - |w|^2\big)}{|1 - \langle z, w\rangle|^2},$$

5) Le jacobien réel de la fonction T_w en z est donné par

$$\left(\frac{1 - |w|^2}{|1 - \langle z, w\rangle|^2}\right)^{n+1}.$$

Démonstration. Par Rudin [Ru80], page 25-28. □

Lemme 1.1.7. *La fonction de Green pluricomplexe de la boule unité à pôle en w est donnée par*

$$G_w(z) = \log|T_w(z)| = \log|T_z(w)|.$$

Démonstration. La première égalité résulte immédiatement de la propriété d'invariance par le groupe des automorphismes de la fonction de Green pluricomplexe. Et la deuxième égalité est évidente par le Lemme précédent. □

De manière analogue, on peut calculer la fonction de Green pluricomplexe du polydisque unité $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$. Dans ce cas-là, le résultat est donné par

$$G_w(z) = \max\{\log|T_{w_1}(z_1)|, \cdots, \log|T_{w_n}(z_n)|\} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \log\left|\frac{z_j - w_j}{1 - \bar{w}_j z_j}\right|.$$

En particulier, dans le cas où $n = 2$, la fonction de Green du bidisque unité $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ à pôle $(a, 0) \in \mathbb{D}^2$ est défini par

$$G_{\{(a,0)\}}(z) = \max\left\{\log\left|\frac{z_1 - a}{1 - \bar{a}z_1}\right|, \log|z_2|\right\}, \ \forall z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2.$$

Enfin, si $n = 2$, la fonction de Green pluricomplexe du bidisque d'unité $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ à pôles en $w_j = (a_j, 0) \in \mathbb{D}^2$, pour $1 \leqslant j \leqslant N$, est connue [Ca98],

$$G_{\{w_j\}_j}(z) = \max\left\{\sum_{j=1}^{N} \log\left|\frac{z_1 - a_j}{1 - \bar{a}_j z_1}\right|, \log|z_2|\right\}.$$

1.1.3 Fonction de Green pluricomplexe associée à un idéal de fonctions holomorphes $G_{\mathcal{I}}$

Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur un domaine (ouvert connexe) hyperconvexe borné Ω dans $\mathbb{C}^n$ qui contient l'origine 0. Pour chaque sous ensemble S dans Ω, on désigne par $\mathcal{I}(S)$ l'idéal de toutes les fonctions holomorphes qui s'annulent sur S. Considérons les idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ tels que son ensemble de zéros

$$V(\mathcal{I}) := \{z \in \Omega : f(z) = 0, \forall f \in \mathcal{I}\}$$

est fini. Les éléments de $\mathcal{I}$ sont défini par les conditions locales suivantes : Comme le domaine Ω est hyperconvexe, donc pseudoconvexe, il existe alors un nombre fini de générateurs $\psi_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{I}$, il existe les fonctions holomorphes $h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que $f = \sum_j h_j \psi_j$, voir [Hör90, Théorème 7.2.9, page 190].

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que $V(\mathcal{I})$ est un ensemble fini. Si $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{I}^p$ désigne l'idéal engendré par tous les produits de p éléments de $\mathcal{I}$.

On rappelle les définitions suivantes de longueur et multiplicité de Hilbert-Samuel d'un tel idéal.

Définition 1.1.8. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}(\Omega)$ tel que $V(\mathcal{I})$ est un ensemble fini.

1. *La longueur* d'idéal $\mathcal{I}$ est $\ell(\mathcal{I}) := \dim \mathcal{O}/\mathcal{I} < \infty$ (à cause du théorème des zéros de Hilbert, aussi appelé Nullstellensatz.)
2. *La multiplicité de Hilbert-Samuel* de l'idéal $\mathcal{I}$ est

$$e(\mathcal{I}) := \lim_{k \to \infty} \frac{n!}{k^n} \ell(\mathcal{I}^k) < \infty.$$

3. On dit que $\mathcal{I}$ est *un idéal paramétré* ou *un idéal d'intersection complète* si l'idéal $\mathcal{I}$ admet un ensemble de n générateurs.

Par exemple, soit $a \in \Omega$, on définit

$$\mathfrak{M}_a := \mathcal{I}_{\{a\}} = \langle z_1 - a_1, ..., z_n - a_n \rangle .$$

Alors

$$\ell\big(\mathfrak{M}_a\big) = 1, \ell\big(\mathfrak{M}_a^p\big) = \binom{n+p-1}{n}, \text{ pour } p \geqslant 1.$$

En particulier, nous nous intéressons à l'idéal $\mathfrak{M}_0^2$ avec $\ell\big(\mathfrak{M}_0^2\big) = n+1$. C'est le carré de l'idéal maximal en zéro. Autrement dit, $\mathfrak{M}_0^2$ est l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\big)$ telle que $f(0) = 0$ et les dérivées partielles premières de f, $\frac{\partial f}{\partial z_j}(0) = 0$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$.

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions holomorphes qui s'annulent en N points distincts $a_1, ..., a_N$. Il vient alors $\ell\big(\mathcal{I}\big) = N$.

Démonstration. Considérons l'application linéaire $F : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{C}^N$ définie par $F(f) := \big(f(a_1), ..., f(a_N)\big)$, pour tout $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\big)$. Il est évident que $KerF = \mathcal{I}$. Il vient alors $\ell\big(\mathcal{I}\big) = \dim \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I} = \dim ImF$. Il suffit pour l'assertion de vérifier que $ImF = \mathbb{C}^N$. Soit v une direction non-nulle dans $\mathbb{C}^n$ telle que les droites complexes l_j de direction v passent par le point a_j et que $a_k \notin l_j$, pour tout $k \neq j, k, j = 1, ..., N$. Posons

$$F_j := \frac{l_1(z)...\hat{l_j}(z)...l_N(z)}{l_1(a_j)...\hat{l_j}(a_j)...l_N(a_j)} \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n], j = 1, ..., N.$$

Alors $F_j(a_j) = 1$ et $F_j(a_k) = 0$, pour tout $k \neq j, k, j = 1, ..., N$. Pour tout $(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{C}^N$, il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ définie par $f := \sum_{j=1}^N x_j F_j$. Il vient alors $f(a_k) = x_k$, pour tout $k = 1, ..., N$.

Il est connu que $e\big(\mathcal{I}\big) \geqslant \ell\big(\mathcal{I}\big)$. Il ne sont que égaux dans quelques cas très particuliers.

Proposition 1.1.9. *[Zar-Sam75, Chap. VIII, Theorème 23] Si $V(\mathcal{I}) = \{a\}$, alors $e\big(\mathcal{I}\big) \geqslant \ell\big(\mathcal{I}\big)$, et $e\big(\mathcal{I}\big) = \ell\big(\mathcal{I}\big)$ si et seulement si $\mathcal{I}$ est un idéal d'intersection complète.*

L'objet principal de la thèse est la fonction de Green pluricomplexe associée à un idéal $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$, qui est défini ainsi dans [Ras-Sig05] :

Définition 1.1.10. Pour chaque $a \in \Omega$, soit $\big(\psi_{a,i}\big)_i$ un système des générateurs de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$. La fonction de Green pluricomplexe associée à l'idéal $\mathcal{I}$, est défini par

$$G_{\mathcal{I}}(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}\},$$

où

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{PSH}\_\big(\Omega\big), u(z) \leqslant \max_i \log|\psi_{a,i}| + O(1), \forall a \in \Omega\}. \tag{1.1.2}$$

D'après [Ras-Sig05], la fonction $G_{\mathcal{I}}$ est dans la classe $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, et de plus

$$G_{\mathcal{I}}(z) = \max_i \log|\psi_{a,i}| + O(1). \tag{1.1.3}$$

En outre, cette fonction satisfait $\big(dd^c G_{\mathcal{I}}\big)^n = 0$ sur $\Omega \backslash V\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$ et de plus si $V\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) \Subset \Omega$, elle est égale à 0 au bord de $\partial\Omega$. Par ailleurs, elle est l'unique fonction plurisousharmonique qui satisfait ces propriétés. Cela implique, en particulier, que pour tout $p \in N$ et pour toute puissance $\mathcal{I}^p$ de l'idéal $\mathcal{I}$, on a

$$G_{\mathcal{I}^p} = p\, G_{\mathcal{I}}. \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.11. Remarquons ici que la condition de définition (1.1.10) ci-dessus ne prend tout son sens que lorsque $a \in V\big(\mathcal{I}\big)$. Il est facile de voir que si $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, alors $G_{\mathcal{I}} \leqslant G_{\mathcal{J}}$. Dans le cas particulier où S est un ensemble fini dans Ω et $\mathcal{I} = \mathcal{I}(S)$, alors

Lemme 1.1.12. $G_{\mathcal{I}(S)} = G_S$.

On réduit alors cette fonction à l'étude de la fonction de Green pluricomplexe avec ses singularités logarithmiques.

La relation entre la masse de Monge-Ampère de la fonction de Green pluricomplexe $G_{\mathcal{I}}$ et la multiplicité de Hilbert-Samuel de l'idéal $\mathcal{I}$ est donnée par le résultat suivant :

Proposition 1.1.13. *Soit $a \in \Omega$. Si $V(\mathcal{I}) = \{a\}$, alors*

$$\left(dd^c G_{\mathcal{I}}\right)^n = e(\mathcal{I})\delta_a,$$

où δ_a est la masse de Dirac en a.

Démonstration. Tout d'abord, la normalisation de l'opérateur d^c est bien choisi telle que on a précisément $\left(dd^c \log|z|\right)^n = \delta_0$ pour l'opérateur de Monge-Ampère dans $\mathbb{C}^n$. Puisque la longueur de l'idéal est fini que Ω est un domaine pseudoconvexe borné, on peut toujours choisir, par Théorème de Cartan B, des générateurs globaux $\psi_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ de l'idéal $\mathcal{I}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{I}$, il existe des fonctions holomorphes $h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que $f = \sum_j h_j \psi_j$ (voir [Hör90, Théorème 7.2.9, page 190]). Par l'hypothèse, de $V(\mathcal{I}) = \{a\}$ et de la relation (1.1.3), il résulte alors que la masse de Monge-Ampère de $G_{\mathcal{I}}$ en a est égale à laquelle de la fonction $\frac{1}{2}\log\sum|\psi_j|^2$. D'après le Lemme 2.1 [De07], on déduit que

$$\left(dd^c G_{\mathcal{I}}\right)^n = e(\mathcal{I})\delta_a.$$

□

1.2 Convergence des fonctions de Green pluricomplexes $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$

Il est connu que la fonction de Green pluricomplexe est plus petite ou égale à la fonction de Lempert [Ca-Wi03], [Com00]. Quand on étudie les cas où cette inégalité est stricte pour des pôles simples, il faut considérer des situations où l'ensemble de pôles $S = S_\varepsilon$ dépend d'un paramètre et l'ensemble de pôles S tend vers un même point quand $\varepsilon \to 0$ [Tho-Trao03]. Ceci a mené à considérer la convergence de la fonction de Green pluricomplexe, $\lim_{\varepsilon\to 0} G_{S_\varepsilon}$.

Le problème de la convergence de la fonction de Green pluricomplexe à nombre fini de pôles logarithmique simples qui tendent vers l'origine est considéré et étudié par [Ma-Ras-Sig-Tho11]. Soit Ω un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$ qui contient l'origine 0. On notera $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Soit $S_\varepsilon := \{a_1(\varepsilon), \cdots, a_N(\varepsilon)\} \subset \Omega$ un ensemble fini de pôles. Supposons que $\lim_{\varepsilon\to 0} a_j(\varepsilon) = 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant N$. Dans [Ma-Ras-Sig-Tho11], à chaque ensemble fini $S_\varepsilon \subset \Omega$, on associe à un idéal radical $\mathcal{I}_\varepsilon := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f(a_j(\varepsilon)) = 0, 1 \leqslant j \leqslant N\}$ et la fonction de Green pluricomplexe associée à l'idéal $\mathcal{I}_\varepsilon$, $G_\varepsilon := G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$. Soit maintenant A un sous ensemble de $\mathbb{C}$ tel que $0 \in \overline{A}\backslash A$ sur lequel nous prenons les limites et soit $(\mathcal{I}_\varepsilon)_{\varepsilon\in A}$ une famille des idéaux dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Nous nous intéressont à la convergence de $\mathcal{I}_\varepsilon$ et de $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$, lorsque $A \ni \varepsilon \to 0$ en général et dans le cas particulier où $\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}(S_\varepsilon)$.

1.2.1 Convergence de famile d'idéaux de fonctions holomorphes

Soit Ω un domaine pseudoconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$. Précisons d'abord les notions de convergence de la famille des idéaux $(\mathcal{I}_\varepsilon)_{\varepsilon\in A}$ sur $\overline{\Omega}$, au sens de la convergence de Hausdorff sur boules unitées des sous espaces vectoriels (voir [Ma-Ras-Sig-Tho11]).

Définition 1.2.1. (i) On appellera *limite inférieure* de la famille des idéaux $(\mathcal{I}_\varepsilon)_{\varepsilon\in A}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$, notée $\liminf_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$, l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles qu'il existe $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ avec $f_\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$, pour tout $\varepsilon \in A$ et que $f_\varepsilon \to f$ uniformément localement, c'est-à-dire, $f_\varepsilon \to f$ uniformément sur tout un compact de Ω, quand $A \ni \varepsilon \to 0$.

(ii) On appelle *limite supérieure* de la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)_{\varepsilon\in A}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$, notée $\limsup\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$, le sous-espace de $\mathcal{O}(\Omega)$ est engendré par toutes les fonctions f telles que $f_j\to f$ uniformément localement quand $j\to\infty$ pour une suite $\varepsilon_j\to 0$ quelconque dans A et pour la suite $f_j\in\mathcal{I}_{\varepsilon_j}$.

(iii) Si les deux limites ci-dessus sont égales, on dit que la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)_{\varepsilon\in A}$ *converge* et on écrit $\lim\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$ pour la valeur commune de la limite inférieure et supérieure de la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)_{\varepsilon\in A}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Remarque 1.2.2. Si A est défini clairement, on écrira $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$, $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$ en abrégé. Il est facile de voir que $\liminf\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$ et $\limsup\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$ sont des idéaux de $\mathcal{O}(\Omega)$. De plus, d'après la définition, on a $\liminf\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\subset\limsup\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$.

Ensuite, la Définition 1.2.1 implique quelques propriétés d'un usage fréquent dans les chapitres suivants. Pour la démonstration en détail, on peut consulter [Ma-Ras-Sig-Tho11].

Lemme 1.2.3. *Si l'on a $\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)\leqslant N$, pour tout $\varepsilon\in A$, donc $\ell\big(\limsup\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\big)\leqslant N$.*

Lemme 1.2.4. *Pour chaque $\varepsilon\in A$, si $\mathcal{I}_\varepsilon$ est un idéal de fonctions holomorphes de $\mathcal{O}(\Omega)$ basé sur N points distincts qui tendent vers 0 lorsque ε tend vers 0, et si $\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)\geqslant N$, pour tout $\varepsilon\in A$, alors $\ell\big(\liminf\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\big)\geqslant N$.*

Corollaire 1.2.5. *Soit $\mathcal{I}_\varepsilon$ une famille convergente d'idéaux basés sur un nombre fini de points distincts au voisinage de l'origine, alors $\ell\big(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\big)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$.*

Démonstration. Comme chaque $\mathcal{I}_\varepsilon$ est un idéal basé sur $N\in\mathbb{N}$ points distincts $a_1^\varepsilon,\dots,a_N^\varepsilon\in\Omega\in\mathbb{C}^n$, on a $\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)=N$. Par suite, d'après le Lemme 1.2.3 et le Lemme 1.2.4, $\ell\big(\liminf\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\big)\geqslant N\geqslant\ell\big(\limsup\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\big)$. Mais, par l'hypothèse, la limite de $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe, donc $\limsup\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon=\liminf\limits_{A\ni\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$. Par suite, $\ell\big(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon\big)=N=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$. □

1.2.2 Inégalités pour la limite de la fonction de Green pluricomplexe $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$

Dans ce paragraphe, on étudiera les relations entre $G_{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon}$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$, où $\mathcal{I}_\varepsilon\in\mathcal{O}(\Omega)$ est une famille d'idéaux. Tout d'abord, donnons quelque estimations de la fonction de Green [Ma-Ras-Sig-Tho11] :

Proposition 1.2.6. *Soit Ω un domaine borné et hyperconvexe tel que $0\in\Omega$. Soit $S_\varepsilon=\big\{a_j^\varepsilon,1\leqslant j\leqslant N\big\}$, avec $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}a_j^\varepsilon=0,1\leqslant j\leqslant N$.*

Alors pour $\delta>0$ quelconque, il existe $\varepsilon_0=\varepsilon_0\big(\delta\big)>0$ tel que pour tout $z\in\Omega\backslash\overline{B}\big(0,\delta\big)$, et pour tout ε tel que $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, on a

$$\big(N+\delta\big)G_0(z)\leqslant G_{S_\varepsilon}(z)\leqslant\big(1-\delta\big)G_0(z).$$

Remarque 1.2.7. De la Proposition 1.2.6 il résulte que la famille G_{S_ε} est équicontinue en tout point près de $\partial\Omega$. En conséquence, une sous-suite de $G_{S_{\varepsilon_j}}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ si et seulement si elle converge uniformément sur tout compact de $\Omega\backslash\{0\}$.

Ensuite, on obtiendra une première estimation de la masse de Monge-Ampère de la limite des fonctions de Green :

Proposition 1.2.8. *Soit $S_\varepsilon \subset \Omega$ un ensemble de N points qui tendent vers 0, lorsque ε tend vers 0. Supposons que $g = \lim_{\varepsilon \to 0} G_{S_\varepsilon}$ au sens de L^1_{loc}. Alors*

$$\big(dd^c g\big)^n\big(\Omega\big) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \big(dd^c G_{S_\varepsilon}\big)^n\big(\Omega\big) = N.$$

Pour démontrer ce résultat, nous rappelons tout d'abord la définition de classe de Cegrell $\mathcal{F}\big(\Omega\big)$ (dans [Ce04, Définition 4.6] ou dans [Ce06]) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine hyperconvexe. La classe $\mathcal{F}\big(\Omega\big)$ de toutes fonctions plurisousharmoniques φ sur Ω telle qu'il existe une suite décroissante $\varphi_j \in \mathcal{E}_0$ telle que $\varphi_j \searrow \varphi$, lorsque $j \to +\infty$ et que $\sup_j \int_\Omega \big(dd^c \varphi_j\big)^n < +\infty$, où $\mathcal{E}_0$ est la classe des fonctions bornées et plurisousharmoniques ψ sur Ω telle que $\lim_{z \to \xi} \psi(z) = 0$, pour tout $\xi \in \partial\Omega$ et que $\int_\Omega \big(dd^c \psi\big)^n < +\infty$.

Posons $\mathcal{I}_* := \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$. Supposons en plus que $V\big(\mathcal{I}_*\big) = \{0\}$. Alors on a toujours une inégalité entre la limite de la fonction de Green et celle associée à la famille des idéaux :

Proposition 1.2.9. *Si $V\big(\mathcal{I}_*\big) = \{0\}$, alors*

$$G_{\mathcal{I}_*} \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon} + O(1).$$

Afin de démontrer cette inégalité, nous avons d'abord besoin d'utiliser la notion de clotûre intégrale d'un idéal :

Définition 1.2.10. *La clôture intégrale* $\overline{\mathcal{I}}$ d'un idéal $\mathcal{I}$ d'un anneau $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous éléments $f \in \mathcal{A}$ tels qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ at $a_i \in \mathcal{I}^{m-i}$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$ tels que

$$f^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i = 0.$$

On dit qu'un idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ est une réduction de $\mathcal{I}$ si et seulement si $\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{I}}$.

Du théorème de Briançon-Skoda [Br-Sk74], il résulte que

$$\overline{\mathcal{I}} = \Big\{ u \in \mathcal{O}(\Omega) : |u| \leqslant C \max_i |\psi_{a,i}| \text{ au voisinage de } a \in \Omega \Big\}, \tag{1.2.1}$$

voir aussi Corollaire 10.5 dans [De, page 395].

Cela implique que $G^\Omega_{\overline{\mathcal{I}}} = G^\Omega_{\mathcal{I}}$ (comme $\mathcal{I} \subset \overline{\mathcal{I}}$, $G^\Omega_{\mathcal{I}} \leqslant G^\Omega_{\overline{\mathcal{I}}}$). De plus, d'après la définition de la fonction de Green et de (1.2.1) ci-dessus, il vient $G^\Omega_{\overline{\mathcal{I}}} \leqslant G^\Omega_{\mathcal{I}}$). Cela donne alors de nombreux exemples d'idéaux distincts avec la même fonction de Green, et est à l'origine du phénomène de non-convergence.

Ensuite, on a le résultat suivant.

Lemme 1.2.11. *Pour tout $\eta > 0$ et tout voisinage ω de 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$,*

$$G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant \big(e\big(\mathcal{I}_*\big) + \eta\big) G_0(z), \; \textit{pour } z \in \Omega \backslash \omega.$$

En particulier, $\liminf_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon} \geqslant e\big(\mathcal{I}_*\big) G_0$.

1.2.3 Convergence uniforme

Dans le cas où $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ converge uniformément sur tout compact de $\Omega\backslash\{0\}$ vers g, de la Proposition 1.2.9 résulte alors $G_{\mathcal{I}_*} \leqslant g$. Cependant, on a une meilleure inégalité (voir [Ma-Ras-Sig-Tho11]).

Proposition 1.2.12. *(i) Si $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ converge uniformément sur tout compact de $\Omega\backslash\{0\}$ vers g, donc $G_{\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon} \leqslant g$.*

(ii) En particulier, si l'on a de plus que la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$ converge, alors

$$G_{\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon} \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}.$$

Ensuite, en vertu de la Proposition 1.1.13 et de $V\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) = \{a\}$, il résulte que $\big(dd^c G_{\mathcal{I}_\varepsilon}\big)^n = e\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) \cdot \delta_a$.

Corollaire 1.2.13. *Sous l'hypothèse de la Proposition 1.2.12 (ii), on a alors*

$$\Big(dd^c \lim_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}\Big)^n \leqslant \Big(dd^c G_{\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon}\Big)^n.$$

En particulier, si l'on a $V\big(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) = \{0\}$, alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ est une fonction plurisousharmonique maximale en dehors de l'origine.

Enfin, on a une condition suffisante de convergence uniforme de la fonction de Green G_{S_ε}, lorsque ε tend vers 0, mais on a tout d'abord besoin de une notion suivante que l'on trouve dans [Cel-Po97].

Définition 1.2.14. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{PSH}\big(\Omega\big)$ telles que $u_1^{-1}\{-\infty\} = u_2^{-1}\{-\infty\} = \{0\}$. On dit que u_1 et u_2 sont *équivalentes près de 0*, et on écrit que $u_1 \sim_0 u_2$, si et seulement si il existe un voisinage U de 0 tel que $(u_1 - u_2)\ |_U \in \mathcal{L}^\infty(U)$.

Cela implique que $\big(dd^c u_1\big)^n\{0\} = \big(dd^c u_2\big)^n\{0\}$.

Proposition 1.2.15. *Supposons qu'il existe une fonction G de Ω dans $[-\infty, 0]$ et une constante $C > 0$ telles que pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$, il existe $\varepsilon(\delta) > 0$ tel que pour tout ε avec $|\varepsilon| < \varepsilon(\delta)$, pour tout z tel que $||z|| = \delta$,*

$$|G_{S_\varepsilon}(z) - G(z)| \leqslant C.$$

Alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_{S_\varepsilon}(z) = g(z)$, uniformément sur tout compact de $\Omega\backslash\{0\}$, et de plus on a évidemment que $g \sim_0 G$.

1.2.4 Condition d'intersection complète uniforme

Dans cette section, on étudiera à quelle condition l'égalité sera réalisée dans la Proposition 1.2.12. Mais on introduit tout d'abord la notion d'intersection complète uniforme de la famille des idéaux [Ma-Ras-Sig-Tho11] :

Définition 1.2.16. La famille des idéaux $(\mathcal{I}_\varepsilon)$ satisfait *la condition d'intersection complète uniforme* si et seulement si pour tout ε, il existe une application holomorphe Ψ_0 et des applications holomorphes Ψ_ε d'un voisinage de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}^n$ telles que Ψ_0 est une application holomorphe propre de Ω à $\Psi_0(\Omega)$, et

(1) $\big\{a_j^\varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant N\big\} = \Psi_\varepsilon^{-1}(\{0\})$, pour tout ε ;

(2) Pour tout $\varepsilon \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant N$ et pour tout z au voisinage de a_j^ε, on a

$$\big|\log||\Psi_\varepsilon(z)|| - \log||z - a_j^\varepsilon||\big| \leqslant C(\varepsilon) < \infty;$$

(3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon = \Psi_0 = (\Psi_0^1, ..., \Psi_0^n)$, uniformément sur $\overline{\Omega}$.

Remarquons que les deux premières conditions impliquent $\mathcal{I}_\varepsilon = \langle \Psi_\varepsilon^1, ..., \Psi_\varepsilon^n \rangle$.

Théorème 1.2.17. *Soit $(\mathcal{I}_\varepsilon)$ une famille d'idéaux qui satisfait la condition d'intersection complète uniforme, posons que $S_\varepsilon = V(\mathcal{I}_\varepsilon)$ et $\mathcal{I}_0 = \langle \Psi_0^1, ..., \Psi_0^n \rangle$. Alors*
(i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0$,
(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = G_{\mathcal{I}_0}$, *et la convergence est localement uniforme sur* $\Omega\backslash\{0\}$.

On verra que les égalités ci-dessus dans le Théorème 1.2.17 sont seulement obtenues rarement.

Exemple 1.2.18. Soit $S_\varepsilon = \{(0,0),(\varepsilon,0),(0,\varepsilon),(\varepsilon,\varepsilon)\}$ un ensemble de 4 points distincts dans le bidisque $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ et $(\mathcal{I}_\varepsilon)$ une famille d'idéaux de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}^2$ telle que $V(\mathcal{I}_\varepsilon) = S_\varepsilon$. Il est facile de voir que $(\mathcal{I}_\varepsilon)$ satisfait la condition d'intersection complète uniforme et que $\mathcal{I}_\varepsilon = \langle \Psi_\varepsilon^1, \Psi_\varepsilon^2 \rangle$, où $\Psi_\varepsilon^1 = z_1(z_1 - \varepsilon)$, $\Psi_\varepsilon^2 = z_2(z_2 - \varepsilon)$. D'après le Théorème 1.2.17, il résulte que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \langle z_1^2, z_2^2 \rangle$ et que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = G_{\mathcal{I}_0} = \max\{2\log|z_1|, 2\log|z_2|\}$, et la convergence est localement uniforme sur $\mathbb{D}^2$.

La démonstration du Théorème 1.2.17 nécessite la caractérisation par les résidus multidimensionnels d'un idéal $\mathcal{I}_\Psi := \langle \Psi^1, ..., \Psi^n \rangle$, où $\Psi = (\Psi^1, ..., \Psi^n)$ une fonction holomorphe sur un domaine hyperconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pour simplifier, supposons que $\Psi^{-1}(0) \cap \Omega = \{0\}$ tel qu'une fonction holomorphe appartient à $\mathcal{I}_\Psi$ si et seulement si son germe en 0 est dans l'idéal des germes de mêmes générateurs que l'on désigne par $\mathcal{I}_{\Psi,0}$. Parce que Ω est un domaine pseudoconvexe, de tels idéaux peuvent être définis par les conditions locales. Ensuite, on a besoin de la notion suivante [Tsi92, paragraphe 5.1, p. 14].

Définition 1.2.19. Soit Ψ une fonction holomorphe $\bar{\omega} \to \mathbb{C}^n$, où ω est un voisinage borné de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\Psi^{-1}(0) \cap \bar{\omega} = \{0\}$. Choisissons une chaîne réelle de dimension n

$$\Gamma = \Gamma^\delta(\Psi) := \{z \in \omega : |\Psi^j| = \delta_j, 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

où les $\delta_j > 0$ sont assez petits pour que $\Gamma^\delta(\Psi)$ soit relativement compact dans ω, avec son orientation déterminée par la condition $d(\arg \Psi_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg \Psi_n) \geqslant 0$ (d'après le Lemme de Sard, nous pouvons choisir les valeurs de δ telles que Γ soit lisse). Soit h une fonction holomorphe sur ω. Alors *le résidu de h au point 0* est défini par

$$res_{\,0,\Psi}(h) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{h\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{\Psi^1 \cdots \Psi^n}.$$

Ce résidu est bien défini dans le sens qu'il ne dépend pas du choix d'une chaîne particulière Γ [Tsi92, page 15]. En effet, il peut être calculé par une intégration sur le bord $\partial\omega$ de ω. Par le principe de continuité [Tsi92, paragraphe 5.4, Proposition, p. 20], on applique cette définition du résidu à la situation du Théorème 1.2.17. Par l'hypothèse de Ψ_ε, pour $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $S_\varepsilon = \Psi_\varepsilon^{-1}(0) \subset \omega$ et qui est son ensemble des zéros isolés. On a donc le fait suivant

Proposition 1.2.20. *Soit h une fonction holomorphe au voisinage de $\bar{\omega}$. Alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{p\in S_\varepsilon} res_{\,p,\Psi_\varepsilon}(h) = res_{\,0,\Psi_0}(h).$$

La caractérisation de l'idéal $\mathcal{I}_\Psi$ suivante est conséquence directe du théorème de dualité locale [Tsi92, paragraphe 5.6, p. 23].

Théorème 1.2.21. *Un germe de fonction holomorphe h appartient à l'idéal $\mathcal{I}_{\Psi,0}$ des germes en* 0 *de fonctions holomorphes qui est engendré par les composantes de Ψ si et seulement si pour tout germe g en* 0 *d'une fonction holomorphe, on a $res_{\,0,\Psi_0}(hg) = 0$.*

Supposons que $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\big)$ et qu'il existe des suites $(f_j) \subset \mathcal{O}\big(\Omega\big)$ et $\varepsilon_j \to 0$ telles que $f_j \in \mathcal{I}_{\varepsilon_j}$, $f_j \to f$ uniformément sur tout compact de Ω quand $j \to \infty$. Soit g un germe en 0 d'une fonction holomorphe quelconque, et soit ω un voisinage de 0 assez petit tel que g est holomorphe au voisinage de $\bar{\omega}$. D'après de la Théorème 1.2.21, pour tout $p \in S_{\varepsilon_j}$, puisque le germe en p de f_j appartient à $\mathcal{I}_{\Psi_{\varepsilon_j},p}$, donc $res_{\,p,\Psi_{\varepsilon_j}}(f_j g) = 0$. De la Proposition 1.2.20, on déduit que $res_{\,0,\Psi_0}(fg) = \lim_{j\to\infty}\sum_{p\in S_{\varepsilon_j}} res_{\,p,\Psi_{\varepsilon_j}}(f_j g) = 0$. D'où, par Théorème 1.2.21, le germe en 0 de f appartient à $\mathcal{I}_{\Psi_0,0}$. On en déduit que $f \in \mathcal{I}_0$. Autrement dit, $\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathcal{I}_0$.

Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{I}_0$, puisque

$$f = \sum_{j=1}^{n} h_j \Psi_0^j = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n} h_j \Psi_\varepsilon^j,$$

avec la convergence uniforme sur tout compact de $\overline{\Omega}$, il résulte donc que $\mathcal{I}_0 \subset \liminf_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$.

En conclusion, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0$.

Il est remarquable que la conclusion subsiste sous la seule hypothèse que la limite de famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ est un idéal d'intersection complète.

Théorème 1.2.22. *Soit $\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$ une famille d'idéaux de fonctions holomorphes sur Ω telle que la limite de $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe, $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}$, où $S_\varepsilon \subset \Omega$ est un ensemble de N points qui tendent vers 0. Alors la suite $\big(G_{\mathcal{I}_\varepsilon}\big)_\varepsilon$ converge uniformément localement vers $G_{\mathcal{I}}$ si et seulement si $\mathcal{I}$ est un idéal d'intersection complète.*

Exemple 1.2.23. Soit $S_\varepsilon = \{(0,0),(\varepsilon,0),(p\,\varepsilon,0),(q\,\varepsilon,0)\}$ un ensemble de 4 points distincts dans le bidisque $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ où $p, q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, p \neq q$. Il est facile de voir qu'il existe $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I} = \big\langle z_1^4, z_2\big\rangle$ car $\mathcal{I}_\varepsilon = \big\langle \Psi_\varepsilon^1, \Psi_\varepsilon^2\big\rangle$, où $\Psi_\varepsilon^1(z) = z_1(z_1-\varepsilon)(z_1-p\,\varepsilon)(z_1-q\,\varepsilon)$, $\Psi_\varepsilon^2(z) = z_2$. Cela implique que $\mathcal{I}$ est un idéal d'intersection complète. Du Théorème 1.2.22, on déduit que $\big(G_{\mathcal{I}_\varepsilon}\big)_\varepsilon$ converge uniformément localement sur le bidisque unité $\mathbb{D}^2$ vers $G_{\mathcal{I}}(z) = \max\{4\log|z_1|, \log|z_2|\}$, pour tout $z \in \mathbb{D}^2\backslash\{0\}$.

Chapitre 2

Convergence de la famille des idéaux de fonctions holomorphes : le cas général

Dans ce chapitre, nous allons donner une méthode pour réduire la vérification de convergence d'une famille d'idéaux de fonctions holomorphes. Plus précisément, nous allons démontrer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la limite d'une famille des idéaux de fonctions holomorphes existe.

2.1 Introduction

Soit Ω un domaine (ouvert connexe) hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$ qui contient l'origine 0. Supposons que A est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ tel que $0 \in \overline{A} \backslash A$. Soit S_ε un ensemble de N points distincts $a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon$ qui tendent vers 0, quand $A \ni \varepsilon \to 0$. Et soit $\left(\mathcal{I}_\varepsilon\right)_{\varepsilon \in A}$ une famille d'idéaux dans $\mathcal{O}(\Omega)$ telle que $V\left(\mathcal{I}_\varepsilon\right) = S_\varepsilon$ et que $\ell\left(\mathcal{I}_\varepsilon\right) = N$.

Notons ensuite π_j la projection orthogonale sur le j-ème axe de coordonnées, pour $j \in \{1, ..., n\}$. Soit $V\left(\mathcal{I}_\varepsilon\right) = \left\{a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon\right\}$. Pour chaque $j \in \{1, ..., n\}$, l'application $m_j : A \longrightarrow \mathbb{N}$ est définie par $m_j(\varepsilon) := \#\pi_j\left(V\left(\mathcal{I}_\varepsilon\right)\right) \leqslant N$. Comme $m_j(U) \in \{1, ..., N\}$, on peut diviser l'ensemble A en une réunion finie d'ensembles A_k telle que pour chaque k, et $j \in \{1, ..., n\}$, on a $\#\pi_j\left(\left\{a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon\right\}\right) = N_{k,j}$ qui est indépendant de ε. Les ensembles qui n'ont pas l'origine dans leur adhérence ne nous concernent pas. Considérons maintenant un ensemble qui satisfait cette propriété, qu'on notera encore A ; nous écrirons $N_j = N_{k,j}$. On considère le produit cartésien des ensembles

$$\Pi_\varepsilon := \pi_1\left(\{a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon\}\right) \times \cdots \times \pi_n\left(\{a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon\}\right),$$

et $\mathcal{J}_\varepsilon$ l'ensemble de toute les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui s'annulent sur P_ε. Il est facile de voir que

$$\ell\left(\mathcal{J}_\varepsilon\right) = \#\Pi_\varepsilon = \Pi_{j=1}^n N_j \leqslant N^n. \tag{2.1.1}$$

Ensuite, la limite de la famille des idéaux $\mathcal{J}_\varepsilon$ existe.

Lemme 2.1.1. *[Ma-Ras-Sig-Tho11, Lemme 2.3] Avec les hypothèses du Lemme 1.2.4, on a*

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J} :=& \\ = &\left\{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}(0) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n, 0 \leqslant k_j \leqslant N_j - 1\right\}.\end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathcal{J} = \left\langle z_1^{N_1}, z_2^{N_2}, \cdots, z_n^{N_n} \right\rangle$.

Cela implique, d'après le Corollaire 1.2.5, que $\ell\big(\mathcal{J}\big) = \ell\big(\mathcal{J}_\varepsilon\big) = d := \prod_{j=1}^n N_j \leqslant N^n$. Il en résulte que les espaces vectoriels suivants sont isomorphes

$$\mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon \cong \mathbb{C}^d \cong \mathcal{O}/\mathcal{J}.$$

Nous utiliserons l'ensemble de multi-indices

$$\Gamma := \{\alpha = \big(\alpha_1, ..., \alpha_n\big) \in \mathbb{N}^n : 0 \leqslant \alpha_j \leqslant N_j - 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Posons, pour $\alpha = \big(\alpha_1, ..., \alpha_n\big) \in \Gamma$,

$$\Psi_\alpha(z) = z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} ... z_n^{\alpha_n},$$

où $z = (z_1, ..., z_n) \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$. Il est facile de voir que le système $\{[\Psi_\alpha]\}_{\alpha\in\Gamma}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{O}/\mathcal{J}$. Soient $b_j^{i,\varepsilon}$ les éléments de $\pi_j\big(\{a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon\}\big)$, $1 \leqslant i \leqslant N_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Donc $\#\pi_j\big(S_\varepsilon\big) = N_j \leqslant N$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. On pose, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, et pour $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$\varphi_{\alpha,j}^\varepsilon(\zeta) := \begin{cases} \big(\zeta - b_j^{1,\varepsilon}\big) \cdots \big(\zeta - b_j^{\alpha,\varepsilon}\big), & \text{si} \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N_j - 1 \\ \\ 1, & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

et pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on définit

$$\Psi_\alpha^\varepsilon(z) := \prod_{j=1}^n \varphi_{\alpha_j,j}^\varepsilon\big(z_j\big).$$

Il est évident de voir que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Psi_\alpha^\varepsilon(z) = \Psi_\alpha(z)$, pour tout $z \in \Omega$.

Pour tout $f \in \mathcal{O}$, $[f]$ désigne une classe dans $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ et $[f]_{\mathcal{J}_\varepsilon}$ est une classe dans $\mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon$. Alors on a le résultat suivant

Proposition 2.1.2. *Le système* $\{[\Psi_\alpha^\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\}_{\alpha\in\Gamma}$ *est libre dans l'espace vectoriel quotient* $\mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon$. *Donc c'est une base de* $\mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon$.

Démonstration. Supposons que, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} \lambda_\alpha [\Psi_\alpha^\varepsilon(z)]_{\mathcal{J}_\varepsilon} = 0 \in \mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon.$$

Alors $g(z) := \sum\limits_{\alpha\in\Gamma} \lambda_\alpha \Psi_\alpha^\varepsilon(z) \in \mathcal{J}_\varepsilon$. Autrement dit, $g\,|_{\Pi_\varepsilon} = 0$.

Montrons maintenant que $\lambda_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \Gamma$. Pour cela, on raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors

$$g(z) = \lambda_0 + \lambda_1\big(z - a_1^\varepsilon\big) + \cdots + \lambda_{N-1}\Pi_{i=1}^{N-1}\big(z - a_i^\varepsilon\big) \in \mathcal{J}_\varepsilon,$$

où $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon, \cdots, a_N^\varepsilon\}$. On a donc $\lambda_k = 0$, pour $k = 0, 1, ..., N-1$ ce qui s'obtient en prenant successivement $z = a_i^\varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant N$. En effet, de $g(a_i^\varepsilon) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant N$, il résulte que les λ_k sont solution du système linéaire (triangulaire inférieur)

$$\begin{cases} 0 = g\big(a_1^\varepsilon\big) = \lambda_0 \\ 0 = g\big(a_2^\varepsilon\big) = \lambda_0 + \lambda_1(a_2^\varepsilon - a_1^\varepsilon) \\ \cdots\cdots \\ 0 = g\big(a_N^\varepsilon\big) = \lambda_0 + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \lambda_\alpha \Pi_{i=1}^k\big(z - a_i^\varepsilon\big) \end{cases}$$

La résolution de ce système triangulaire est simple. Calculons les λ_α, $0 \leqslant \alpha \leqslant N-1$, de proche en proche, en commençant par $\lambda_0 = 0$. Comme $a_i^\varepsilon \neq a_j^\varepsilon$, pour $i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant N$, il s'en suit que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{N-1} = 0$.

Ecrivons maintenant $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$, où $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ et $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$. Posons

$$\Gamma' = \{\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) : \alpha = (\alpha', \alpha_n) \in \Gamma\}.$$

et

$$\Pi'_\varepsilon = \{b' \in \pi_1(S_\varepsilon) \times \cdots \times \pi_{n-1}(S_\varepsilon) : b = (b', b_n^{i,\varepsilon}) \in \Pi_\varepsilon, b_n^{i,\varepsilon} \in \pi_n(S_\varepsilon), 1 \leq i \leq N_n\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} g(z) &:= \sum_{\alpha \in \Gamma} \lambda_\alpha \Psi_\alpha^\varepsilon(z) \\ &= \beta_0(z') + \beta_1(z')\big(z_n - b_n^{1,\varepsilon}\big) + \cdots + \beta_{N_n-1}(z') \prod_{\alpha_n=1}^{N_n-1} \big(z_n - b_n^{\alpha_n,\varepsilon}\big), \end{aligned}$$

où

$$\beta_{\alpha_n}(z') := \sum_{\alpha' \in \Gamma'} \lambda_{\left(\alpha', \alpha_n\right)} \Psi_{\alpha'}^\varepsilon(z'),$$

et

$$\Psi_{\alpha'}^\varepsilon(z') = \prod_{j=1}^{n-1} \varphi_{\alpha_j}^\varepsilon\big(z_j\big).$$

Considérons ensuite le système linéaire suivant, pour tout z' fixé :

$$\begin{cases} g\big(z', b_n^{1,\varepsilon}\big) = \beta_0\big(z'\big) \\ g\big(z', b_n^{2,\varepsilon}\big) = \beta_0(z') + \beta_1(z')\big(b_n^{2,\varepsilon} - b_n^{1,\varepsilon}\big) \\ \cdots\cdots \\ g\big(z', b_n^{N_n,\varepsilon}\big) = \beta_0\big(z'\big) + \sum_{\alpha_n=1}^{N_n-1} \beta_{\alpha_n}\big(z'\big) \prod_{j=1}^{\alpha_n} \big(b_n^{N_n,\varepsilon} - b_n^{j,\varepsilon}\big). \end{cases}$$

Comme $g\big(z', b_n^{j,\varepsilon}\big) = 0$ sur Π'_ε et les $b_n^{j,\varepsilon}$ sont distincts, pour $1 \leqslant j \leqslant N_n$, le polynôme $\beta_0(z')$ est aussi nul sur Π'_ε. L'hypothèse de récurrence implique que $\lambda_{\left(\alpha',0\right)} = 0$, pour tout $\alpha' \in \Gamma'$. Autrement dit, $\beta_0(z') \equiv 0$. Du système linéaire ci-dessus, on extrait que $\beta_1(z') = \dfrac{g\big(z', b_n^{2,\varepsilon}\big)}{b_n^{2,\varepsilon} - b_n^{1,\varepsilon}}$ est nul sur Π'_ε. Donc par l'hypothèse de récurrence $\lambda_{\left(\alpha',1\right)} = 0$, pour tout $\alpha' \in \Gamma'$. Il vient $\beta_1(z') \equiv 0$. On raisonne de manière tout à fait analogue pour voir que la solution du système triangulaire pour $z' \in \Pi'_\varepsilon$ donne

$$\beta_0\big(z'\big) = \beta_1\big(z'\big) = \cdots = \beta_{N_n-1}\big(z'\big) \equiv 0.$$

On en déduit que, par l'hypothèse de récurrence, $\lambda_{\left(\alpha',\alpha_n\right)} = 0$, pour tout $\alpha' \in \Gamma'$ et pour $0 \leqslant \alpha_n \leqslant N_n - 1$. Donc $\lambda_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \Gamma$. □

En conséquence, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels Φ_ε (ie. une application linéaire bijective) de $\mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon$ vers $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ tel que

$$\Phi_\varepsilon\Bigg(\big[\Psi_\alpha^\varepsilon\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\Bigg) = \big[\Psi_\alpha\big],$$

pour $\alpha \in \Gamma$.

Soit $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\big)$. Supposons que le polydisque unité $\mathbb{D}^n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \cdots, n\}$ est inclus dans Ω. Alors le développement de f en série entière au voisinage de 0 est

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha,$$

où $\alpha = \big(\alpha_1, \cdots, \alpha_n\big) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ et d'après la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} D^\alpha f(0) &:= \big(\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\frac{\partial}{\partial z_n}\big)^{\alpha_n} \\ &= \frac{\alpha!}{\big(2\pi i\big)^n} \int_{\partial_0 \mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{\prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{O}/\mathcal{J} \ni [f(z)] = \sum_{\alpha \in \Gamma} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} [z^\alpha] = \sum_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha(f) [\Psi_\alpha(z)],$$

où $C_\alpha(f) := \dfrac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}$.

On munit l'espace vectoriel quotient $\mathcal{O}/\mathcal{J}$, d'une norme $\|.\|$ définie par

$$\|[f]\| =: \max_{\alpha \in \Gamma} |C_\alpha(f)|,$$

pour tout $[f] \in \mathcal{O}/\mathcal{J}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\big)$. Comme la suite $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, converge uniformément sur tout compact de Ω vers $D^\alpha f$,

$$\|[f_n] - [f]\| = \max_{\alpha \in \Gamma} |C_\alpha(f_n) - C_\alpha(f)| \to 0. \tag{2.1.2}$$

Donc la suite $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $[f]$ dans $\mathcal{O}/\mathcal{J}$. De plus, nous allons montrer l'assertion suivante.

Proposition 2.1.3. *Dans l'espace vectoriel quotient $\mathcal{O}/\mathcal{J}$, la suite $\big\{\Phi_\varepsilon\big([f_n]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big)\big\} \in$ converge vers $[f]$, quand $\varepsilon \to 0$ et $n \to +\infty$.*

Démonstration. Tout d'abord, pour chaque $\alpha \in \Gamma$, les polynômes Ψ_α^ε peuvent s'écrire, pour $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\Psi_\alpha^\varepsilon(z) = z^\alpha + \sum_{\beta \leqslant \alpha, \beta \neq \alpha} m_{\alpha,\beta}^\varepsilon(b_j^{i,\varepsilon}) \Psi_\beta(z),$$

où on écrit $\beta \leqslant \alpha$ quand $\beta = \big(\beta_1, \cdots, \beta_n\big)$ et $0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$; et les coefficients $m_{\alpha,\beta}^\varepsilon(b_j^{i,\varepsilon})$ contiennent des $b_j^{i,\varepsilon}$, où $1 \leqslant i \leqslant \alpha_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors pour ε assez petit, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ tel que $|b_j^{i,\varepsilon}| < 1$, on a, pour $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} \big[f(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} &= \sum_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha(f) [z^\alpha]_{\mathcal{J}_\varepsilon} + \sum_{j=1}^n \big[z_j^{N_j}.R_j(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha(f) \big[\Psi_\alpha^\varepsilon(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} - \sum_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha(f) \sum_{\beta \leqslant \alpha, \beta \neq \alpha} m_{\alpha,\beta}^\varepsilon(b_j^{i,\varepsilon}) \big[\Psi_\beta(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} \\ &+ \sum_{j=1}^n \big[z_j^{N_j}.R_j(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Comme

$$z_j^{N_j} = \prod_{i=1}^{N_j} \big(z_j - b_j^{i,\varepsilon}\big) + \sum_{k=0}^{N_j - 1} m_k^\varepsilon \big(b_j^{i,\varepsilon}\big) z_j^k,$$

pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon \Big(\big[f(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} \Big) = \sum_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha(f) [\Psi_\alpha(z)] = [f(z)], \tag{2.1.3}$$

puisque $m_k^\varepsilon(b_j^{i,\varepsilon}), m_{\alpha,\beta}^\varepsilon(b_j^{i,\varepsilon})$ convergent vers 0 lorsque ε tend vers 0, et $\prod_{i=1}^{N_j}\left(z_j - b_j^{i,\varepsilon}\right) \in \mathcal{J}_\varepsilon$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ensuite, supposons que

$$[f_n]_{\mathcal{J}_\varepsilon} = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^\varepsilon(f_n)[\Psi_\alpha^\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon} \in \mathcal{O}/\mathcal{J}_\varepsilon.$$

Donc

$$\Phi_\varepsilon\big([f_n]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big) = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^\varepsilon(f_n)\Phi_\varepsilon\left(\left[\Psi_\alpha^\varepsilon\right]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\right) = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^\varepsilon(f_n)\left[\Psi_\alpha\right] \in \mathcal{O}/\mathcal{J}.$$

Cela implique

$$\|\Phi_\varepsilon\big([f_n]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big) - [f]\| = \max_{\alpha\in\Gamma}|C_\alpha^\varepsilon(f_n) - C_\alpha(f)|.$$

Or

$$\max_{\alpha\in\Gamma}|C_\alpha^\varepsilon(f_n) - C_\alpha(f)| \leq |C_\alpha^\varepsilon(f_n) - C_\alpha(f_n)| + |C_\alpha(f_n) - C_\alpha(f)|,$$

et si on se donne $\delta > 0$, le deuxième terme est majoré par $\delta/2$ pour n assez grand, d'après (2.1.2) ; une fois n fixé, on peut choisir ε pour majorer le premier terme, d'après (2.1.3), d'où le résultat. □

Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

Proposition 2.1.4. *Si l'on a $\ell\big(\limsup_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) \geqslant N$, alors la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ converge vers un idéal $\mathcal{I}$, avec $\ell\big(\mathcal{I}\big) = N$.*

Remarque. Comme $\ell(I_\varepsilon) \leq N$ pour tout ε, on a d'après le Lemme 1.2.3 que $\ell\big(\limsup_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) \leqslant N$, donc l'hypothèse signifie en fait que la longueur de la limite supérieure est exactement égale à N.

De même au cas de la limite inférieure,

Proposition 2.1.5. *Si l'on a $\ell\big(\liminf_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) \leqslant N$, alors la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ converge vers un idéal $\mathcal{I}$, avec $\ell\big(\mathcal{I}\big) = N$.*

Remarque. De la même manière, en appliquant le Lemme 1.2.4, on voit que l'hypothèse est équivalente à $\ell\big(\liminf_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) = N$

Dans la pratique, nous utiliserons souvent le résultat suivant

Corollaire 2.1.6. *Soit J un idéal dans $\mathcal{O}\big(\Omega\big)$ tel que $\ell(J) = N$. Supposons que $\limsup_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset J$ ou que $J \subset \liminf_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$. Alors la limite de la famille d'idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe et vaut J.*

2.2 Preuve des résultats principaux

Posons que

$$\mathcal{I}_* := \liminf_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon, \text{et } \mathcal{I}^* := \limsup_{A\ni\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon.$$

Ecrivons $\lim_{\varepsilon\to 0}$ au lieu de $\lim_{A\ni\varepsilon\to 0}$ en abrégé.

Comme $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_* \subset \mathcal{I}^*$, donc $\mathcal{I}_*/\mathcal{J} \subset \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$. Alors

Proposition 2.2.1. *Si l'on a $\mathcal{I}_*/\mathcal{J} = \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$, alors $\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$.*

Démonstration. On a toujours que $\mathcal{I}_* \subset \mathcal{I}^*$. De plus, quel que soit $f \in \mathcal{I}^*$, on a par l'hypothèse que $[f] \in \mathcal{I}^*/\mathcal{J} = \mathcal{I}_*/\mathcal{J}$. Alors il existe $g \in \mathcal{I}_*$ telle que $f - g = h \in \mathcal{J} \subset \mathcal{I}_*$. Donc $f = g + h \in \mathcal{I}_*$. On en déduit que $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}_*$. □

Nous allons maintenant nous réduire à un résultat sur la convergence de familles de sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien (de dimension finie, donc).

Identifions $\big(\mathcal{O}/\mathcal{J}, \|.\|\big) \cong \big(\mathbb{C}^d, \|.\|\big)$, espace vectoriel normé par $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^d |z_j|^2$, et muni du produit scalaire $\langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^d z_j \overline{w}_j$, pour $z, w \in \mathbb{C}^d$. Soit L_ε une suite de sous-espaces vectoriels dans $\big(\mathbb{C}^d, \|.\|\big)$ telle que $\dim L_\varepsilon = k$, pour tout $\varepsilon \in A$, où $k \leqslant d$. Posons $K_\varepsilon := L_\varepsilon \cap \overline{B}(0;1)$. Donc on peut définir les limites inférieure et supérieure de la famille L_ε par $\liminf_\varepsilon L_\varepsilon := Vect\big(\liminf K_\varepsilon\big)$ l'espace vectoriel qui engendré par $\liminf K_\varepsilon$, au sens de la distance de Hausdorff des compacts et de la relation d'inclusion, et de façon analogue $\limsup_\varepsilon L_\varepsilon := Vect\big(\limsup K_\varepsilon\big)$.

Proposition 2.2.2. *On a*

$$\text{i) } \limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big) = \mathcal{I}^*/\mathcal{J},$$
$$\text{ii) } \liminf_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_*/\mathcal{J}.$$

Démonstration. i) On rappelle que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big)$ est engendrée comme espace vectoriel par l'ensemble $\mathcal{A}$ des $[g]$ telles que il existe $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}, \varepsilon_j \to 0$ quand $j \to +\infty$ et $[g_j] \in \Phi_{\varepsilon_j}\big(\mathcal{I}_{\varepsilon_j}/\mathcal{J}_{\varepsilon_j}\big)$ tels que

$$\|[g_j] - [g]\| \to 0 \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Montrons que $\mathcal{I}^*/\mathcal{J} \subset \limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big)$. Quelle que soit $[g] \in \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$, il existe $g_0 \in \mathcal{J}$ et $f \in \mathcal{I}^*$ telles que $g = g_0 + f$. Comme $C_\alpha(g_0) = 0$, pour tout $\alpha \in \Gamma$,

$$[g(z)] = [f(z)] = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha(f)[\Psi_\alpha(z)] \in \mathcal{O}/\mathcal{J}.$$

D'après la définition de $\limsup \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}^*$, il existe $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}, \varepsilon_j \to 0$ quand $j \to +\infty$ et existe $f_j \in \mathcal{I}_{\varepsilon_j}$ tels que $f_j \to f$ uniformément sur tout compact de Ω. Alors $\Phi_{\varepsilon_j}\big([f_j]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}}\big) \in \Phi_{\varepsilon_j}\big(\mathcal{I}_{\varepsilon_j}/\mathcal{J}_{\varepsilon_j}\big)$ satisfait

$$\|\Phi_{\varepsilon_j}\big([f_j]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}}\big) - [g]\| = \max_{\alpha\in\Gamma} |C_\alpha^{\varepsilon_j}(f_j) - C_\alpha(f)|,$$

où

$$[f_j]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}} = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^{\varepsilon_j}(f_j)\big[\Psi_\alpha^{\varepsilon_j}(z)\big]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}} \in \mathcal{I}_{\varepsilon_j}/\mathcal{J}_{\varepsilon_j}.$$

Par la Proposition 2.1.3, $\Phi_{\varepsilon_j}\big([f_j]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}}\big) \to [f] = [g]$ lorsque $j \to +\infty$. Cela implique que $\mathcal{A} \subset \limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big)$.

Réciproquement, montrons que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big) \subset \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$. Pour cela, il faut et il suffit de démontrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$. En effet, supposons que $[g] \in \mathcal{A}$. Il existe donc $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}, \varepsilon_j \to 0$ quand $j \to +\infty$ et existe $g_j \in \mathcal{I}_{\varepsilon_j}$ tels que $\|\Phi_{\varepsilon_j}\big([g_j]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}}\big) - [g]\| \to 0$ lorsque $j \to +\infty$. Alors $\max_{\alpha\in\Gamma} |C_\alpha^{\varepsilon_j}(g_j) - C_\alpha(g)| \to 0$ lorsque $j \to +\infty$. Supposons que, pour $z \in \mathbb{C}^n$

$$g(z) = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha(g) z^\alpha + \sum_{j=1}^n z_j^{N_j} R_j(z),$$

et

$$\big[g_j(z)\big]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}} = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^{\varepsilon_j}(g_j)\big[\Psi_\alpha^{\varepsilon_j}(z)\big]_{\mathcal{J}_{\varepsilon_j}} \in \mathcal{I}_{\varepsilon_j}/\mathcal{J}_{\varepsilon_j}.$$

Posons

$$f_j(z) := \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^{\varepsilon_j}(g_j)\Psi_\alpha^{\varepsilon_j}(z) + \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{N_j} \big(z_j - b_j^{i,\varepsilon_j}\big) R_j(z).$$

Alors $f_j \in \mathcal{I}_{\varepsilon_j}$ et de plus $f_j \to g$ uniformément sur tout compact de Ω quand $j \to +\infty$, puisque $\Psi_\alpha^{\varepsilon_j}(z) \to z^\alpha$ et $(z_j - b_j^{i,\varepsilon_j}) \to z_j$. On en déduit que $[g] \in \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$.

ii) On montre ceci de manière tout à fait analogue au cas de limsup.

Supposons que $[g] \in \mathcal{I}_*/\mathcal{J}$. Alors il existe $g_0 \in \mathcal{J}$ et existe $f \in \mathcal{I}_*$ telle que $g = g_0 + f$. Comme $C_\alpha(g_0) = 0$, pour tout $\alpha \in \Gamma$, donc

$$[g(z)] = [f(z)] = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha(f)[\Psi_\alpha(z)] \in \mathcal{O}/\mathcal{J},$$

pour $z \in \mathbb{C}^n$. D'après la définition de liminf, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$ telle que $f_\varepsilon \to f$ uniformément sur tout compact de Ω lorsque $\varepsilon \to 0$. Alors pour tout ε $\Phi_\varepsilon\big([f_\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big) \in \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big)$ et satisfait

$$\|\Phi_\varepsilon\big([f_\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big) - [g]\| = \max_{\alpha\in\Gamma} |C_\alpha^\varepsilon(f_\varepsilon) - C_\alpha(f)|,$$

où

$$[f_\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon} = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^\varepsilon(f_\varepsilon)\big[\Psi_\alpha^\varepsilon(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} \in \mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon.$$

D'après la Proposition 2.1.3, $C_\alpha^\varepsilon(f_\varepsilon) \to C_\alpha(f)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Par suite $\Phi_\varepsilon\big([f_\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big) \to [g]$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Cela implique que $[g] \in \liminf_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big)$.

Réciproquement, supposons que $[g] \in \liminf_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\big(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\big)$. Il existe donc $g_\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$ telle que $\|\Phi_\varepsilon\big([g_\varepsilon]_{\mathcal{J}_\varepsilon}\big) - [g]\| \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Alors $\max_{\alpha\in\Gamma} |C_\alpha^\varepsilon(g_\varepsilon) - C_\alpha(g)| \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$, où

$$\big[g_\varepsilon(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^\varepsilon(g_\varepsilon)\big[\Psi_\alpha^\varepsilon(z)\big]_{\mathcal{J}_\varepsilon} \in \mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon,$$

pour $z \in \mathbb{C}^n$. Supposons que

$$g(z) = \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha(g) z^\alpha + \sum_{j=1}^{n} z_j^{N_j} R_j(z).$$

Posons

$$f_\varepsilon(z) := \sum_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha^\varepsilon(g_\varepsilon)\Psi_\alpha^\varepsilon(z) + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{N_j} \big(z_j - b_j^{i,\varepsilon}\big) R_j(z).$$

Alors $f_\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$ et de plus $f_\varepsilon \to g$ uniformément sur tout compact de Ω quand $\varepsilon \to 0$. On en déduit que $g \in \mathcal{I}_*$. Alors $[g] \in \mathcal{I}_*/\mathcal{J}$. Ce qui nous donne le résultat. □

Pour démontrer les Propositions 2.1.4 et 2.1.5, on a encore besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 2.2.3. *Soit L_ε une famille de sous-espaces vectoriels dans $\big(\mathbb{C}^d, \|.\|\big)$ telle que* $\dim L_\varepsilon = k$, *pour tout $\varepsilon \in A$, où $k \leqslant d$. Si* $\dim(\limsup_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon) = k$, *alors*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon = \limsup_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon.$$

De même dans le cas de la limite inférieure, on a un résultat suivant.

Lemme 2.2.4. *Soit L_ε une famille de sous-espaces vectoriels dans $\big(\mathbb{C}^d, \|.\|\big)$ telle que* $\dim L_\varepsilon = k$, *pour tout $\varepsilon \in A$, où $k \leqslant d$. Si* $\dim(\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon) = k$, *alors*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon = \limsup_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon.$$

2.2.1 Preuve des Propositions 2.1.4 et 2.1.5

Par l'hypothèse, on a $\ell(\mathcal{I}_\varepsilon) = N$, pour tout $\varepsilon \in A$. Donc

$$N = \ell(\mathcal{I}_\varepsilon) = \ell(\mathcal{J}_\varepsilon) - \dim\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = \prod_{j=1}^{n} N_j - \dim\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right).$$

De Φ_ε est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on déduit que

$$\dim \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = \dim \mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon = d - N,$$

pour tout $\varepsilon \in A$. De plus, comme $\mathcal{J}_\varepsilon \subset \mathcal{I}_\varepsilon$, donc $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_* \subset \mathcal{I}^*$. Par l'hypothèse de la Proposition 2.1.4 et 2.1.5, alors

i) Si l'on a $\ell\big(\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) \geqslant N$, d'après la Proposition 1.2.3, alors $\ell\big(\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) = N$.

ii) Si l'on a $\ell\big(\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) \leqslant N$, d'après la Proposition 1.2.4, alors $\ell\big(\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) = N$.

Cela implique que

$$N = \ell(\mathcal{I}^*) = \ell(\mathcal{J}) - \dim\left(\mathcal{I}^*/\mathcal{J}\right) = \prod_{j=1}^{n} N_j - \dim\left(\mathcal{I}^*/\mathcal{J}\right),$$

ou

$$N = \ell(\mathcal{I}_*) = \ell(\mathcal{J}) - \dim\left(\mathcal{I}_*/\mathcal{J}\right) = \prod_{j=1}^{n} N_j - \dim\left(\mathcal{I}_*/\mathcal{J}\right).$$

On en déduit alors que $\dim\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = d - N = \dim\left(\mathcal{I}^*/\mathcal{J}\right)$ ou que $\dim\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = d - N = \dim\left(\mathcal{I}_*/\mathcal{J}\right)$.

Ensuite, de (i) de la Proposition 2.2.2, il résulte donc

$$\dim \limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = \dim \mathcal{I}^*/\mathcal{J} = d - N = \dim \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right).$$

et (ii) de la Proposition 2.2.2 implique que

$$\dim \liminf_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = \dim \mathcal{I}_*/\mathcal{J} = d - N = \dim \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right).$$

D'après les Lemmes 2.2.3 et 2.2.4, dans les deux cas ci-dessus, on en déduit qu'existent les limites

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon\left(\mathcal{I}_\varepsilon/\mathcal{J}_\varepsilon\right).$$

Enfin, de la Proposition 2.2.2, il résulte que $\mathcal{I}_*/\mathcal{J} = \mathcal{I}^*/\mathcal{J}$. D'après la Proposition 2.2.1, on déduit que $\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$, d'où le résultat. $\square$

2.2.2 Preuve du Lemme 2.2.3

Supposons que $\dim L_\varepsilon = k$, pour tout $\varepsilon \in A$. Posons $S := \limsup_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$. Par l'hypothèse, on a donc $\dim S = \dim L_\varepsilon = k$, pour tout $\varepsilon \in A$. Il est clair que $\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon \subseteq \limsup_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$.

Inversement, supposons qu'il existe un vecteur $\omega \in \limsup_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon \backslash \liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$ tel que $\|\omega\| = 1$ et ω est orthogonal à $\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$ (on écrit $\omega \perp \liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$). Soit P un sous espace vectoriel de dimension $k-1$ dans $\mathbb{C}^d$ tel que $\liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon \subseteq P$ et $S = P \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C}\omega$. Comme $\omega \notin \liminf_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$, il existe donc une suite $(\varepsilon_j), \varepsilon_j \to 0$ et existe $\delta > 0$ tels que

$$dist\big(\omega, L_{\varepsilon_j}\big) \geqslant \delta, \text{ pour tout } j \text{ assez grand, } j \geqslant j_0(\delta). \tag{2.2.1}$$

En effet, d'après la définition de la limite inférieure, comme $\omega \notin \liminf_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon$, pour toute suite $(\nu_\varepsilon)_\varepsilon$, où $\nu_\varepsilon \in L_\varepsilon$, on a ν_ε ne converge pas vers ω, lorsque ε tend vers 0. Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $r > 0$, $\exists\, \varepsilon_r > 0$ où $|\varepsilon_r| < r$ et $\exists\, \nu_{\varepsilon_r} \in L_{\varepsilon_r}$ tels que

$$\|\nu_{\varepsilon_r} - \omega\| \geqslant \delta.$$

Posons

$$\sigma(r) := \sup \big(dist\big(\omega, L_{\varepsilon_r}\big)\big),$$

pour $r > 0$ tel que $|\varepsilon_r| < r$. Alors $\sigma(r) \geqslant 0$ et $\sigma(r)$ est une fonction croissante. Donc il existe la limite, $\lim_{r \to 0^+} \sigma(r) = \sigma_0$. Soit $B\big(\omega, \|\omega\|\big)$ une boule de centre ω, de rayon $\|\omega\|$ dans $\mathbb{C}^d$. Pour tout ε, comme

$$dist\big(\omega, L_\varepsilon\big) = dist\big(\omega, L_\varepsilon \cap B\big(\omega, \|\omega\|\big)\big),$$

il existe un vecteur $\omega_\varepsilon \in L_\varepsilon$ tel que

$$dist\big(\omega, L_\varepsilon\big) = \|\omega - \omega_\varepsilon\|.$$

Si l'on a $\sigma_0 = 0$, alors $\|\omega - \omega_{\varepsilon_r}\|$ converge vers 0 lorsque r tend vers 0. Par conséquent, ω_{ε_r} converge vers ω lorsque ε_r tend vers 0. Ce qui est contraire au choix de ω, puisque $\omega \notin \liminf_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon$. Donc $\sigma_0 > 0$. Posons $\delta := \dfrac{\sigma_0}{2}$. Parce que $\sigma(r) = \sup\big(dist\big(\omega, L_{\varepsilon_r}\big)\big) \geqslant \sigma_0$. Pour tout $r > 0$, il existe alors ε_r avec $|\varepsilon_r| < r$ tel que $dist\big(\omega, L_{\varepsilon_r}\big) \geqslant \delta > 0$. En appliquant cet assertion pour la suite (ε_r) avec $r = 1/j$, on en déduit la démonstration de (2.2.1).

Ensuite, choisissons les coordonées tels que $\omega = e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^d$ et $S = \mathbb{C}^k \times \{0\}$ est le sous espace vectoriel engendré par le système $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$, $P = \{0\} \times \mathbb{C}^{k-1} \times \{0\}$ est sous espace vectoriel engendré par le système $\{e_2, \cdots, e_k\}$. Posons

$$K_j := L_{\varepsilon_j} \cap \overline{B}\big(0, 1\big).$$

Pour tout $\upsilon \in K_j$, pour j assez grand, $\|\upsilon\| \leqslant 1$, de (2.2.1) il résulte que

$$\|\upsilon - \omega\| = \|\upsilon - e_1\| \geqslant \delta. \tag{2.2.2}$$

Par ailleurs, pour tout $\eta > 0$ étant donné et pour j assez grand, si $u \in K_j$, $u = u_S + \tilde{u}$, où $\tilde{u} \in S^\perp$, alors $\|\tilde{u}\| < \eta$. En effet, d'après la définition de lim sup au sens de la distance de Hausdorff, comme $\limsup_{j \to +\infty} K_j = \limsup_{j \to +\infty} L_{\varepsilon_j} \cap \overline{B}\big(0, 1\big)$, pour $\eta > 0$, il existe $j_0(\eta)$ tel que pour tout $j \geqslant j_0(\eta)$, on ait

$$K_j \subset \mathcal{V}_\eta\big(\overline{B}\big(0, 1\big) \cap S\big) = \bigcup_{x \in \overline{B}\left(0,1\right) \cap S} B(x, \eta),$$

un η-voisinage ouvert de $\overline{B}\big(0, 1\big) \cap S$. Cela implique que pour tout $u \in K_j$, pour $j \geqslant j_0(\eta)$, il existe $x \in \overline{B}\big(0, 1\big) \cap S$ tel que

$$\eta > \|u - x\| = \big(\|u_S - x_S\|^2 + \|\tilde{u}\|^2\big)^{1/2} \geqslant \|\tilde{u}\|.$$

Par suite si $\|u\| = 1$, il vient $\|\tilde{u}\| < \eta\|u\|$. De plus, par Théorème de Pythagore, on a

$$\|u\|^2 = \|u_S\|^2 + \|\tilde{u}\|^2 < \|u_S\|^2 + \eta^2\|u\|^2.$$

Donc

$$\|u_S\|^2 > \big(1 - \eta^2\big)\|u\|^2. \tag{2.2.3}$$

Dans la suite, pour tout $u \in \mathrm{L}_{\varepsilon_j} \subset \mathbb{C}^d$, pour $j \geqslant j_0(\eta)$, supposons que $u = u_S + \tilde{u}$, où $\tilde{u} \in S^\perp$. Considérons maintenant la projection $\pi_S : \mathbb{C}^d = S \overset{\perp}{\oplus} S^\perp \to S$ définie par $\pi_S(u) = u_S$. L'inégalité

(2.2.3) s'étend par linéarité et homogénéité à tous les vecteurs de L_{ε_j}. Nous allons montrer que $\pi_S\, |_{L_{\varepsilon_j}} \colon L_{\varepsilon_j} \to S$ est une application linéaire bijective, pour j assez grand, $j \geqslant j_0(\eta)$.

En effet, montrons d'abord que l'application $\pi_S\, |_{L_{\varepsilon_j}}$ est injective. Supposons que $u \in L_{\varepsilon_j}$ et $\pi_S(u) = 0$. Alors (2.2.3) montre que $u = 0$, cqfd.

De plus, par l'hypothèse, comme $\dim S = \dim \mathrm{L}_{\varepsilon_j} = k$, pour tout ε_j, donc $\pi_S\, |_{L_{\varepsilon_j}}$ est surjective. De l'inégalité (2.2.3) il résulte alors que, pour tout $u \in L_{\varepsilon_j}$, $j \geqslant j_0(\eta)$, si $\|u\| = 1$, on a donc $\|\pi_S(u)\| = \|u_S\| > \sqrt{1-\eta^2}$.

Considérons maintenant le vecteur $e_1 \in S$. On pose $u := \pi_S^{-1}(e_1) = e_1 + \tilde{u} \in L_{\varepsilon_j}$, où $\tilde{u} \in S^{\perp}$. Il est clair que $u \neq 0$. D'autre part, (2.2.3) montre que $1 > \big(1-\eta^2\big)\|u\|^2$. Posons $v := \frac{u}{\|u\|} \in K_j$. Alors

$$\|v - e_1\| \leq \frac{\|u - e_1\|}{\|u\|} + \left(\frac{1}{\|u\|} - 1\right) \leq \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} - 1 < \delta$$

pour η assez petit, ce qui contredit (2.2.2). $\square$

2.2.3 Preuve du Lemme 2.2.4

Supposons que $\dim L_\varepsilon = k$, pour tout $\varepsilon \in A$. Il est clair que $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon \subseteq \limsup\limits_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon$. Pour démontrer la relation inverse, puisque $\dim \liminf\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} L_\varepsilon = k$, choisissons des coordonées de $\mathbb{C}^d$ telles que

$$P := \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} L_\varepsilon = \langle e_1, \cdots, e_k \rangle\,,$$

$$S := \limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} L_\varepsilon = \langle e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_m \rangle\,,$$

où $1 \leqslant k < m \leqslant d$ et $e_j = \big(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{j-ème}}, 0, \cdots, 0\big)$, pour $1 \leqslant j \leqslant d$. Par la définition de la limite supérieure, il existe un vecteur $\omega \in S \setminus P$ tel que $\|\omega\| = 1$ et il existe une suite $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}_+} \subset A$, $\varepsilon_j \to 0$ lorsque $j \to \infty$ et $\omega_j \in L_{\varepsilon_j}$ telles que ω_j converge vers ω lorsque j tend vers ∞.

Cela implique que pour tout $\delta > 0$, il existe $j_0 = j(\delta)$ tel que pour tout $j \geqslant j_0$, on a $\|\omega_j - \omega\| < \delta$. Considérons la projection $\pi_P : L_\varepsilon \to P$, $\pi_P(v) = v_P \in P$, pour tout $v = v_P + \tilde{v} \in \mathbb{C}^d = P \overset{\perp}{\oplus} P^{\perp}$.

Ensuite, pour chaque $v \in L_\varepsilon$, écrivons $v = \pi_P(v) + \tilde{v}$, où $\tilde{v} \in P^{\perp}$. On a le résultat suivant.

Lemme 2.2.5. *Pour tout $\delta_1 > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1) > 0$ tel que si $v \in L_\varepsilon$ et $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, alors*

$$\|\tilde{v}\| \leqslant \delta_1 \|v\|.$$

On a alors, pour ε assez petit, et $j \geqslant j_0$,

$$\|\tilde{\omega}\| = \|\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_j\| \leq \|\omega - \omega_j\| + \delta_1 \|\omega_j\| \leq \delta + \delta_1,$$

or $\omega \notin P$, donc $\|\tilde{\omega}\| > 0$ et on aboutit à une contradiction pour j assez grand. $\square$

Démonstration du Lemme 2.2.5.

Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, donc dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$, considérons la norme vectorielle $\|v\|_\infty := \max\limits_{1 \leq j \leq d} |v_j|$, pour tout $v = (v_1, \cdots, v_d)$. Soit $A = (a_{ij})_{d \times d} \in Mat(d, \mathbb{C})$ une matrice carrée $d \times d$, la norme subordonnée de matrice A à la norme vectorielle $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{C}^d$, est donc donée par

$$\|A\|_\infty := \sup_{\|v\|_\infty \leqslant 1} \|Av\|_\infty,$$

pour tout $v \in \mathbb{C}^d$. Alors $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$. De plus, soit $A \in Mat(d, \mathbb{C})$, si $\|A\|_\infty < 1$ alors $I_d + A$ est inversible et de plus

$$\|\big(I_d + A\big)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|_\infty}.$$

Maintenant, soit $\delta_1 > 0$. Comme $e_1, \cdots, e_k \in P = \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} L_\varepsilon$, d'après la définition de liminf, pour chaque $j, 1 \leqslant j \leqslant k$, il existe une suite $e_{j,1}(\varepsilon) \in L_\varepsilon$, telle que $e_{j,1}(\varepsilon)$ converge vers e_j lorsque $\varepsilon \to 0$. Alors il existe donc $\varepsilon_0 = \varepsilon(\delta_1)$ tell que pour tout $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, on a

$$\|e_{j,1}(\varepsilon) - e_j\|_\infty < \delta_1, \tag{2.2.4}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Ceci implique que $\|\pi_P\big(e_{j,1}(\varepsilon)\big) - \pi_P\big(e_j\big)\|_\infty < \delta_1$. Posons $e_{j,2}(\varepsilon) := \pi_P\big(e_{j,1}(\varepsilon)\big)$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Il vient alors

$$\|e_{j,2}(\varepsilon) - e_j\|_\infty < \delta_1, \tag{2.2.5}$$

puisque $\pi_P\big(e_j\big) = e_j$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Montrons alors que le système $\{e_{j,2}(\varepsilon), 1 \leqslant j \leqslant k\}$ est une base de P, pour δ_1 assez petit.

En effet, pour cela, soit $A = (a_{ij}(\varepsilon))_{k\times k}$ est une matrice de ce système dans la base $\{e_j, 1 \leqslant j \leqslant k\}$ de P. Alors $e_{j,2}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^k a_{ji}(\varepsilon)e_i$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$. De (2.2.5), il résulte que, pour $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$\|e_{j,2}(\varepsilon) - e_j\|_\infty = \|\big(a_{jj}(\varepsilon) - 1\big)e_j - \sum_{i=1, j\neq j}^k a_{ji}(\varepsilon)e_i\|_\infty < \delta_1.$$

Par suite $|a_{ji}(\varepsilon)| < \delta_1$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k, i \neq j$ et $|a_{jj}(\varepsilon) - 1| < \delta_1$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$. Cela implique que

$$\|A - I_k\|_\infty = \max_{1\leq i\leq k} \sum_{j=1}^k |a_{ij}(\varepsilon) - \delta_{ij}| < k\delta_1,$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Alors $\|A - I_k\|_\infty < 1$, pour $\delta_1 < 1/k$. On en déduit que la matrice A est inversible et

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1 - \|A - I_k\|_\infty} < \frac{1}{1 - k\delta_1}.$$

Donc le système $\{e_{j,2}(\varepsilon), 1 \leqslant j \leqslant k\}$ est libre dans P, pour tout $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Comme $\dim P = k$, il vient alors que ce système est une base de P. De plus, supposons que $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_{j,1}(\varepsilon) = 0$. Donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_{j,2}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \pi_P\big(e_{j,1}(\varepsilon)\big) = 0$. Ceci implique $\lambda_j = 0$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$. Autrement dit, le système $\{e_{j,1}(\varepsilon), 1 \leqslant j \leqslant k\}$ est indépendant dans L_ε. Par ailleurs, par l'hypothèse, comme $\dim L_\varepsilon = k$, pour tout ε, donc le système $\{e_{j,1}(\varepsilon), 1 \leqslant j \leqslant k\}$ est une base de L_ε.

Ensuite, soit $B = (b_{ij})_{d\times k}$ une matrice du système $\{e_{j,1}(\varepsilon), 1 \leqslant j \leqslant k\}$ dans la base $\{e_j, 1 \leqslant j \leqslant d\}$. Comme $e_{j,1}(\varepsilon) = \pi_P\big(e_{j,1}(\varepsilon)\big) + \tilde{e}_{j,1}(\varepsilon) = e_{j,2}(\varepsilon) + \tilde{e}_{j,1}(\varepsilon)$, où $\tilde{e}_{j,1}(\varepsilon) \in P^\perp$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Donc $b_{ij} = a_{ij}$, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant k$. On pose $\tilde{B} := (\tilde{b}_{ij})_{(d-k)\times k}$, où $\tilde{b}_{ij} = b_{ij}$, pour $k+1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant k$. Autrement dit, pour $k+1 \leqslant i \leqslant d$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, $\tilde{b}_{ij}$ sont des coordonées du vecteur $\tilde{e}_{j,1}(\varepsilon)$ dans la base $\{e_j, k+1 \leqslant j \leqslant d\}$. Considérons la projection $\pi_{P^\perp} : L_\varepsilon \to P^\perp$. De (2.2.4), il résulte que

$$\|\tilde{e}_{j,1}(\varepsilon)\|_\infty = \|\pi_{P^\perp}\big(e_{j,1}(\varepsilon)\big) - \pi_{P^\perp}\big(e_j\big)\|_\infty < \delta_1,$$

puisque $\pi_{P^\perp}\big(e_j\big) = 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Donc $|\tilde{b}_{ij}| = |b_{ij}| < \delta_1$, pour $k+1 \leqslant i \leqslant d$ et pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Cela implique alors que

$$\max_{k+1\leq i\leq d} \sum_{j=1}^k |b_{ij}| < k.\delta_1.$$

Posons maintenant

$$\tilde{e}_j := \begin{cases} e_{j,1}(\varepsilon), \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant k \\ e_j, \text{ pour } k+1 \leqslant j \leqslant d, \end{cases}$$

où $1 \leqslant j \leqslant d$. Le système $\{\tilde{e}_j, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ a une matrice dans la base $\{e_j, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ est donnée par

$$M := \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline \tilde{B} & I_{d-k} \end{array} \right).$$

Pour $\delta_1 < 1/k$, comme A est inversible , donc $\det M = \det A \det I_{d-k} \neq 0$. Donc M est inversible, pour $\delta_1 < 1/k$. De plus, on a

$$\|M - I_d\|_\infty = \max\left\{ \|A - I_k\|_\infty, \max_{k+1 \le i \le d} \sum_{j=1}^{k} |b_{ij}| \right\} < k.\delta_1.$$

Soit $v \in \mathbb{C}^d$. Supposons $v = \sum_{j=1}^{d} \tilde{v}_j \tilde{e}_j$. On désigne $[v]_{(e_j)}$ et $[v]_{(\tilde{e}_j)}$ les coordonnées du vecteur v dans la base $\{e_j, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ et $\{\tilde{e}_j, 1 \leqslant j \leqslant d\}$ correspondantes. Alors

$$M.[v]_{(\tilde{e}_j)} = [v]_{(e_j)}.$$

Il vient $[v]_{(\tilde{e}_j)} = M^{-1}.[v]_{(e_j)}$. Il résulte de $\|M^{-1}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{1 - k.\delta_1}$, pour $\delta_1 < 1/k$, que

$$\|[v]_{(\tilde{e}_j)}\|_\infty = \max_{1 \le j \le d} |\tilde{v}_j| \leqslant \|M^{-1}\|_\infty \|v\|_\infty < \frac{1}{1 - k\delta_1} \|v\|_\infty.$$

Enfin, si $v \in L_\varepsilon$, pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, on a $v = \sum_{j=1}^{k} \tilde{v}_j \tilde{e}_j$. Considérons la projection $\pi_{P^\perp} : L_\varepsilon \to P^\perp$. On a

$$\tilde{v} = \pi_{P^\perp}(v) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{v}_j \pi_{P^\perp}\big(\tilde{e}_j\big).$$

Par ailleurs, comme $\|\pi_{P^\perp}\big(\tilde{e}_j\big)\|_\infty = \|\pi_{P^\perp}\big(e_{j,1}(\varepsilon)\big)\|_\infty = \|\tilde{e}_{j,1}(\varepsilon)\|_\infty < \delta_1$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_\infty = \|\sum_{j=1}^{k} \tilde{v}_j \pi_{P^\perp}\big(\tilde{e}_j\big)\|_\infty &\leqslant k\big(\max_{1 \le j \le k} |\tilde{v}_j|\big)\delta_1 \leqslant k\big(\max_{1 \le j \le d} |\tilde{v}_j|\big)\delta_1 \\ &\leqslant \frac{k}{1 - k\delta_1} \delta_1 \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

Choisissons $\delta_1 < \dfrac{1}{2k}$, on a donc $\|\tilde{v}\|_\infty < 2k\delta_1 \|v\|_\infty$. Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{C}^d$. Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, il existe des constantes $0 < C_1 < C_2$ telles que

$$C_1 \|u\| \leqslant \|u\|_\infty \leqslant C_2 \|u\|,$$

pour tout $u \in \mathbb{C}^d$. Cela implique que

$$C_1 \|\tilde{v}\| \leqslant \|\tilde{v}\|_\infty < 2k\delta_1 \|v\|_\infty \leqslant 2kC_2\delta_1 \|v\|.$$

Alors $\|\tilde{v}\| \leqslant C_0 \delta_1 \|v\|$, où $C_0 = 2kC_2/C_1$. Ce qui achève la preuve. □

2.3 Exemples

Pour le premier exemple, en appliquant les Propositions 2.1.4 et 2.1.5, nous allons retrouver la preuve du Lemme 2.1.1 qui est démontré dans [Ma-Ras-Sig-Tho11].

En effet, soient $\alpha_j^{i,\varepsilon}$ les éléments de $\pi_j\big(\{a_1^\varepsilon, ..., a_N^\varepsilon\}\big)$, $1 \leqslant i \leqslant N_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, où π_j est la projection orthogonale sur le j-ème axe de coordonnées, pour $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Posons $\psi_j^\varepsilon(\zeta) := \big(\zeta - \alpha_j^{1,\varepsilon}\big) \cdots \big(\zeta - \alpha_j^{N_j,\varepsilon}\big)$, pour $\zeta \in \mathbb{C}$.

Supposons que $f \in \mathcal{J}$. D'après la formule de Taylor, on a

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(0) z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n},$$

pour tout z au voisinage de l'origine et $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Puisque

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}(0) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n, 0 \leqslant k_j \leqslant N_j - 1,$$

f est dans l'idéal engendré par les fonctions $z_1^{N_1}, \cdots, z_n^{N_n}$. Il existe donc des fonctions holomorphes $h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, telles que

$$f(z) = \sum_{j=1}^n z_j^{N_j} h_j(z).$$

Posons

$$f_\varepsilon(z) = \sum_{j=1}^n \psi_j^\varepsilon h_j(z),$$

on a donc une famille de fonctions holomorphes $f_\varepsilon \in \mathcal{J}_\varepsilon$ telle que $f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$. Ceci implique que $\mathcal{J} \subset \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{J}_\varepsilon$. Puisque

$$\ell(\mathcal{J}) = \# P_\varepsilon = \Pi_{j=1}^n N_j,$$

d'après le Corollaire 2.1.6, il résulte que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J}$. □

Par ailleurs, de manière tout à fait analogue, nous pouvons démontrer que $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{J}_\varepsilon \subset \mathcal{J}$.

En effet, soit $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_{\varepsilon_k} = f$, où $f_{\varepsilon_k} \in \mathcal{J}_{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k \to 0$. On peut supposer que $\overline{\mathbb{D}}^n \subset \Omega$. Alors si l'on a $f_\varepsilon \in \mathcal{J}_\varepsilon$, et $|\varepsilon|$ est assez petit tel que $\left|\alpha_j^{i,\varepsilon}\right| < 1$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant N_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, donc

$$I = \int_{(\partial \mathbb{D})^n} \frac{f_\varepsilon(z_1, \cdots, z_n)}{\Pi_{j=1}^n \psi_j^\varepsilon(z_j)} dz_1 ... dz_n = 0. \tag{2.3.1}$$

En effet, posons, pour $1 \leqslant k \leqslant n - 1$,

$$F_k^\varepsilon(z_{k+1}, \cdots, z_n) = \int_{(\partial \mathbb{D})^k} \frac{f_\varepsilon(z_1, \cdots, z_n)}{\Pi_{j=1}^k \psi_j^\varepsilon(z_j)} dz_1 ... dz_k.$$

Alors on va démontrer par récurrence sur k que $F_k^\varepsilon\big(\alpha_{k+1}^{i_{k+1},\varepsilon}, \cdots, \alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big) = 0$, pour $1 \leqslant i_p \leqslant N_p, 2 \leqslant p \leqslant n$. Tout d'abord, pour $k = 1$, on a

$$F_1^\varepsilon(z_2, \cdots, z_n) = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f_\varepsilon(z_1, \cdots, z_n)}{\psi_1^\varepsilon(z_1)} dz_1.$$

Donc

$$F_1^\varepsilon\big(\alpha_2^{i_2,\varepsilon}, \cdots, \alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big) = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f_\varepsilon\big(z_1, \alpha_2^{i_2,\varepsilon}, \cdots, \alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)}{\psi_1^\varepsilon(z_1)} dz_1.$$

Comme $f_\varepsilon\big(\alpha_1^{i_1,\varepsilon},\alpha_2^{i_2,\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)=0$, pour tout $1\leqslant i_1\leqslant N_1$, il vient

$$\frac{f_\varepsilon\big(z_1,\alpha_2^{i_2,\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)}{\psi_1^\varepsilon\big(z_1\big)}\in\mathcal{O}\big(\mathbb{D}\big).$$

Du Théorème de Cauchy, il résulte $F_1^\varepsilon\big(\alpha_2^{i_2,\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)=0$. Supposons que $F_k^\varepsilon\big(\alpha_{k+1}^{i_{k+1},\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)=0$, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$. Donc

$$\frac{F_k^\varepsilon\big(z_{k+1},\alpha_{k+2}^{i_{k+2},\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)}{\psi_{k+1}^\varepsilon\big(z_{k+1}\big)}\in\mathcal{O}\big(\mathbb{D}\big).$$

Par suite

$$F_{k+1}^\varepsilon\big(\alpha_{k+2}^{i_{2+1},\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)=\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{F_k^\varepsilon\big(z_{k+1},\alpha_{k+2}^{i_{k+2},\varepsilon},\cdots,\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)}{\psi_{k+1}^\varepsilon\big(z_{k+1}\big)}dz_{k+1}=0.$$

On en déduit, par récurrence sur k, que $F_{n-1}^\varepsilon\big(\alpha_n^{i_n,\varepsilon}\big)=0$, pour tout $1\leqslant i_n\leqslant N_n$. Donc $\dfrac{F_{n-1}^\varepsilon\big(z_n\big)}{\psi_n^\varepsilon\big(z_n\big)}\in\mathcal{O}\big(\mathbb{D}\big)$. Cela implique que

$$I=\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{F_{n-1}^\varepsilon\big(z_n\big)}{\psi_n^\varepsilon\big(z_n\big)}dz_n=0.$$

Ensuite, en utilisant (2.3.1) pour f_{ε_k}, et en passant à la limite lorsque k tend vers ∞, on trouve

$$\frac{\partial^{N_1+\cdots+N_n-n}f}{\partial z_1^{N_1-1}\cdots\partial z_n^{N_n-1}}(0)=\frac{N_1!...N_n!}{\big(2\pi i\big)^n}\int_{(\partial\mathbb{D})^n}\frac{f\big(z_1,\cdots,z_n\big)}{\Pi_{j=1}^n z_j^{N_j}}dz_1...dz_n=0.$$

Comme $f_\varepsilon\mid_{P^\varepsilon}=0$, pour tout $f_\varepsilon\in\mathcal{J}_\varepsilon$, donc ce résultat sera encore vrai en remplaçant de chaque N_j par k_j, où $0\leqslant k_j\leqslant N_j$. D'où $f\in\mathcal{J}$. Autrement dit, $\limsup\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{J}_\varepsilon\subset\mathcal{J}$. Puisque

$$\ell\big(\mathcal{J}\big)=\#P_\varepsilon=\Pi_{j=1}^n N_j,$$

d'après le Corollaire 2.1.6, il résulte que $\subset\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{J}_\varepsilon=\mathcal{J}$. □

Soit $\Omega=\mathbb{D}^2$ un bidisque unité dans $\mathbb{C}^2$ et soit S_ε un ensemble de N points distincts dans Ω qui tendent vers 0, lorsque ε tend vers 0. Posons $\mathcal{I}_\varepsilon:=\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$. On voit facilement que $\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)=N$.

Exemple 2.3.1.

Soit un système de trois points distincts $S_\varepsilon=\{a_1^\varepsilon=(0,0),a_2^\varepsilon=(\varepsilon,0),a_3^\varepsilon=(0,\varepsilon)\}$. Alors

$$\mathcal{J}_\varepsilon:=\langle z_1(z_1-\varepsilon),z_2(z_2-\varepsilon),z_1z_2\rangle\subset\mathcal{I}_\varepsilon.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{J}_\varepsilon=\mathcal{J}=\big\langle z_1^2,z_1z_2,z_2^2\big\rangle\subset\mathcal{I}_*$, et de plus $\ell\big(\mathcal{I}_*\big)\leqslant\ell\big(\mathcal{J}\big)=3$. D'après la Proposition 2.1.5, on trouve donc qu'il existe la limite de famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon=\mathcal{J}$.

Si prenons un autre système de trois points distincts dans Ω, $S_\varepsilon=\{a_1^\varepsilon=(0,0),a_2^\varepsilon=(\varepsilon,0),a_3^\varepsilon=(\varepsilon^2,0)\}$. Alors

$$\mathcal{J}_\varepsilon:=\big\langle z_1,z_2(z_2-\varepsilon)(z_2-\varepsilon^2)\big\rangle\subset\mathcal{I}_\varepsilon.$$

Par suite, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{J}_\varepsilon=\mathcal{J}=\big\langle z_1,z_2^3\big\rangle\subset\mathcal{I}_*$, et de plus $\ell\big(\mathcal{I}_*\big)\leqslant\ell\big(\mathcal{J}\big)=3$. D'après la Proposition 2.1.5, on trouve donc qu'il existe la limite de famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon=\mathcal{J}$.

Exemple 2.3.2.

Soit un système de quatre points distincts $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (0,0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_3^\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon^2), a_4^\varepsilon = (-\varepsilon, -\varepsilon^2)\}$. Alors

$$\mathcal{J}_\varepsilon := \langle f_1^\varepsilon(z), f_2^\varepsilon(z), f_3^\varepsilon(z)\rangle \subset \mathcal{I}_\varepsilon,$$

où

$$\begin{aligned} f_1^\varepsilon(z) &= z_2\big(z_2 - \varepsilon^2(z_1-\varepsilon) - \varepsilon^3\big) \in \mathcal{I}_\varepsilon,\\ f_2^\varepsilon(z) &= (z_1-\varepsilon)\big(z_2 - \varepsilon^2(z_1-\varepsilon) - \varepsilon^3\big) \in \mathcal{I}_\varepsilon,\\ f_3^\varepsilon(z) &= z_1(z_1-\varepsilon)(z_1+\varepsilon) \in \mathcal{I}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J} = \big\langle z_2^2, z_1 z_2, z_1^3\big\rangle \subset \mathcal{I}_*$, et de plus $\ell\big(\mathcal{I}_*\big) \leqslant \ell\big(\mathcal{J}\big) = 4$. D'après la Proposition 2.1.5, on trouve donc qu'il existe la limite de famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{J}$.

On montre de manière tout à fait analogue que pour un autre système de quatre points distincts dans Ω, $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (0,0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon,0), a_3^\varepsilon = (-\varepsilon, 0), a_4^\varepsilon = (\varepsilon, \alpha\varepsilon^2)\}$ pour $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J} = \big\langle z_2^2, z_1 z_2, z_1^3\big\rangle \subset \mathcal{I}_*$, où

$$\mathcal{J}_\varepsilon := \big\langle z_2(z_2 - \alpha\varepsilon^2), (z_1-\varepsilon)z_2, z_1(z_1-\varepsilon)(z_1+\varepsilon)\big\rangle \subset \mathcal{I}_\varepsilon.$$

Donc il existe la limite de famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{J}$.

Chapitre 3

Limites de la fonction de Green pluricomplexe à trois pôles : le cas dégénéré

Ce chapitre est consacré à l'étude de la limite de la fonction de Green pluricomplexe à trois pôles distincts qui tendent vers l'origine, dans le cas particulier où la limite de toutes les directions de droites qui passent par les deux points sont alignées. Nous allons commencer par étudier la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes de même base, puis nous donnons quelques estimations pour la borne supérieure et la borne inférieure de la limite de la fonction de Green pluricomplexe. Finalement, en utilisant la notion de puissance des idéaux de fonctions holomorphes, nous introduisons une méthode de Rashkovskii-Thomas et recherchons la limite de la fonction de Green pluricomplexe dans ce cas-là.

3.1 Introduction

Le problème de convergence de fonctions de Green pluricomplexes $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ à deux ou trois pôles dans le bidisque $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ a été introduit et étudié par Magnússon, Rashkovskii, Sigurdsson, et Thomas [Ma-Ras-Sig-Tho11].

Soient Ω un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^2$ et $a_j^\varepsilon \in \Omega$, pour $\varepsilon \in \mathbb{C}$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$, trois points distincts tels que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_j^\varepsilon = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant 3$. Posons que $S_\varepsilon := \{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon\}$. Soient $\mathcal{I}_\varepsilon := \mathcal{I}_\varepsilon(S_\varepsilon)$ la famille des idéaux de fonctions holomorphes sur Ω à base sur S_ε et $G_\varepsilon = G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ les fonctions de Green pluricomplexes associées aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ avec pôles logarithmiques en S_ε. Posons $v_i^\varepsilon := [a_j^\varepsilon - a_k^\varepsilon] \in \mathbb{CP}^1$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, j, k \neq i$. Le Théorème suivant nous donne un résultat sur la limite de $\mathcal{I}_\varepsilon$ et de $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ [Ma-Ras-Sig-Tho11].

Théorème 3.1.1. *Supposons qu'il existe un ensemble $A \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ avec $0 \in \bar{A}$ tel que $v_i = \lim\limits_{A\ni\varepsilon\to 0} v_i^\varepsilon \in \mathbb{CP}^1$. Soit $\tilde{v}_i \in \mathbb{C}^2$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, des vecteurs tels que $\|\tilde{v}_i\| = 1$ et $[\tilde{v}_i] = v_i$. Alors*

(i) S'il existe i, j tels que $v_i \neq v_j$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2$, et $G_\varepsilon \to g$ uniformément localement sur $\Omega\backslash\{0\}$ quand $A \ni \varepsilon \to 0$, où $g \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ est maximale sur $\Omega\backslash\{0\}$, $g(z) \leqslant \frac{3}{2}\log\|z\| + O(1)$ quand $z \to 0$, et pour $\zeta \in \mathbb{C}$ on a

$$g(\zeta v) = \begin{cases} 2\log|\zeta| + O(1), & si\ v = \tilde{v}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{2}\log|\zeta| + O(1) & si\ v \in \mathbb{C}^2\backslash \cup_{1\leqslant i\leqslant 3} \mathbb{C}\tilde{v}_i. \end{cases}$$

(ii) Il existe un ensemble infini $\mathfrak{U}$ de familles $a = \big\{\{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon\}, \varepsilon \in \mathbb{C}\big\}$ tel que pour tout $a \in \mathfrak{U}$, $v_1 = v_2 = v_3 = [1:0]$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}^a$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = g^a$, où les idéaux $\mathcal{I}^a$ (respectivement, les fonctions g^a) sont distinctes pour des valeurs distinctes de a.

Dans la deuxième conclusion du Théorème 3.1.1, une famille d'exemples est donnée par :

$$S_\varepsilon := \{(0,0); (\varepsilon, \alpha\varepsilon^2); (-\varepsilon, \alpha\varepsilon^2)\} \subset \mathbb{C}^2, \alpha \in \mathbb{C}$$

Alors l'idéal $\mathcal{I}_\varepsilon\big(S_\varepsilon\big)$ de fonctions holomorphes qui sont nulles sur S_ε engendré par le système $\{z_1\big(z_1^2 - \varepsilon^2\big), z_2 - \alpha z_1^2\}$. Par suite, la limite des idéaux est un idéal qui dépend de a, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}^a = \big\langle z_1^3, z_2 - \alpha z_1^2\big\rangle$. Il est clair que dans ce cas-là la condition d'intersection complète uniforme est satisfaite, du Théorème 1.2.17, il résulte $\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = \max\{3\log|z_1|, \log|z_2 - \alpha z_1^2|\}$. Ces limites sont distincts pour les valeurs distinctes de a.

Remarquons que dans la première assertion du Théorème 1.2.17 ci-dessus où il existe $i \neq j$ tels que $\lim\limits_{A\ni\varepsilon\to 0} v_i^\varepsilon$ et $\lim\limits_{A\ni\varepsilon\to 0} v_j^\varepsilon$ existent et sont distinctes, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2$ et ce n'est pas un idéal d'intersection complète, puisque $\ell\big(\mathfrak{M}_0^2\big) = 3 < 4 = e\big(\mathfrak{M}_0^2\big)$. De plus, ceci est seulement une condition suffisante, elle n'est pas nécessaire. Le but principal de ce chapitre sera d'étudier la limite des idéaux et des fonctions de Green pluricomplexes dans le dernier cas, quand il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^2$, pour lequel $\|v\| = 1$, tel que

$$\lim_{A\ni\varepsilon\to 0} v_i^\varepsilon = [v] \in \mathbb{CP}^1, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{3.1.1}$$

En particulier, nous caractériserons les situations où la limite des idéaux est égale à l'idéal $\mathfrak{M}_0^2$, carré de l'idéal maximal en 0.

Dans tout ce qui va suivre, on utilise les notions suivantes : le produit scalaire des vecteurs z et w dans $\mathbb{C}^2$ est donnée par $z \cdot \bar{w} = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2$, pour $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ et de plus pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, la norme euclidienne est donnée par

$$\|z\| := (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \big(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2\big)^{\frac{1}{2}},$$

et la norme infinie est donnée par

$$\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Évidemment, cettes normes sont équivalentes et $\|z\|_\infty \leqslant \|z\| \leqslant \sqrt{2}\|z\|_\infty$. Soit $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ un bidisque unité de centre l'origine qui est défini par $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : \|z\|_\infty < 1\}$.

Choix d'ordre des points

Les notions suivantes que nous étudierons ne dépendent pas de l'ordre des points dans S_ε ni de (3.1.1). Nous choisissons une numérotation appropriée pour les points dans S_ε. D'abord, posons $d_i^\varepsilon := \|a_j^\varepsilon - a_k^\varepsilon\|$, les distances euclidiennes de deux points a_j^ε et a_k^ε parmi les trois points, pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Pour chaque ε, choisissons un ordre des points dans S_ε tel que $d_3^\varepsilon \geqslant d_1^\varepsilon \geqslant d_2^\varepsilon$.

En utilisant une translation, sans perte de généralité, nous pourrons supposer désormais que $a_1^\varepsilon = (0, 0)$.

Ensuite, soit $\theta = \theta(\varepsilon)$ l'angle aigu entre les deux droites de directions a_2^ε et a_3^ε, c'est à dire,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|a_2^\varepsilon \cdot \bar{a}_3^\varepsilon|}{\|a_2^\varepsilon\|\|a_3^\varepsilon\|}\right).$$

Comme $d_3^\varepsilon \geqslant d_1^\varepsilon \geqslant d_2^\varepsilon$, $\theta \neq \pi/2$. Plus généralement, nous trouvons une condition nécessaire et suffisante suivante pour que $\mathcal{I}_\varepsilon$ converge vers $\mathfrak{M}_0^2$ lorsque ε tend vers 0. C'est le premier résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.1.2. *$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2$ si et seulement si $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|a_2^\varepsilon\|}{|\theta|} = 0$, de façon équivalente*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|a_2^\varepsilon\|}{\left|\det\left(\frac{a_2^\varepsilon}{\|a_2^\varepsilon\|},\frac{a_3^\varepsilon}{\|a_3^\varepsilon\|}\right)\right|} = 0, \tag{3.1.2}$$

où le déterminant de la matrice ci-dessus est déterminé dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$.

Remarque 3.1.3. La condition du Théorème 3.1.2 est descriptible sans choisir d'ordre de coordonnées, en utilisant quelques notions de géométrie élémentaire du plan : Soit d un diamètre de l'ensemble S_ε et soit $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_3$ des trois angles (dans $[0,\pi]$) qui sont déterminés par le triangle $a_1a_2a_3$ avec les trois sommets a_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Alors il faut que d/θ_2 tende vers 0.

Choix des coordonnées

Supposons maintenant que toutes les droites de direction $[a_j^\varepsilon] \in \mathbb{CP}^1$ tendent vers une même direction v. Autrement dit, il existe une direction $v \in \mathbb{CP}^1$ telle que (3.1.1) soit satisfaite. Sans perte de généralité, supposons que $v = [1:0]$. Nous allons paramétrer l'ensemble de points de telle façon que $|\varepsilon| = \|a_2^\varepsilon - a_1^\varepsilon\| = \max_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\|a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon\|$. Choisissons des coordonnées telles que $a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_3^\varepsilon = \big(\rho_1(\varepsilon),\rho_2(\varepsilon)\big)$, où $\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_j(\varepsilon) = 0$, pour $j = 1, 2$, et $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\rho_2(\varepsilon)}{\rho_1(\varepsilon)} = 0$.

Par ailleurs, puisque $a_3^\varepsilon \in B\big(0;|\varepsilon|\big)\cap B\big(a_2^\varepsilon;|\varepsilon|\big)$ et $\|a_3^\varepsilon - a_1^\varepsilon\| \leqslant \|a_3^\varepsilon - a_2^\varepsilon\|$, on obtient

$$|\rho_1(\varepsilon)| \leqslant |\varepsilon|, |\rho_2(\varepsilon)| \leqslant |\varepsilon|, \text{ et } |\rho_1(\varepsilon)| \leqslant |\varepsilon - \rho_1(\varepsilon)| \leqslant |\varepsilon|.$$

Finalement, nous pouvons écrire $a_3^\varepsilon = \big(\rho(\varepsilon), \delta(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\big)$, avec $0 \neq |\rho(\varepsilon)| \leqslant |\varepsilon|, |\varepsilon - \rho(\varepsilon)| \geqslant \frac{1}{2}|\varepsilon|$, et $\delta(\varepsilon) \to 0$. Le théorème suivant est le deuxième résultat principal dans ce chapitre.

Théorème 3.1.4. *Avec l'hypothèse ci-dessus, on a*

(i) Si $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon)-\varepsilon} = m \neq \infty$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I} = \left\langle z_2 - mz_1^2, z_1^3\right\rangle,$$

du Théorème 1.2.22 il résulte

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z) = G_{\mathcal{I}}(z) = \max\big(\log|z_2 - mz_1^2|, 3\log|z_1|\big),$$

où la convergence est uniforme sur tout compact de $\Omega\backslash\{0\}$.

(ii) Si $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon)-\varepsilon} = \infty$ (ou c'est équivalente que $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty$), alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2,$$

et on déduit du Théorème 1.2.22 que la fonction de Green pluricomplexe G_ε ne peut pas converger vers $G_{\mathfrak{M}_0^2}(z) = 2\log\|z\| + O(1)$.

3.2 Preuve des résultats principaux

Tout d'abord, notons que le développement en série de Taylor et le polynôme de Taylor de degré m d'une fonction holomorphe f au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$ sont donnés par

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} z_1^j z_2^k; \text{ et } P_m(f)(z) = \sum_{\substack{j,k \\ j+k \leqslant m}} a_{jk} z_1^j z_2^k,$$

où les coefficients de Taylor a_{ik} au voisinage U de 0 sont définis par

$$a_{ik} = \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial z_1^j \partial z_2^k}(0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{j+1} \zeta_2^{k+1}} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

En utilisant la formule de Cauchy sur la frontière distinguée du bidisque, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et U un bidisque de centre $(0,0)$, relativement compact dans $\mathbb{D}^2$. Il existe une constante $C = C(m, U)$ telle que pour toute fonction holomorphe f sur $\mathbb{D}^2$ avec $\sup_{z \in \mathbb{D}^2} \|f(z)\| \leqslant 1$, il existe des fonctions holomorphes $r_{j,k}$ sur $\mathbb{D}^2$ qui satisfont : pour tous les nombres naturels j, k tels que $j + k = m + 1$,*

$$\sup_{z \in U} |r_{j,k}(z)| \leqslant C, 0 \leqslant j \leqslant m + 1,$$

et pour tout $z = (z_1, z_2) \in U$, alors

$$f(z) = P_m(f)(z) + R_{m+1}(z),$$

où

$$R_{m+1}(z) = \sum_{j=0}^{m+1} r_{j,m+1-j}(z) z_1^j z_2^{m+1-j}.$$

Démonstration. Soit $U(r)$ un bidisque de centre $(0,0)$ de rayon $R = (r, r) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < 1$, relativement compact de $\mathbb{D}^2$,

$$U(r) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < r, |z_2| < r\} \Subset \mathbb{D}^2.$$

Comme f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^2$, f est développable en série entière au voisinage de chaque point de $\mathbb{D}^2$. En particulier, au voisinage $U(r)$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{D}^2$, pour tout $z = (z_1, z_2) \in U(r)$, on a que f est développable en série de Taylor à l'origine

$$f(z) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k} z_1^j z_2^k,$$

où, d'après la formule de Cauchy sur le bord distingué $\partial U(r)$ de $U(r)$, pour tout $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \partial U(r)$

$$a_{j,k} := \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial z_1^j \partial z_2^k}(0) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\partial U(r)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{j+1} \zeta_2^{k+1}} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Par l'hypothèse, comme $\sup_{z \in U(r)} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{D}^2} |f(z)| \leqslant 1$, on déduit de l'inégalité de Cauchy que

$$|a_{j,k}| \leqslant \frac{1}{r^{j+k}} \sup_{z \in U(r)} |f(z)| \leqslant \frac{1}{r^{j+k}}.$$

Pour tous nombres naturels j, k satisfont $j+k=m+1$ et pour tout $z=(z_1,z_2)\in U(r)$, on peut écrire

$$f(z)=P_m(f)(z)+\sum_{j=0}^{m+1} r_{j,m+1-j}(z) z_1^j z_2^{m+1-j}.$$

où

$$r_{0,m+1}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{j,k} z_1^j z_2^{k-(m+1)},$$

et

$$r_{i,m+1-i}(z)=\sum_{j=i}^{\infty} a_{j,m+1-i} z_1^{j-i}, \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant m+1.$$

Parce que $|a_{j,k}r^{j+k}|\leqslant 1$, pour tout j,k. Il implique que

$$|a_{j,k}.r^{m+1}r^j r^{k-(m+1)}|\leqslant 1, \text{ et } |a_{j,m+1-i}r^{m+1}r^{j-i}|\leqslant 1,$$

pour $1\leqslant i\leqslant m+1$. Du Lemme d'Abel on déduit alors que les séries $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{j,k}.r^{m+1}z_1^j z_2^{k-(m+1)}$ et $\sum_{j=i}^{\infty} a_{j,m+1-i}r^{m+1}z_1^{j-i}$ convergent normalement sur le bidisque $U(r)$. Alors les fonctions suivantes

$$r_{0,m+1}(z)r^{m+1}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{j,k}.r^{m+1}z_1^j z_2^{k-(m+1)},$$

et

$$r_{i,m+1-i}(z)z_1^i r^{m+1}=\sum_{j=i}^{\infty} a_{j,m+1-i}r^{m+1}z_1^{j-i}, \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant m+1,$$

sont des fonctions analytiques dans $U(r)$. Elles sont donc holomorphes sur $U(r)$, pour tout $0<r<1$. Alors les fonctions $r_{0,m+1}(z)$ et $r_{i,m+1-i}(z)$, pour $1\leqslant i\leqslant m+1$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}^2$. De plus, comme $U(r)$ est un relativement compact de $\mathbb{D}^2$, il existe des constantes $C_0>0, C_i>0$, pour $1\leqslant i\leqslant m+1$ telles que

$$\sup_{z\in U(r)} |r_{0,m+1}(z)|\leqslant C_0,$$

et que, pour tout $1\leqslant i\leqslant m+1$,

$$\sup_{z\in U(r)} |r_{i,m+1-i}(z)|\leqslant C_i.$$

Posons $C=C\big(m,U(r)\big):=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m+1}\big\{C_0,C_i\big\}$. D'où le résultat. □

3.2.1 Preuve de la condition suffisante du Théorème 3.1.2

Maintenant, supposons que $f\in\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon$. Cela signifie qu'il existe alors un sous-ensemble quelconque $A\subset\mathbb{C}$ tel que $0\in\bar{A}\backslash A$ et une famille des fonctions holomorphes $\{f^\varepsilon,\varepsilon\in A\}$, avec $f^\varepsilon\in\mathcal{I}_\varepsilon,\varepsilon\in A$, telle que f^ε converge uniformément vers f sur un voisinage U fixé de l'origine. Supposons que la série de Taylor de f^ε sur U est donnée par

$$f^\varepsilon(z)=f^\varepsilon(z_1,z_2)=\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^\varepsilon z_1^j z_2^k.$$

Remarquons que tous les coefficients de Taylor devront converger.

Comme $f^\varepsilon\big(a_1^\varepsilon\big) = 0$, $a_{0,0}^\varepsilon = 0$ pour tout ε. Appliquons le Lemme 3.2.1 dans le cas où $m = 1$, si $U \Subset U' \Subset \Omega$,

$$f^\varepsilon(z_1, z_2) = a_{1,0}^\varepsilon z_1 + a_{0,1}^\varepsilon z_2 + R_2(z_1, z_2),$$

avec $|R_2(z_1, z_2)| \leq C\|z\|^2$, où C est seulement dépendant de U, U' et $\sup_{U'} |\ f^\varepsilon|$.

En appliquant ceci pour $z = a_i^\varepsilon$, et puis en divisant par $\|a_i^\varepsilon\|$ et en écrivant $\nabla f^\varepsilon(0) := \big(a_{1,0}^\varepsilon, a_{0,1}^\varepsilon\big)$, on trouve

$$\frac{a_i^\varepsilon}{\|a_i^\varepsilon\|} \cdot \nabla f^\varepsilon(0) = O(\|a_i^\varepsilon\|), \quad i = 2, 3.$$

Soit M une matrice de degré 2×2 dont les lignes sont données par les coordonnées de $\frac{a_2^\varepsilon}{\|a_2^\varepsilon\|}$ et $\frac{a_3^\varepsilon}{\|a_3^\varepsilon\|}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$. Alors $\|M\| = O(1)$. Par ailleurs, on a $\|M^{-1}\| = O\Big(\big|\det\big(\frac{a_2^\varepsilon}{\|a_2^\varepsilon\|}, \frac{a_3^\varepsilon}{\|a_3^\varepsilon\|}\big)\big|^{-1}\Big)$. Par la choix d'ordre des points, $\|a_3^\varepsilon\| \leqslant \|a_2^\varepsilon\|$, on en déduit

$$\nabla f^\varepsilon(0) = O(\|M^{-1}\|\|a_2^\varepsilon\|).$$

Parce que $\lim\limits_{A \ni \varepsilon \to 0} \big|\det\big(\frac{a_2^\varepsilon}{\|a_2^\varepsilon\|}, \frac{a_3^\varepsilon}{\|a_3^\varepsilon\|}\big)\big| = \lim\limits_{A \ni \varepsilon \to 0} |\sin\theta^\varepsilon| = |\sin\theta| \in (0, 1]$, il résulte que si

$$\lim_{A \ni \varepsilon \to 0} \frac{\|a_2^\varepsilon\|}{\big|\det\big(\frac{a_2^\varepsilon}{\|a_2^\varepsilon\|}, \frac{a_3^\varepsilon}{\|a_3^\varepsilon\|}\big)\big|} = 0,$$

alors on a $\lim_{A \ni \varepsilon \to 0} \nabla f^\varepsilon(0) = 0$, donc $f \in \mathfrak{M}_0^2$. En conclusion, nous avons démontré que la condition (3.1.2) implique que $\limsup\limits_{A \ni \varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}_0^2$. En appliquant le Corollaire 2.1.6, on obtient $\limsup\limits_{A \ni \varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2$, puisque $\ell\big(\mathfrak{M}_0^2\big) = 3$. Ce qui achève la preuve. $\square$

Ensuite, nous allons démontrer l'inclusion $\mathfrak{M}_0^2 \subset \liminf\limits_{A \ni \varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$ pour mettre en évidence le temps que fait gagner la vérification de convergence d'une famille des idéaux de fonctions holomorphes grâce ceux Proposition 2.1.4 et 2.1.5 du Chapitre 2. Pour mener les calculs, choisissons les coordonnées appropriées.

Pour chaque couple (i, j) d'indices distincts, on pose $a_i^\varepsilon - a_j^\varepsilon =: u_k^\varepsilon \in \mathbb{C}^2$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Pour $|\varepsilon|$ assez petit, comme $\theta \neq 0$, $\{u_3^\varepsilon, u_2^\varepsilon\}$ est indépendant. En utilisant la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient $\mathfrak{B}_\varepsilon := \{e_1^\varepsilon, e_2^\varepsilon\}$ une base orthonormée dans $\mathbb{C}^2$, où $e_j^\varepsilon = \frac{v_j^\varepsilon}{\|v_j^\varepsilon\|}$, pour $j = 1, 2$, $v_1^\varepsilon := u_3^\varepsilon$ et $v_2^\varepsilon := u_2^\varepsilon - \frac{u_2^\varepsilon \cdot \bar{u}_3^\varepsilon}{\|u_3^\varepsilon\|^2} u_3^\varepsilon$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ par rapport à la base canonique $\mathfrak{B}_0 := \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{C}^2$, alors les nouvelles coordonnées $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon)$ de z par rapport à base $\mathfrak{B}_\varepsilon$ sont données par

$$z_1^\varepsilon = z \cdot \bar{e}_1^\varepsilon,\ z_2^\varepsilon = z \cdot \bar{e}_2^\varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Posons maintenant

$$\mathfrak{B} := \big\{\big(u_1, u_2\big) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 : \{u_1, u_2\} \text{ est une base orthonormée dans } \mathbb{C}^2\big\}.$$

Chaque élément $\big(u_1, u_2\big)$ de $\mathfrak{B}$ peut s'identifier à une matrice complexe unitaire A qui préserve le produit scalaire, donc $\mathfrak{B}$ s'identifie à $U(2)$, où $U(2)$ est la groupe unitaire compact des matrices complexes A dans $GL(2, \mathbb{C})$ telle que $A^{-1} = \overline{A^t}$, donc $\mathfrak{B}$ est un compact. Par la compacité de $\mathfrak{B}$, comme $\big(e_1^\varepsilon, e_2^\varepsilon\big)$ est une suite dans $\mathfrak{B}$, il existe une suite extraite $\{\varepsilon_j\}$ de la suite $\{\varepsilon\}$ telle que $\lim\limits_{j \to +\infty} e_i^{\varepsilon_j} = \tilde{e}_i$, pour $i = 1, 2$ et $\big(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\big) \in \mathfrak{B}$. Donc, les coordonnées $z_1^{\varepsilon_j}$ et $z_2^{\varepsilon_j}$ convergent. Supposons que $\lim\limits_{j \to +\infty} z_1^{\varepsilon_j} = \tilde{z}_1$ et $\lim\limits_{j \to +\infty} z_2^{\varepsilon_j} = \tilde{z}_2$. Donc la condition (3.1.2) implique que l'angle entre deux vecteurs u_2^ε et u_3^ε tend vers 0. Cependant, il n'est pas nécessaire que la base $\mathfrak{B}_\varepsilon$ converge.

Ensuite, les coordonnées des points dans la nouvelle base $\mathfrak{B}_\varepsilon$ sont dénotées comme nous l'avions dit précédemment (dans Théorème 3.1.4). Plus précisément, supposons que $a_1^\varepsilon = (0,0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_1^\varepsilon = \big(\rho(\varepsilon), \delta(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\big)$ par rapport à la base $\mathfrak{B}_\varepsilon$. Puisque $0 < \theta < \pi/2$, il est aisé de voir que $|\rho(\varepsilon)| = \|u_2^\varepsilon\| \cos\theta$ et que $|\delta(\varepsilon)\rho(\varepsilon)| = \|u_2^\varepsilon\| \sin\theta$. Par suite, $|\delta(\varepsilon)| = \tan\theta$. Par hypothèse, cela implique que $\lim \frac{\|a_2^\varepsilon\|}{|\theta|} = \lim \frac{\varepsilon}{\tan\theta} = \lim \frac{\rho(\varepsilon)-\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = 0$.

D'autre part, considérons les polynômes suivants qui sont dans $\mathcal{I}_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
Q_1^\varepsilon(z) &= (z_1^\varepsilon)^2 - \varepsilon z_1^\varepsilon - \frac{\rho(\varepsilon)-\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} z_2^\varepsilon;\\
Q_2^\varepsilon(z) &= z_2^\varepsilon\big(z_1^\varepsilon - \rho(\varepsilon)\big);\\
Q_3^\varepsilon(z) &= z_2^\varepsilon\big(z_2^\varepsilon - \delta(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\big).
\end{aligned}$$

Posons $\alpha_{ij} := e_j^\varepsilon \cdot \bar{e}_i$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha_{11} z_1^\varepsilon + \alpha_{12} z_2^\varepsilon,\\
z_2 &= \alpha_{21} z_1^\varepsilon + \alpha_{22} z_2^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Alors si on pose que

$$\begin{aligned}
f_1^\varepsilon(z) &= \alpha_{11}^2 Q_1^\varepsilon(z) + 2\alpha_{11}\alpha_{12} Q_2^\varepsilon(z) + \alpha_{12}^2 Q_3^\varepsilon(z) = z_1^2 + \beta_1(\varepsilon);\\
f_2^\varepsilon(z) &= \big(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}\big) Q_2^\varepsilon(z) + \alpha_{11}\alpha_{21} Q_1^\varepsilon(z) + \alpha_{12}\alpha_{22} Q_2^\varepsilon(z)\\
&= z_1 z_2 + \beta_2(\varepsilon);\\
f_3^\varepsilon(z) &= \alpha_{21}^2 Q_1^\varepsilon(z) + 2\alpha_{21}\alpha_{22} Q_2^\varepsilon(z) + \alpha_{22}^2 Q_3^\varepsilon(z) = z_2^2 + \beta_3(\varepsilon).
\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \beta_k(\varepsilon) = 0$, pour $k = 1, 2, 3$, puisque $|\alpha_{ij}| \leqslant ||e_j^\varepsilon||.||\bar{e}_i|| = 1$, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
z_1^2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} f_1^\varepsilon(z) \in \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}_\varepsilon;\\
z_1 z_2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} f_2^\varepsilon(z) \in \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}_\varepsilon;\\
z_2^2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} f_3^\varepsilon(z) \in \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela implique que $\mathfrak{M}_0^2 \subset \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$, et que la condition (3.1.2) est suffisante pour que la convergence de famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ est égale à $\mathfrak{M}_0^2$. □

Pour la démonstration de la condition nécessaire du Théorème 3.1.2, on a besoin de démontrer ensuite le Théorème 3.1.4.

3.2.2 Preuve du Théorème 3.1.4

Démonstration. Tout d'abord, dans le cas (ii), il est aisé de voir que la condition $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\delta(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon)-\varepsilon} = \infty$ (ou $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty$) est équivalente à la condition (3.1.2) du Théorème 3.1.2. Par la démonstration ci-dessus, on déduit que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2$. Nous allons démontrer maintenant l'énoncé (i) du Théorème.

En effet, nous allons modifier un peu la base $\mathfrak{B}_\varepsilon$ dans la preuve ci-dessus. L'hypothèse du Théorème 3.1.4 implique que la limite $\lim_{\varepsilon\to 0}[e_1^\varepsilon]$ existe. Donc nous multiplions les vecteurs $e_1^\varepsilon, e_2^\varepsilon$ par les nombres complexes appropriés du module 1. Nous obtenons alors une base $\tilde{\mathfrak{B}}_\varepsilon = \big(\tilde{e}_1^\varepsilon, \tilde{e}_2^\varepsilon\big)$ telle que les limites suivantes existent $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \tilde{e}_1^\varepsilon =: e_1$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \tilde{e}_2^\varepsilon =: e_2$. Notons $\big(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon\big)$ (respectivement (z_1, z_2)) des coordonnées d'un point dans la base $\big(\tilde{e}_1^\varepsilon, \tilde{e}_2^\varepsilon\big)$ (respectivement (e_1, e_2)).

Enfin, soit f une fonction holomorphe quelconque sur Ω qui est exprimée dans les (z_1, z_2)-coordonnées, et on note $\tilde{f}$ son expression dans les $\big(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon\big)$-coordonnées (c'est-à-dire, si z et $\tilde{z}$ sont des coordonnées du même point, alors $f\big(z\big) = \tilde{f}\big(\tilde{z}\big)\big)$. Pour chaque $f^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$, nous pouvons écrire, dans les $\big(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon\big)$-coordonnées,

$$\tilde{f}^\varepsilon\big(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon\big) = \sum_{j,k} \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \big(z_1^\varepsilon\big)^j \big(z_2^\varepsilon\big)^k.$$

Remarquons que la fonction et les coordonnées dépendent de ε. Parce que l'expression de f dans les $\big(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon\big)$-coordonnées est obtenue par un changement linéaire de variables, les divers coefficients de Taylor $\tilde{a}_{ij}^\varepsilon$ dans la somme ci-dessus sont obtenus par une formule linéaire. De plus, comme la matrice de changement de variables tend vers la matrice identité quand ε tend vers 0, $\lim_{\varepsilon\to 0} a_{ij}^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{a}_{ij}^\varepsilon$ si cette dernière limite existe.

Maintenant, soit $f \in \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$, c'est-à-dire, il existe une suite de fonctions holomorphes $\{f^\varepsilon\}_\varepsilon$, où $f^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$, telle que $f = \lim_{\varepsilon\to 0} f^\varepsilon$ avec convergence uniforme sur un voisinage fixe de l'origine. Appliquons le Lemme 3.2.1 pour $m = 2$,

$$\tilde{f}^\varepsilon(z_1, z_2) = \tilde{a}_{0,0}^\varepsilon + \tilde{a}_{1,0}^\varepsilon z_1 + \tilde{a}_{0,1}^\varepsilon z_2 + \tilde{a}_{2,0}^\varepsilon z_1^2 + \tilde{a}_{0,2}^\varepsilon z_2^2 + \tilde{a}_{1,1}^\varepsilon z_1 z_2 + R_3(z_1, z_2)$$

où

$$R_3(z_1, z_2) = \tilde{r}_{3,0}^\varepsilon z_1^3 + \tilde{r}_{2,1}^\varepsilon z_1^2 z_2 + \tilde{r}_{1,2}^\varepsilon z_1 z_2^2 + \tilde{r}_{0,3}^\varepsilon z_2^3,$$

et

$$\big|R_3(z_1, z_2)\big| \leqslant C\|z\|^3,$$

où la constante C ne dépend que de $\|f\|_\infty$. Il est évident que $\tilde{a}_{0,0}^\varepsilon = 0$, puisque $\tilde{f}^\varepsilon(a_1^\varepsilon) = \tilde{f}^\varepsilon(0,0) = 0$. Il résulte de $\tilde{f}^\varepsilon(a_2^\varepsilon) = \tilde{f}^\varepsilon(\varepsilon, 0) = 0$ que $\tilde{a}_{1,0}^\varepsilon \varepsilon + \tilde{a}_{2,0}^\varepsilon \varepsilon^2 + R_3(\varepsilon, 0) = 0$. Il vient

$$\tilde{a}_{1,0}^\varepsilon = -\tilde{a}_{2,0}^\varepsilon \varepsilon - \frac{R_3(\varepsilon, 0)}{\varepsilon}, \tag{3.2.2}$$

pour tout ε. Alors $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial z_1}(0,0) = \tilde{a}_{1,0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{a}_{1,0}^\varepsilon = 0$.

De plus, en posant $\rho = \rho(\varepsilon), \delta = \delta(\varepsilon)$, de $\tilde{f}^\varepsilon(a_3^\varepsilon) = \tilde{f}^\varepsilon\big(\rho, \delta\rho\big) = 0$, et de (3.2.2) on déduit que

$$\begin{aligned} &\Big[-\tilde{a}_{2,0}^\varepsilon \varepsilon - \frac{R_3(\varepsilon, 0)}{\varepsilon}\Big]\rho + \tilde{a}_{0,1}^\varepsilon \delta\rho + \tilde{a}_{2,0}^\varepsilon \rho^2 + \tilde{a}_{0,2}^\varepsilon \delta^2\rho^2 \\ &+ \tilde{a}_{1,1}^\varepsilon \delta\rho^2 + R_3(\rho, \delta\rho) = 0, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

et en divisant par $\rho(\rho - \varepsilon)$,

$$\tilde{a}_{2,0}^\varepsilon + \tilde{a}_{0,1}^\varepsilon \frac{\delta}{\rho - \varepsilon} + \tilde{a}_{0,2}^\varepsilon \delta^2 \frac{\rho}{\rho - \varepsilon} + \tilde{a}_{1,1}^\varepsilon \frac{\delta}{\rho - \varepsilon}\rho + \frac{R_3(\rho, \delta\rho)}{\rho(\rho - \varepsilon)} - \frac{R_3(\rho, \delta\rho)}{\varepsilon\big(\rho - \varepsilon\big)} = 0.$$

Remarquons que, par notre choix des coordonnées, $1 \leqslant \left|\dfrac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}\right| \leqslant 2$ et $\left|\dfrac{\rho}{\rho - \varepsilon}\right| \leqslant 1$.

Par l'hypothèse, parce qu'il existe la limite de $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon) - \varepsilon}$ et qu'elle vaut $m \neq \infty$, on déduit $R_3\big(\rho, \delta\rho\big) = O(\rho^3)$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{R_3\big(\rho, \delta\rho\big)}{\rho(\rho - \varepsilon)} = 0$. En passant à la limite dans la formule ci-dessus, on a alors que $a_{2,0} + m a_{0,1} = 0$. Il vient

$$\begin{aligned} &\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathcal{I} := \Big\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2) : f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0) = 0 \quad \text{et} \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(0,0) + m\frac{\partial f}{\partial z_2}(0,0) = 0 \Big\} = \big\langle z_2 - m z_1^2, z_2^2, z_1 z_2, z_1^3 \big\rangle. \end{aligned}$$

Comme $z_1z_2 = z_1(z_2 - mz_1^2) + m.z_1^3$ et $z_2^2 = (z_2 + mz_1^2)(z_2 - mz_1^2) + (m^2 z_1)z_1^3$, z_1z_2, on obtient $z_2^2 \in \langle z_2 - mz_1^2, z_1^3 \rangle$. Donc $\mathcal{I} = \langle z_2 - mz_1^2, z_1^3 \rangle$.

Par contre, puisque

$$z_2 - m.z_1^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(z_2 - \frac{\delta}{\rho - \varepsilon} z_1(z_1 - \varepsilon) \right) \in \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon,$$

et

$$z_1^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} z_1(z_1 - \varepsilon)\big(z_1 - \rho(\varepsilon)\big) \in \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon,$$

on a $\mathcal{I} \subset \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$. Il existe alors la limite de l'idéal $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I} = \langle z_2 - mz_1^2, z_1^3 \rangle$.

Puisque $\mathcal{I}$ admet une représentation par deux générateurs, $\mathcal{I}$ est un idéal d'intersection complète. Grâce au Théorème 1.2.22, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(z) = G_{\mathcal{I}}(z) = \max\big(\log|z_2 - mz_1^2|, 3\log|z_1|\big),$$

où la convergence est uniforme locale sur tout compact de $\Omega \backslash \{0\}$. □

3.2.3 Preuve de la condition nécessaire du Théorème 3.1.2

Démonstration. Pour démontrer la condition nécessaire du Théorème 3.1.2, nous allons montrer que si $\frac{\|a_2^\varepsilon\|}{|\theta|}$ ne tend pas vers 0, alors $\mathfrak{M}_0^2$ n'est pas la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, quand ε tend vers 0. En effet, puisque $\frac{\|a_2^\varepsilon\|}{|\theta|}$ ne tend pas vers 0, nous pouvons trouver une suite $\varepsilon_j \to 0$ telle que $\frac{\|a_2^{\varepsilon_j}\|}{|\theta|} \geqslant c > 0$ et donc sur la suite ε_j, θ tend vers 0, d'où toutes les distances $[a_i^\varepsilon - a_j^\varepsilon]$ entre les deux points a_i^ε et a_j^ε dans $\mathbb{CP}^1$ tendent vers 0. De plus, on a aussi $\theta \sim \tan\theta \sim \sin\theta$. En passant une autre sous-suite de la suite ε_j (on désigne encore cette sous-suite ε_j), nous pouvons supposer que $\frac{a_2^\varepsilon}{\|a_2^\varepsilon\|}$ converge. Utilisons les coordonnées et les notations du Théorème 3.1.4, on en déduit que $\frac{\delta(\varepsilon_j)}{\rho(\varepsilon_j) - \varepsilon_j}$ est une suite bornée dans $\mathbb{C}$, puisque $\frac{\delta(\varepsilon_j)}{\varepsilon_j} = \frac{\tan\theta}{\|a_2^{\varepsilon_j}\|} \sim \frac{\delta}{\|a_2^{\varepsilon_j}\|} \leqslant \frac{1}{c}$ et $1 \leqslant \left|\frac{\varepsilon_j}{\rho(\varepsilon_j) - \varepsilon_j}\right| \leqslant 2$. Donc, en passant à une autre sous-suite, nous pouvons supposer que $\lim_j \frac{\delta(\varepsilon_j)}{\rho(\varepsilon_j) - \varepsilon_j} = m \in \mathbb{C}$. Par conséquent, notre situation retombe sur la même situation du Théorème 3.1.4, l'assertion (1). Il en résulte que la limite des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ sur cette sous-suite contient la fonction $z_2 - mz_1^2$. Mais cette fonction n'est pas dans $\mathfrak{M}_0^2$, puisque $\dfrac{\partial}{\partial z_2}\big(z_2 - \ell z_1^2\big)\ |_{(0,0)} = 1 \neq 0$. Cela implique que $\limsup_\varepsilon \mathcal{I}_\varepsilon \not\subseteq \mathfrak{M}_0^2$. D'où le résultat.

En fait, remarquons dans ce cas où $[a_2^\varepsilon]$ ne converge pas, nous pouvons trouver deux valeurs différentes de $\lim_\varepsilon [a_2^\varepsilon]$ pour deux sous-suites différentes de ε, et deux fonctions commençant par des termes de degré 1 distincts dans $\limsup_\varepsilon \mathcal{I}_\varepsilon$ (avec le système de coordonnées approprié). Par conséquent, il vient $\limsup_\varepsilon \mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0$. Comme $\ell\big(\mathfrak{M}_0\big) \neq \ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$, la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$ ne peut converger vers aucune limite. Cela contraste avec l'autre cas, où aucune convergence des bases $\mathfrak{B}_\varepsilon$ n'était demandée, car $\mathfrak{M}_0^2$ est invariant par rotation. □

3.3 Borne supérieure et borne inférieure de la limite de la fonction de Green pluricomplexe

Dans cette section, nous étudierons la limite de la fonction de Green pluricomplexe dans le cas (2) du Théorème 3.1.4, au moins dans le cas où $\Omega = \mathbb{D}^2$. Malheureusement, nous n'avons obtenus que quelques estimations partielles. Mais ceci nous donne une vue en général sur la limite de la fonction de Green.

Tout d'abord, la définition de la fonction de Green implique que pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2)$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$, telle que $f(a_j^\varepsilon) = 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant 3$, alors $G_\varepsilon(z) \geqslant \log|f(z)|$. En particulier, pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$, soit $P_\varepsilon(z)$ un polynôme de degré d,

$$P_\varepsilon(z_1, z_2) = \sum_{\substack{j,k=0 \\ 0 \leqslant j+k \leqslant d}}^{\infty} a_{j,k}^\varepsilon z_1^j z_2^k.$$

Supposons que $P_\varepsilon(a_j^\varepsilon) = 0$, pour $j = 1, 2, 3$ et s'annule à l'ordre m au chaque point a_j^ε, $j = 1, 2, 3$, c'est-à-dire,

$$\nabla^\alpha P_\varepsilon(a_j^\varepsilon) = 0,$$

pour tout $j = 1, 2, 3$, où $0 \leqslant \alpha \leqslant m - 1$. On a toujours donc que

$$G_\varepsilon(z_1, z_2) \geqslant \frac{1}{m} \log \frac{|P_\varepsilon(z_1, z_2)|}{||P_\varepsilon||_\infty}.$$

Pour la première estimation, on a un résultat suivant sur la borne inférieure de la limite de la fonction de Green.

Proposition 3.3.1. *(1) Pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on a alors que*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(z_1, z_2) \geqslant \max\left(2 \log|z_1|, \frac{3}{2} \log|z_2|\right).$$

(2) Pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ tel que $|z_2| \leqslant |z_1|^2$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(z_1, z_2) = 2 \log|z_1|.$$

Démonstration. (1) Pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on va montrer que

$$\liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} G_\varepsilon(z_1, z_2) \geqslant 2 \log|z_1|.$$

En effet, considérons une fonction analytique qui s'annule sur les trois pôles $a_1^\varepsilon = (0, 0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_3^\varepsilon = (\rho, \delta\rho)$. D'après la formule de Taylor, on va négliger tous les termes qui doivent tendre vers 0 plus vite que les termes principaux. Donc on peut considérer un polynôme de la forme suivante $Q(z_1, z_2) = a_{0,0}^\varepsilon + a_{1,0}^\varepsilon z_1 + a_{0,1}^\varepsilon z_2 + a_{2,0}^\varepsilon z_1^2$, avec les coefficients calculés pour que $P(z_1, z_2)$ s'annule sur les trois pôles $a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon$ ci-dessus. Une solution simple est le polynôme suivant

$$Q(z_1, z_2) = -\varepsilon z_1 + z_1^2 + \frac{\varepsilon - \rho}{\delta} z_2.$$

On définit

$$Q_1(z_1, z_2) := \left(\sup_{\substack{|w_1|<1 \\ |w_2|<1}} |Q(w_1, w_2)|\right)^{-1} Q(z_1, z_2).$$

Alors $\log|Q_1(z_1, z_2)| \in PSH\_(\mathbb{D}^2)$ et s'annule sur les trois pôles $a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon$. Donc le polynôme $Q_1(z_1, z_2)$ satisfait la condition ci-dessus. Il vient $G_\varepsilon(z_1, z_2) \geqslant \log|Q_1(z_1, z_2)|$. En faisant tendre ε vers 0, on trouve

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(z_1, z_2) \geqslant \log|z_1|^2 = 2 \log|z_1|, \tag{3.3.1}$$

pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Pour obtenir une autre partie de l'estimation, considérons les trois lignes droites différentes telles que chaque ligne droite passe par les deux points a_i^ε et a_j^ε, $(i \neq j, i, j \in \{1,2,3\})$, avec les équations suivantes

$$l_1^\varepsilon(z) = z_2;\ l_2^\varepsilon(z) = z_2 - \delta(\varepsilon)z_1;\ l_3^\varepsilon(z) = z_2 - \delta(\varepsilon)\frac{\rho(\varepsilon)}{\rho(\varepsilon)-\varepsilon}(z_1 - \varepsilon).$$

Parce que chaque pôle appartient à deux lignes droites différentes, donc le polynôme $P(z_1, z_2) := l_1^\varepsilon(z).l_2^\varepsilon(z).l_3^\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_\varepsilon^2$. De plus, puisque

$$\|P\|_\infty = \sup\big\{\big|P(z)\big| : z \in \mathbb{D}^2\big\} \leqslant 1(1+|\delta|)(1+|\delta|.(1+|\varepsilon|)) \leqslant (1+|\delta|)^2(1+|\varepsilon|) = 1 + O(|\varepsilon|) < C,$$

pour tout ε assez petit et C ne dépend pas de ε, on obtient $\lim_{\varepsilon\to 0}\|P\|_\infty = 1$. Il est ensuite facile de voir que $\log\dfrac{\big|P(z)\big|}{\|P\|_\infty} \in PSH\_\big(\mathbb{D}^2\big)$ et que $\dfrac{\partial P}{\partial z_i}(a_j^\varepsilon) = 0$, pour tout $i = 1,2$ et $j = 1,2,3$. À l'aide de la définition de la fonction de Green, il résulte que

$$G_\varepsilon(z_1, z_2) \geqslant \frac{1}{2}\log\frac{|P(z_1,z_2)|}{\|P\|_\infty}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z_1,z_2) \geqslant \frac{3}{2}\log|z_2|, \tag{3.3.2}$$

pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$. Finalement, de (3.3.1) et (3.3.2) on déduit que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z_1,z_2) \geqslant \max\big(2\log|z_1|, \frac{3}{2}\log|z_2|\big),$$

pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(2) Pour obtenir l'assertion (2) de la Proposition, il est évident d'abord que si $S \subset S'$, donc $G_S \geqslant G_{S'}$. Par ailleurs, par la propriété multiplicative de la fonction de Green suivante

Lemme 3.3.2. *[Edig99] Si $S_i \subset \Omega_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$, $i = 1,2$, alors*

$$G_{S_1\times S_2}^{\Omega_1\times\Omega_2}\big(z_1,z_2\big) = \max\big(G_{S_1}^{\Omega_1}(z_1), G_{S_2}^{\Omega_2}(z_2)\big).$$

On en déduit, en vertu du Lemme 1.1.7, que

$$G_\varepsilon(z) \leqslant G_{\{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon\}}(z) = \max\left(\log\left|z_1\frac{\varepsilon - z_1}{1-\bar{\varepsilon}z_1}\right|, \log|z_2|\right),$$

et que la dernière fonction tend vers $2\log|z_1|$ quand $|z_2| \leqslant |z_1|^2$. Par suite, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z_1,z_2) \leqslant 2\log|z_1|$. Par conséquent, de (3.3.1) il résulte

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z_1,z_2) \leqslant 2\log|z_1| \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z_1,z_2).$$

Puisque $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z) \leqslant \limsup\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z)$, on obtient $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z) = \limsup\limits_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z) = 2\log|z_1|$. On en déduit qu'il existe la limite $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z_1,z_2) = 2\log|z_1|$, pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$ telle que $|z_2| \leqslant |z_1|^2$. □

En général, il est plus difficile à estimer la borne supérieure que la borne inférieure de la limite de la fonction de Green. Nous ne pouvons, en général, qu'obtenir une borne supérieure avec une hypothèse assez spéciale sur la configuration qui veut dire, grosso modo, que l'angle avec sommet à l'origine qui est formé par les trois points devrait tendre très lentement vers 0. Celui-ci est le résultat suivant sur la borne supérieure de la limite de la fonction de Green.

Proposition 3.3.3. *Si* $\dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|} \longrightarrow 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, alors pour tout* $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2 \backslash \{(0,0)\}$*,*

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) \leqslant \frac{3}{2} \log \max\big(|z_1|, |z_2|\big).$$

Pour démontrer la Proposition 3.3.3, nous avons d'abord besoin du résultat suivant qui résulte du théorème des "trois cercles" d'Hadamard pour les fonctions sousharmoniques.

Lemme 3.3.4. *Soit* $\nu \in SH(\mathbb{D})$ *et* $\nu \leqslant 0$ *sur* $\mathbb{D}$*. S'il existe* $\mu > 0$ *tel que* $\nu \leqslant -\mu$ *sur* $\overline{D(0, r_0)}$*, où* $1 \gg r_0 > 0$*, on a alors*

$$\nu(z) \leqslant -\mu . \frac{\log|z|}{\log r_0}, \textit{ pour tout } r_0 \leqslant |z| \leqslant 1.$$

Démonstration. On peut appliquer du théorème des "trois cercles" d'Hadamard pour la fonction $f(z) := e^{\nu(z)} \in SH(\mathbb{D})$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. En effet, posons

$$M(r) := \sup\{||f(z)|| : ||z|| = r\}.$$

Comme $\nu \leqslant 0$ sur $\mathbb{D}$ et $\nu \leqslant -\mu$ sur $\overline{D(0, r_0)}$, on a $M(r_0) = e^{-\mu}$ et $M(1) = e^0 = 1$. D'après le théorème des "trois cercles" d'Hadamard, pour tout $r_0 \leqslant |z| \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \nu(z) = \log f(z) &\leqslant \frac{\log 1 - \log||z||}{\log 1 - \log r_0} . \log M(r_0) + \frac{\log||z|| - \log r_0}{\log 1 - \log r_0} . \log M(1) \\ &= -\mu . \frac{\log|z|}{\log r_0}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Démonstration de la Proposition 3.3.3. Nous allons estimer une fonction par sa restriction sur une famille des disques analytiques bien choisis. Par la Proposition 3.3.1 (2), sans perte de généralité, supposons que $z_2 \neq 0$.

Posons que $Z_1 := \frac{z_1 - \varepsilon}{\|z\|_\infty} r_\varepsilon$, $Z_2 := \frac{z_2}{\|z\|_\infty} r_\varepsilon$, où $r_\varepsilon := 1 - \frac{|\varepsilon||z_1|}{|z_1| - |\varepsilon|} \leqslant 1$. Si $z_1 \neq 0$, donc r_ε est défini pour $|\varepsilon| < |z_1|$ et dans ce cas-là, on a $0 < r_\varepsilon \to 1$ quand $\varepsilon \to 0$. Remarquons que pour tout ε, $|Z_1| \leqslant 1$ et $|Z_2| \leqslant 1$. Ensuite, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, définissons

$$\Psi(\zeta) := \big(\varepsilon + Z_1\zeta, Z_2\zeta\big) = \left(\varepsilon + \frac{z_1 - \varepsilon}{\|z\|_\infty} r_\varepsilon \zeta, \frac{z_2}{\|z\|_\infty} r_\varepsilon \zeta\right).$$

Donc Ψ est un disque analytique de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}^2$ et qui passe par les deux points $a_1^\varepsilon = (\varepsilon, 0)$ et $z = (z_1, z_2) \neq (0,0)$. En effet, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, on a donc $\left|\frac{z_2}{\|z\|_\infty} r_\varepsilon \zeta\right| < r_\varepsilon \leqslant 1$ et $\left|\varepsilon + \frac{z_1 - \varepsilon}{\|z\|_\infty} r_\varepsilon \zeta\right| < 1$. Parce que, quand $z_1 \neq 0$, à l'aide de $|z_2| \leqslant |z_1|^2 \leqslant |z_1|$, $\|z\|_\infty = |z_1|$ et puis

$$\left|r_\varepsilon \zeta + \frac{\varepsilon\|z\|_\infty}{z_1 - \varepsilon}\right| < |\zeta| \left(1 - \frac{|\varepsilon||z_1|}{|z_1| - |\varepsilon|}\right) + \frac{|\varepsilon||z_1|}{|z_1| - |\varepsilon|} < 1.$$

Par conséquent, $\Psi(\zeta) \in \mathbb{D}^2$. De plus, nous pouvons choisir ε assez petit, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, tel que $z \in D\big(0; r_\varepsilon\big) \backslash \{0\}$. Alors $\left|\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\right| < 1$ et $\Psi\big(\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\big) = (z_1, z_2)$, $\Psi(0) = a_1^\varepsilon = (\varepsilon, 0)$.

Soit $u \in PSH\_(\mathbb{D}^2)$ une fonction dans la famille qui définit la fonction de Green G_ε qui satisfait $u(z) \leqslant \log||z - a_j^\varepsilon|| + O(1)$, quand $z \longrightarrow a_j^\varepsilon, j = 1, 2, 3$. Posons $u_2 := u \circ \Psi$. Puisque, pour tout $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{D}$,

$$u\big(\varepsilon + \zeta_1, \zeta_2\big) \leqslant \log\big\|\big(\zeta_1 + \varepsilon - \varepsilon, \zeta_2 - 0\big)\big\| + O(1) = \log\max\big(|\zeta_1|, |\zeta_2|\big) + O(1),$$

il résulte que

$$u_2(\zeta) = u \circ \Psi(\zeta) = u\big(\varepsilon + Z_1\zeta, Z_2\zeta\big) \leqslant \log \max\big(|Z_1\zeta|, |Z_2\zeta|\big) + O(1) \leqslant \log|\zeta| + O(1).$$

Posons maintenant $u_3(\zeta) := u_2(\zeta) - \log|\zeta|$, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Comme $u_2(\zeta) \in SH\_\big(\mathbb{D}\backslash\{0\}\big)$ et $\log|\zeta| \in H\big(\mathbb{D}\backslash\{0\}\big)$, on a que $u_3 \in SH\_\big(\mathbb{D}\backslash\{0\}\big)$. De plus, pour tout ζ au voisinage de 0, on a $u_3(\zeta) = u_2(\zeta) - \log|\zeta| \leqslant \log|\zeta| + O(1) - \log|\zeta| = O(1)$. Donc u_3 est bornée au voisinage de 0. D'après le théorème de la singularité amovible pour les fonctions sous-harmoniques (Théorème 3.6.1, [Rans95]), la fonction u_3 peut s'étendre en une fonction dans $SH\_\big(\mathbb{D}\big)$.

Pour continuer à prouver la Proposition 3.3.3, nous avons besoin du résultat suivant qui résulte de l'estimation sur une famille de disques analytiques bien choisis (en utilisant les deux autres pôles et une autre famille des disques analytiques). Retardons la démonstration de ce résultat à la fin de cette section.

Lemme 3.3.5. *Pour tout $u \in PSH\_\big(\mathbb{D}^2\big)$ une fonction dans la famille qui définit G_ε, il existe alors $z_0 \in \mathbb{D}$ et des constantes $C_1, C_4 > 0$ tels que pour tout $\zeta \in D_0 := D\big(z_0, C_1|\varepsilon|^2\big)$,*

$$u_3(\zeta) \leqslant \log\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| + C_4.$$

Remarquons que la démonstration du Lemme ci-dessus n'utilise pas l'hypothèse $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|} = 0$.

Ensuite, pour tout $\xi \in \mathbb{D}$, posons $u_4(\xi) := u_3 \circ \varPhi_{z_0}(\xi)$, où

$$\varPhi_{z_0}(\xi) := \frac{z_0 - \xi}{1 - \overline{z_0}\xi},$$

est l'involution de Möbius standard sur le disque unité. Donc $u_4 \in SH\_(\mathbb{D})$. On pose $D_1 := D\big(0, C_5|\varepsilon|^2\big) \subset \varPhi_{z_0}^{-1}(D_0)$. Il vient, pour tout $\eta \in \overline{D_1}$, soit $\xi := \varPhi_{z_0}(\eta) \in \overline{D_0}$. Du Lemme 3.3.5, on déduit que

$$u_4(\eta) = u_3 \circ \varPhi_{z_0}(\eta) = u_3 \circ \varPhi_{z_0} \circ \varPhi_{z_0}^{-1}(\xi) = u_3(\xi) \leqslant \log\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| + C_4.$$

Par le Théorème 3.3.4 des "trois cercles" d'Hadamard pour les fonctions sousharmoniques, on a, pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{D}}\backslash D_1$,

$$\begin{aligned} u_4(\xi) &\leqslant \left(\log\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| + C_3\right)\frac{\log|\xi|}{\log\left(C_4|\varepsilon|^2\right)} \\ &= \log|\xi|\left(\frac{\log|\varepsilon| - \log|\delta| + C_3}{2\log|\varepsilon| + \log C_4}\right) \\ &= \log|\xi|\left(\frac{1 - \dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|} + \dfrac{C_3}{\log|\varepsilon|}}{2 + \dfrac{\log C_4}{\log|\varepsilon|}}\right) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Alors pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{D}}\backslash D_0$, $\varPhi_{z_0}^{-1}(\xi) = \varPhi_{z_0}(\xi) \subset \overline{\mathbb{D}}\backslash D_1$. D'après (3.3.3), on a

$$u_3(\xi) = u_4\big(\varPhi_{z_0}(\xi)\big) \leqslant \log|\varPhi_{z_0}(\xi)|.\left(\frac{1 - \dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|} + \dfrac{C_3}{\log|\varepsilon|}}{2 + \dfrac{\log C_4}{\log|\varepsilon|}}\right).$$

Donc

$$u_2(\xi) = u_3(\xi) + \log|\xi| \leqslant \log|\xi| + \log|\varPhi_{z_0}(\xi)|.\left(\frac{1 - \dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|} + \dfrac{C_3}{\log|\varepsilon|}}{2 + \dfrac{\log C_4}{\log|\varepsilon|}}\right).$$

Par ailleurs, pour ε assez petit, supposons que $\left|\dfrac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}-z_0\right| \geqslant r_0 = C|\varepsilon|^2$. Prenons $\xi = \dfrac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon} \in \mathbb{D}\backslash D_0$, on a donc

$$\begin{aligned}u(z_1,z_2) &= u\left(\Psi\left(\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\right)\right) = u_2\left(\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\right)\\ &\leqslant \log\left(\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\right) + \log\left|\Phi_{z_0}\left(\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\right)\right| . \left(\frac{1-\dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|}+\dfrac{C_3}{\log|\varepsilon|}}{2+\dfrac{\log C_4}{\log|\varepsilon|}}\right).\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, puisque $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon = 1$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\log\left|\Phi_{\xi(0)}\left(\frac{\|z\|_\infty}{r_\varepsilon}\right)\right| = \log\|z\|_\infty,$$

pour tout $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2\backslash\{z_2=0\}$.

Maintenant, par l'hypothèse $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|}=0$, on obtient donc

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} u(z) \leqslant \log\|z\|_\infty + \frac{1}{2}\log\|z\|_\infty = \frac{3}{2}\log\|z\|_\infty,$$

pour tout $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2\backslash\{z_2=0\}$, d'où le résultat. □

Démonstration du Lemme 3.3.5.

Tout d'abord, nous définirons une famille de disques analytiques qui passent par les deux pôles $a_0^\varepsilon=(0,0)$ et $a_2^\varepsilon=\big(\rho,\delta\rho\big)$. Pour tout $\zeta\in\mathbb{D}$, posons

$$\varphi_\lambda(\zeta) := \big(\zeta, \delta\zeta+\lambda\zeta(\zeta-\rho)\big),$$

où $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que

$$|\lambda| \leqslant \frac{1-|\delta|}{1+|\rho|} < 1. \tag{3.3.4}$$

Nous avons donc $\varphi_\lambda(\zeta)\in\mathbb{D}^2$, pour tout $\zeta\in\mathbb{D}$, puisque

$$\big|\delta\zeta+\lambda\zeta(\zeta-\rho)\big| \leqslant |\delta|+|\lambda|\big(1+|\rho|\big) \leqslant |\delta| + \frac{1-|\delta|}{1+|\rho|}.\big(1+|\rho|\big) = 1.$$

C'est à dire $\varphi_\lambda(\mathbb{D})\Subset\mathbb{D}^2$ et alors φ_λ est un disque analytique qui passe par les deux pôles $a_0^\varepsilon=(0,0)$ et $a_2^\varepsilon=(\rho,\delta\rho)$.

Ensuite, posons $u_1 := u\circ\varphi_\lambda$. Pour tout $\zeta\in\mathbb{D}$, $u_1(\zeta)=u\circ\varphi_\lambda(\zeta)=u\big(\zeta,\delta\zeta+\lambda\zeta(\zeta-\rho)\big)$. On sait que, de la définition de la fonction de Green,

$$u_1(\zeta) \leqslant \log\max\big(|\zeta|, |\zeta|\big(\big|\delta+\lambda(\zeta-\rho)\big|\big) + O(1) = \log|\zeta| + O(1),$$

puisque $\big|\delta+\lambda(\zeta-\rho)\big| \leqslant |\delta|+|\lambda|\big(1+|\rho|\big)\leqslant 1$. De plus,

$$\begin{aligned}&u_1(\zeta) = u\big(\rho+\zeta-\rho, \delta\rho+\delta(\zeta-\rho)+\lambda\zeta(\zeta-\rho)\big)\\ &\leqslant \log\max\big(\big|\zeta-\rho\big|, \big|\zeta-\rho\big|\big|\delta+\lambda\zeta\big|\big) + O(1) \leqslant \log\big|\zeta-\rho\big| + O(1).\end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $\zeta\in\mathbb{D}$, que

$$u_1(\zeta) \leqslant G^{\mathbb{D}}_{\{0,\rho\}}(\zeta) = \log\big|\zeta\frac{\rho-\zeta}{1-\bar\rho\zeta}\big|. \tag{3.3.5}$$

Cela fournit certaines bornes supérieures des valeurs de u sur la réunion de l'image des disques φ_λ. Nous voudrions comprendre comment cela affectera u_2, la restriction de u sur le disque droit $\Psi\big(\mathbb{D}\big)$ qui passe par les deux points $a_1^\varepsilon = (\varepsilon, 0)$ et z.

En effet, pour tout λ qui satisfait (3.3.4), on va chercher $\zeta = \zeta(\lambda) \in \mathbb{D}$ telle que $\varphi_\lambda(\zeta) = \Psi(\xi) \in \Psi\big(\mathbb{D}\big)$. Il vient $(\varepsilon + Z_1\xi, Z_2\xi) = \big(\zeta, \delta\zeta + \lambda\zeta(\zeta - \rho)\big)$. Donc $\zeta = \varepsilon + Z_1\xi$ et nous la remplaçons dans l'équation de deuxième coordonnée,

$$Z_2\xi = \delta(\varepsilon + Z_1\xi) + \lambda(\varepsilon + Z_1\xi)(\varepsilon - \rho + Z_1\xi). \tag{3.3.6}$$

Pour $z_2 \neq 0$, $Z_2 - \delta Z_1 \neq 0$ pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Si $\lambda = 0$ (satisfait (3.3.4)), on a donc une solution de (3.3.6) qui est

$$\xi(0) := \frac{\delta\varepsilon}{Z_2 - \delta Z_1}.$$

Si $\lambda \neq 0$, considérons la solution de l'équation (3.3.6) à la forme suivante : $\xi = \xi(\lambda) = \xi(0) + \beta(\lambda) = \dfrac{\delta\varepsilon}{Z_2 - \delta Z_1} + \beta(\lambda)$. Posons $\beta := \beta(\lambda)$. D'après (3.3.6), on a alors

$$(Z_2 - \delta Z_1)\beta = \lambda\bigg(\varepsilon + \frac{Z_1\delta\varepsilon}{Z_2 - \delta Z_1} + Z_1\beta\bigg)\bigg(\varepsilon - \rho + \frac{Z_1\delta\varepsilon}{Z_2 - \delta Z_1} + Z_1\beta\bigg). \tag{3.3.7}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$a\beta^2 + (\theta_1 - b_0)\beta + c = 0, \tag{3.3.8}$$

où $a := \lambda Z_1^2, b_0 := Z_2 - \delta Z_1, \theta_1 = O(\varepsilon)$ et $c := O(\varepsilon^2)$. On a alors les solutions de l'équation (3.3.8) de la forme suivante

$$\begin{aligned}\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{\big(b_0 - \theta_1\big) \pm \sqrt{b_0^2 - 2b_0\theta_1 + \theta_1^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b_0}{2a}\bigg[1 - \frac{\theta_1}{b_0} \pm \sqrt{1 - \frac{2\theta_1}{b_0} + \frac{\theta_1^2}{b_0^2} - \frac{4ac}{b_0^2}}\bigg].\end{aligned}$$

Considérons maintenant une solution qui satisfait

$$\beta(\lambda) = \frac{b_0}{2a}\bigg[O\bigg(\frac{\theta_1^2}{2b_0^2} - \frac{2ac}{b_0^2}\bigg)\bigg] = O(\varepsilon^2).$$

Par ailleurs, d'après (3.3.7),

$$\lambda = \frac{\beta\big(Z_2 - \delta Z_1\big)}{\bigg(\varepsilon + \dfrac{Z_1\delta\varepsilon}{Z_2 - \delta Z_1} + Z_1\beta\bigg)\bigg(\varepsilon - \rho + \dfrac{Z_1\delta\varepsilon}{Z_2 - \delta Z_1} + Z_1\beta\bigg)}.$$

Comme $|\varepsilon - \rho| \geqslant \dfrac{1}{2}|\varepsilon|$ et $\big|Z_2 - \delta Z_1\big| \leqslant 1 + |\delta|$, on a que

$$|\lambda| = \frac{\big|(Z_2 - \delta Z_1)\big||\beta|}{\Big|\big(\varepsilon + O(|\delta\varepsilon|)\big)\big(\varepsilon - \rho + O(|\delta\varepsilon|)\big)\Big|} \leqslant \frac{|\beta|\big(1 + |\delta|\big)}{1/2|\varepsilon|^2}.$$

Donc si on a $\dfrac{|\beta|\big(1 + |\delta|\big)}{1/2|\varepsilon|^2} \leqslant \dfrac{1 - |\delta|}{1 + |\rho|}$ ou de façon équivalente

$$|\beta(\lambda)| \leqslant \frac{1 - |\delta|}{1 + |\rho|}.\frac{1}{1 + |\delta|}.\frac{1}{2}|\varepsilon|^2 < \frac{1}{2}|\varepsilon|^2,$$

il vient alors $|\lambda| \leqslant \dfrac{1-|\delta|}{1+|\rho|}$.

Posons $z_0 := \xi(0) = \dfrac{\delta\varepsilon}{Z_2-\delta Z_1}$. Comme $\dfrac{\log|\delta|}{\log|\varepsilon|} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, il vient $|\varepsilon| \ll |\delta|$. Donc $|\varepsilon|^2 \ll |\delta\varepsilon| \ll |\varepsilon|$. On en déduit donc que $|z_0| = \left|\dfrac{\delta\varepsilon}{Z_2-\delta Z_1}\right| \leqslant C_0(z)|\varepsilon| < 1$, pour ε, alors $|\delta|$ assez petit. Considérons maintenant un disque $D_0 := D(z_0; r_0)$, où $r_0 := \frac{1}{2}|\varepsilon|^2$.

Parce que, pour $\xi \in \overline{D_0}$, on a donc $|\zeta(\xi)| = |\varepsilon + Z_1\xi| \leqslant (|\varepsilon|+|\xi|) \leqslant (|\varepsilon|+C_0|\varepsilon|+1/2|\varepsilon|^2) \leqslant C_1|\varepsilon|$, où $C_0 := C_0(z)$ et $0 < C_1$ ne dépend pas de ε. Alors

$$\begin{aligned}\left|(\varepsilon+Z_1\xi)\frac{\rho-\varepsilon-Z_1\xi}{1-\bar\rho(\varepsilon+Z_1\xi)}\right| &\leqslant C_1|\varepsilon|.\frac{1/2|\varepsilon|+C_1|\varepsilon|}{\left|1-1/2C_1|\varepsilon|^2\right|}\\ &\leqslant C_1\frac{1/2+C_1}{|1-1/2C_1|}|\varepsilon|^2 \leqslant C_2|\varepsilon|^2,\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

où $0 < C_2$ est indépendante de ε. On en déduit, pour ε assez petit et $|\varepsilon| \leqslant \dfrac{1}{C_1}$, qu'il existe $\zeta(\xi) \in \mathbb{D}$ telle que $\Psi(\xi) = \varphi_\lambda\big(\zeta(\xi)\big)$. Par suite,

$$u_2(\xi) = u\big(\Psi(\xi)\big) = u\big(\varphi_\lambda\big(\zeta(\xi)\big)\big) = u_1\big(\zeta(\xi)\big) = u_1(\varepsilon+Z_1\xi).$$

De (3.3.5) et (3.3.9), on déduit que

$$\begin{aligned}u_1(\varepsilon+Z_1\xi) \leqslant G^{\mathbb{D}}_{0,\rho}(\varepsilon+Z_1\xi) &= \log\left|(\varepsilon+Z_1\xi)\frac{\rho-\varepsilon-Z_1\xi}{1-\overline{\rho}(\varepsilon+Z_1\xi)}\right|\\ &\leqslant \log|\varepsilon|^2+\log C_2.\end{aligned}$$

Pour tout $\xi \in \overline{D_0}$, puisque

$$||z_0|| = \frac{\big|\delta\varepsilon\big|}{\big|Z_2-\delta Z_1\big|} > \frac{|\varepsilon|^2}{\big|Z_2-\delta Z_1\big|} > \frac{1}{1+|\delta|}|\varepsilon|^2 > \frac{1}{2}|\varepsilon|^2 = r_0,$$

pour $|\varepsilon|$ assez petit qui dépend de z, il vient $\xi \neq 0$ et

$$u_3(\xi) = u_2(\xi) - \log|\xi| \leqslant \log|\varepsilon|^2 - \log|\xi| + \log C_2.$$

De plus, de $\big|\xi - \xi(0)\big| = |\beta(\lambda)| < 1/2|\varepsilon|^2$ et de $|\varepsilon\delta| \gg |\varepsilon|^2$, on déduit que

$$|\xi| \geqslant \frac{1}{\big|Z_2-\delta Z_1\big|}|\varepsilon\delta| - \frac{1}{2}|\varepsilon|^2 > \left(\frac{1}{\big|Z_2-\delta Z_1\big|}-\frac{1}{2}\right)|\delta\varepsilon| > 0,$$

(car $\big|Z_2-\delta Z_1\big| < 1+|\delta| < 2$). Alors

$$u_3(\xi) \leqslant \log|\varepsilon|^2 - \log|\varepsilon\delta| - \log\left(\frac{1}{\big|Z_2-\delta Z_1\big|}-\frac{1}{2}\right) + \log C_2,$$

pour tout $\xi \in \overline{D_0}$. Enfin,

$$u_3(\xi) \leqslant \log\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| + C_3,\ \text{où}\ C_3 := C_3(z) = -\log\left(\frac{1}{\big|Z_2-\delta Z_1\big|}-\frac{1}{2}\right) + \log C_2.\tag{3.3.10}$$

Ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.3.6. *Pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$ tel que $|z_2| \geqslant |z_1|$, $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) = \dfrac{3}{2}\log|z_2|$.*

Démonstration. Il résulte de la Proposition 3.3.1 (1) et de la proposition 3.3.3 que l'on a

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) \leqslant \frac{3}{2}\log|z_2| \leqslant \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z).$$

Donc la limite de $G_\varepsilon(z)$ existe et vaut $\dfrac{3}{2}\log|z_2|$, pour tout $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2\backslash\{0\}$ tel que $|z_2|>|z_1|$. D'où le résultat. □

D'après la Proposition 3.3.1 (2) et la Proposition 3.3.3, on a le résultat suivant :

Corollaire 3.3.7. *Pour tout $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$ telle que $|z_1|^2=|z_2|^{3/2}$, alors*

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) \leqslant \frac{5}{3}\log|z_1|.$$

Démonstration. Soit $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}^2$, $\zeta\mapsto(z_1,\zeta)$ un disque analytique de $\mathbb{D}$ à $\mathbb{D}^2$. Posons $u := G_\varepsilon\circ\varphi\in SH\_\big(\mathbb{D}\big)$. D'après la Proposition 3.3.1 (2) et la Proposition 3.3.3, pour tout $\zeta\in\mathbb{D}$, on a $u(\zeta)\leqslant 2\log|\zeta|$ si $|\zeta|\leqslant|z_1|^2$ et $u(\zeta)\leqslant\dfrac{3}{2}\log|\zeta|$ si $|\zeta|\geqslant|z_1|$.

Soit $U:=\big\{\zeta\in\mathbb{D}:|z_1|^2<|\zeta|<|z_1|\big\}$. On a donc $u(\zeta)\leqslant h(\zeta):=\log|z_1|+\dfrac{1}{2}\log|\zeta|\in H\_(U)$, pour tout $\zeta\in\partial U$. D'après le principe maximal, on a alors $u\leqslant h$ sur U. Il en résulte que $G_\varepsilon(z_1,z_2)=u(z_2)\leqslant\log|z_1|+\dfrac{1}{2}\log|z_2|$, pour tout $|z_1|^2<|z_2|<|z_1|$.

En particulier, en point $z=(z_1,z_2)\in U$ tel que $|z_1|^2=|z_2|^{3/2}$, on a alors

$$G_\varepsilon(z_1,z_2)\leqslant\log|z_1|+\frac{1}{2}\log|z_1|^{4/3}=\frac{5}{3}\log|z_1|,$$

d'où le résultat. □

3.4 Puissance des idéaux et méthode de Rashkovskii-Thomas

Dans la situation du Théorème 3.1.4 (ii), en utilisant les disques analytiques pour estimer la limite de la fonction de Green, nous ne trouvons que quelques bornes supérieures et bornes inférieures. Nous ne savons pas quelle est la limite de la fonction de Green dans le domaine $\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1|^2\leqslant|z_2|\leqslant|z_1|\}$. Dans cette section, nous introduisons une méthode de Rashkovskii-Thomas pour trouver la limite de la fonction de Green dans la situation du Théorème 3.1.4 (ii). Ceci est le résultat principal de la section ci-dessous, qui a déjà été montré dans [Ras-Tho12].

Théorème 3.4.1. *Soit Ω un domaine borné et hyperconvexe dans $\mathbb{C}^2$. Avec l'hypothèse du Théorème 3.1.4 (ii), il existe alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z)=\max\left(2\log|z_1|,\frac{3}{2}\log|z_2|\right)+O(1),$$

pour tout $z\in\Omega\backslash\{0\}$. En particulier, si $\Omega=\mathbb{D}^2$, on n'a pas besoin du terme $O(1)$ ci-dessus, c'est à dire, $\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z)=\max\big(2\log|z_1|,\frac{3}{2}\log|z_2|\big)$, pour tout $z\in\mathbb{D}^2\backslash\{0\}$.

Pour démontrer ce résultat, introduisons d'abord quelques notations nécessaires et méthode de Rashkovskii-Thomas [Ras-Tho12].

3.4.1 Puissance des idéaux et méthode de Rashkovskii-Thomas

Soit Ω un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$. Pour chaque $a \in \Omega$, soit $\big(\psi_{a,i}\big)_i$ un système (local) des générateurs d'un idéal $\mathcal{I}$, où $V\big(\mathcal{I}\big) \subset \Omega$ est un ensemble fini et $\ell\big(\mathcal{I}\big) < \infty$. Alors, d'après la Définition 1.1.10, la fonction de Green pluricomplexe associée à $\mathcal{I}$ est donnée par

$$G_{\mathcal{I}}(z) = \max_i \log|\psi_{a,i}| + O(1). \tag{3.4.1}$$

De (1.1.4), il suit que, pour toute puissance $\mathcal{I}^p$ de $\mathcal{I}$, où $p \in \mathbb{N}$,

$$G_{\mathcal{I}^p} = pG_{\mathcal{I}}.$$

De plus, pour des idéaux de longueur finie sur un domaine hyperconvexe borné, on peut toujours choisir des générateurs globaux $\psi_i \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si $V\big(\mathcal{I}\big) = \{0\}$, par la relation (3.4.1), la masse de Monge-Ampère de $G_{\mathcal{I}}$ à l'origine est égale à celle de la fonction $\frac{1}{2}\log\sum|\psi_i|^2$. Par la Proposition 1.1.13, on a donc

$$\big(dd^c G_{\mathcal{I}}\big)^n = e\big(\mathcal{I}\big)\delta_0. \tag{3.4.2}$$

Soit $0 \in \Omega$ et soit $\mathcal{I}_\varepsilon$ une famille d'idéaux de fonctions holomorphes sur Ω de longueur finie telle que $V\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Supposons que les puissances des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon^p$ convergent (au sens de la Définition 1.2.1) vers une limite $\mathcal{I}_{(p)}$ quelconque, pour $p = 1, 2, \ldots$. Il est clair que $V\big(\mathcal{I}_{(p)}\big) = \{0\}$.

Le point crucial pour la puissance d'idéal est l'observation simple suivante :

Proposition 3.4.2. *[Ras-Tho12, Proposition 4.1] Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{I}_{(p)} \cdot \mathcal{I}_{(q)} \subset \mathcal{I}_{(p+q)}. \tag{3.4.3}$$

La relation (3.4.3) implique précisément que $\{\mathcal{I}_{(p)}\}$ est une famille graduée d'idéaux. En particulier, cela implique que nous avons le contrôle sur la multiplicité de Hilbert-Samuel de la limite d'idéal de $\{\mathcal{I}_{(p)}\}$.

Proposition 3.4.3. *[Ras-Tho12, Proposition 4.3] Il existe la limite*

$$e\big(\mathcal{I}_\bullet\big) := \lim_{p\to\infty} p^{-n} e\big(\mathcal{I}_{(p)}\big) = \inf_{p\in\mathbb{N}} p^{-n} e\big(\mathcal{I}_{(p)}\big) = \limsup_{p\to\infty} n! p^{-n} \ell\big(\mathcal{I}_{(p)}\big).$$

La valeur $e\big(\mathcal{I}_\bullet\big)$ est dite le *volume* de la famille graduée d'idéaux $\mathcal{I}_\bullet$.

De la Proposition 3.4.2, il suit que

$$G_{\mathcal{I}_{(p)}\cdot\mathcal{I}_{(q)}} \leqslant G_{\mathcal{I}_{(p+q)}}. \tag{3.4.4}$$

On déduit de (3.4.4) un résultat de la convergence pour $G_{\mathcal{I}_{(p)}}$ quand $p \to \infty$. Plus précisément, posons

$$\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)} := \frac{1}{p} G_{\mathcal{I}(p)}. \tag{3.4.5}$$

Alors

Proposition 3.4.4. *[Ras-Tho12, Proposition 4.4] Il existe la limite*

$$V(z) = \lim_{p\to\infty} \widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}(z) = \sup_{p\in\mathbb{N}} \widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}(z), \tag{3.4.6}$$

et sa régularisation supérieure $G_{\mathcal{I}_\bullet}(z) = \limsup_{x\to z} V(x)$ est une fonction plurisousharmonique pour laquelle on a

$$\big(dd^c G_{\mathcal{I}_\bullet}\big)^n = e\big(\mathcal{I}_\bullet\big)\delta_0. \tag{3.4.7}$$

De plus, $\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)} \to G_{\mathcal{I}_\bullet}$ au sens de la convergence dans $L^p\big(\Omega\big)$, pour tout $p \in [1, n]$.

Par (3.4.1), puisque le produit des idéaux $\mathcal{I}_{(p)} \cdot \mathcal{I}_{(q)}$ est engendré par le produit des paires de leurs générateur, on obtient

$$G_{\mathcal{I}_{(p)} \cdot \mathcal{I}_{(q)}} = G_{\mathcal{I}_{(p)}} + G_{\mathcal{I}_{(q)}} + O(1).$$

Alors la fonction $G_{\mathcal{I}_{(p)}} + G_{\mathcal{I}_{(q)}}$ est dans la classe $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_{(p)} \cdot \mathcal{I}_{(q)}}$ qui est définie dans la Définition 1.1.10. Et l'inégalité (3.4.4) nous donne

$$G_{\mathcal{I}_{(p)}} + G_{\mathcal{I}_{(q)}} \leqslant G_{\mathcal{I}_{(p+q)}}. \tag{3.4.8}$$

Ceci entraîne que si $p = q$, alors $2G_{\mathcal{I}_{(p)}} \leqslant G_{\mathcal{I}_{(2p)}}$. Plus généralement, il est facile de démontrer un résultat suivant

Proposition 3.4.5. *(i) Pour tout $k, p \in \mathbb{N}$, alors $kG_{\mathcal{I}_{(p)}} \leqslant G_{\mathcal{I}_{(kp)}}$.*

(ii) Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \Omega$,

$$\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p \vee q)}}(z) \geqslant \max\Big(\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}}(z), \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(q)}}(z)\Big),$$

où $p \vee q := PPCM(p; q)$ (le plus petit commun multiple de deux entiers non nuls p et q).

Démonstration. (i) Tout d'abord, la relation (3.4.3) implique en particulier que $\mathcal{I}_{(p)}^k \subset \mathcal{I}_{(kp)}$, pour tout $k, p \in \mathbb{N}$. En appliquant (1.1.4), on obtient

$$kG_{\mathcal{I}_{(p)}} = G_{\mathcal{I}_{(p)}^k} \leqslant G_{\mathcal{I}_{(kp)}}. \tag{3.4.9}$$

Par conséquent, $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}} \leqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(kp)}}$.

(ii) Puisque $p \vee q = mp = nq$, où $m, n \in \mathbb{N}$, par la démonstration ci-dessus (3.4.9), on obtient $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p \vee q)}} = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(mp)}} \geqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}}$ et $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p \vee q)}} = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(nq)}} \geqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(q)}}$. On en déduit que

$$\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p \vee q)}}(z) \geqslant \max\Big(\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}}(z), \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(q)}}(z)\Big),$$

d'où le résultat. $\square$

Ensuite, soient Ω un domaine borné et hyperconvexe dans $\mathbb{C}^n$ et $\{\mathcal{I}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in A}$ une famille des idéaux de fonctions holomorphes qui s'annulent au points distincts $a_1(\varepsilon), \cdots, a_N(\varepsilon) \in \Omega$, où A est un ensemble dans le plan complexe tel que $0 \in \bar{A} \backslash A$. A. Rashkovskii et P. J. Thomas dans [Ras-Tho12, Proposition 4.9] ont alors démontré le résultat suivant.

Proposition 3.4.6. *Supposons que $a_j(\varepsilon) \to a \in \Omega$ et $\mathcal{I}_\varepsilon^p \to \mathcal{I}_{(p)}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ quand $A \ni \varepsilon \to 0$. Si la limite des fonctions de Green $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ associées aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe uniformément sur tout un compact de $\Omega \backslash \{a\}$, alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) = \limsup_{y \to z} \sup_{p \in \mathbb{N}} p^{-1} G_{\mathcal{I}_{(p)}}(y).$$

De plus, avec l'hypothèse de la Proposition 3.4.6, dans [Ras-Tho12, Proposition 4.10] on a aussi démontré que

Proposition 3.4.7. *S'il existe un entier non nul $p \in \mathbb{N}$ tel que la multiplicité de Hilbert-Samuel d'idéal $\mathcal{I}_{(p)}$ égale à $p^n N$, alors la limite des fonctions de Green $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ existe et vaut $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}} = \frac{1}{p} G_{\mathcal{I}_{(p)}}$.*

Remarquons que, l'hypothèse de la Proposition 3.4.7, $e\big(\mathcal{I}_{(p)}\big) = p^n N$, équivaut à la masse de Monge-Ampère de $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}}$ en 0 égale à N. De plus, dans le cas où $p = 1$ et la limite d'idéal $\mathcal{I}_{(1)}$ est un idéal d'intersection complète, puisque la multiplicité de Hilbert-Samuel d'idéal $e\big(\mathcal{I}_{(1)}\big) = N$, et puis par la Proposition 3.4.7, la limite des fonctions de Green $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ existe et vaut $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(1)}} = G_{\mathcal{I}}$. Nous retrouvons le résultat du Théorème 1.2.22.

Par ailleurs, il n'est pas toujours facile de calculer la multiplicité de Hilbert-Samuel d'idéal pour chaque $p \in \mathbb{N}$. Ensuite, dans la pratique, nous allons démontrer une condition plus facile que la Proposition 3.4.7.

Pour $\alpha = \big(\alpha_i\big)_i$ et $\beta = \big(\beta_j\big)_j$, où $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, posons que

$$F_{\alpha,\beta}(z) = \left(\sum_\alpha \alpha_i\psi_i, \sum_\beta \beta_j\psi_j\right) \in \mathcal{I}\times\mathcal{I},$$

pour $z \in \Omega$. Alors la multiplicité de $F_{\alpha,\beta}$,

$$mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big) = \lim_{r\to 0}\big(\max_{z\in B(0;r)} \# F^{-1}_{\alpha,\beta}(z)\big)$$

et la multiplicité de Hilbert-Samuel de $\mathcal{I}$

$$e\big(\mathcal{I}\big) = \inf_{\alpha,\beta}\big(mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big)\big).$$

Supposons maintenant qu'il existe la limite de la fonction de Green pluricomplexe $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ associée aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ et vaut $G_{\mathcal{I}_\bullet}$, uniformément sur tout un compact de $\Omega\backslash\{0\}$ et que, pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_\varepsilon^p \to \mathcal{I}(p)$. On a donc le résultat suivant

Proposition 3.4.8. *S'il existe $p \in \mathbb{N}$ et existe α, β tels que $mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big) = m \leqslant p^n N$, pour $F_{\alpha,\beta}(z) \in \mathcal{I}(p)\times\mathcal{I}(p)$ où $N = \# V\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$, alors la limite de la fonction de Green pluricomplexe $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ associée aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ est égale à $\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}$.*

Démonstration. Tout d'abord, on a besoin du principe de domination suivant

Lemme 3.4.9. *[Rash06, Lemme 6.3] Soient u_1 et u_2 deux solutions plurisousharmoniques du problème de Dirichlet : $\big(dd^c u\big)^n = \delta_0$, $u \mid_{\partial\Omega} \equiv 0$. Si l'on a $u_1 \geqslant u_2$ sur Ω, alors $u_1 \equiv u_2$.*

Comme $mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big) = m \leqslant p^n N$, il vient que la multiplicité de Hilbert-Samuel de $\mathcal{I}(p)$,

$$e\big(\mathcal{I}(p)\big) = \inf_{\alpha,\beta}\big(mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big)\big) \leqslant m \leqslant p^n N.$$

Alors

$$\big(dd^c\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}\big)^n = \frac{1}{p^n} e\big(\mathcal{I}(p)\big)\delta_0 \leqslant \frac{m}{p^n}\delta_0 \leqslant N\delta_0 = \big(dd^c G_{\mathcal{I}_\bullet}\big)^n.$$

Posons que $N' := \big(dd^c\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}\big)^n(0)$. Donc $N' \leqslant N$ et pour $z \in \Omega$,

$$\left(\frac{N}{N'}\right)^{1/n}\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}(z) =: g(z) \leqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}(z) \leqslant G_{\mathcal{I}_\bullet}(z).$$

Cela implique que

$$\big(dd^c g\big)^n = \frac{N}{N'}\big(dd^c\widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}\big)^n = N\delta_0 = \big(dd^c G_{\mathcal{I}_\bullet}\big)^n.$$

Du fait que $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}} \mid_{\partial\Omega} = 0 = G_{\mathcal{I}_\bullet} \mid_{\partial\Omega}$, d'après du Lemme 3.4.9 ci-dessus, on déduit que $g = G_{\mathcal{I}_\bullet}$ sur Ω. Parce que

$$g(z) \leqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}(p)}(z) \leqslant G_{\mathcal{I}_\bullet}(z),$$

pour $z \in \Omega$, il résulte que $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}} = G_{\mathcal{I}_\bullet}$ sur Ω et de plus $N' = N$. Par conséquent, $e\big(\mathcal{I}_{(p)}\big) = p^n N$. De la Proposition 3.4.7, on déduit le résultat. $\square$

Exemple 3.4.10. Soit $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (\varepsilon;0), a_2^\varepsilon = (0;\varepsilon), a_3^\varepsilon = (0;0)\}$ un système de trois points distincts dans le bidisque unité $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Il est facile de voir que

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \langle z_1z_2, z_1(z_1-\varepsilon), z_2(z_2-\varepsilon)\rangle \text{ converge vers l'idéal } \mathcal{I} = \mathfrak{M}_0^2 = \left\langle z_1^2, z_1z_2, z_2^2\right\rangle, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Pour $p = 2$, puisque l'idéal

$$\mathcal{I}_\varepsilon^2 = \left\langle z_1^2z_2, z_1^2(z_1-\varepsilon)^2, z_2^2(z_2-\varepsilon)^2, z_1^2z_2(z_1-\varepsilon), z_1z_2^2(z_2-\varepsilon), z_1z_2(z_1-\varepsilon)(z_2-\varepsilon)\right\rangle$$

contient la fonction $f^\varepsilon(z) = z_1z_2(z_1+z_2) - \varepsilon z_1z_2 = \varepsilon^{-1}[z_1^2z_2^2 - z_1z_2(z_1-\varepsilon)(z_2-\varepsilon)]$, on a $f(z) = z_1z_2(z_1+z_2) \in \mathcal{I}_{(2)}$. Il vient donc $\left\langle \mathfrak{M}_0^4, z_1z_2(z_1+z_2)\right\rangle \subset \mathcal{I}_{(2)}$. Parce que

$$\ell\big(\mathcal{I}_{(2)}\big) = \ell\big(\left\langle \mathfrak{M}_0^4, z_1z_2(z_1+z_2)\right\rangle\big) = 9.$$

Il en résulte que le carré de l'idéal $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\mathcal{I}_\varepsilon^2$ converge vers l'idéal $\mathcal{I}_{(2)}$ qui engendré par $\mathfrak{M}_0^4$ et la fonction $z_1z_2(z_1+z_2)$. Par ailleurs, il est évident que $z_1^4 + z_2^4 \in \mathcal{I}_{(2)}$. Posons

$$F_{\alpha,\beta}(z) = \big(z_1^4 + z_2^4, z_1z_2(z_1+z_2)\big) \in \mathcal{I}_{(2)} \times \mathcal{I}_{(2)}.$$

Alors $mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big) = 12 = 2^2 3$. De la Proposition 3.4.8, on déduit que la limite des fonctions de Green pluricomplexes $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ associée aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe et vaut $G_{\mathcal{I}_\bullet} = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}}$, où

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}} &= \frac{1}{2}G_{\mathcal{I}_{(2)}}(z)\\
&= \max\left\{2\log|z_1|, \frac{1}{2}\log|z_1^3z_2|, \log|z_1z_2|, \frac{1}{2}|z_1z_2^3|, 2\log|z_2|, \frac{1}{2}\log\big|z_1z_2(z_1+z_2)\big|\right\} + O(1).
\end{aligned}$$

Puisque nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
|z_1^3z_2| &\leqslant \frac{1}{2}\big(|z_1|^4 + |z_1^2z_2^2|\big),\\
|z_1z_2^3| &\leqslant \frac{1}{2}\big(|z_1|^4 + |z_1^2z_2^2|\big),\\
|z_1^2z_2^2| &\leqslant \frac{1}{2}\big(|z_1|^4 + |z_2^4|\big),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}} = \max\left\{2\log|z_1|, 2\log|z_2|, \frac{1}{2}\log\big|z_1z_2(z_1+z_2)\big|\right\} + O(1).$$

Remarquons que nous pouvons calculer la multiplicité de Hilbert-Samuel d'idéal $\mathcal{I}_{(2)}$ dans ce cas-là pour laquelle vaut la multiplicité des fonctions génériques $\big(f_1, f_2\big)$ pour $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_{(2)}$, qui est 12.

3.4.2 Preuve du résultat principal

Dans cette section, nous allons démontrer le Théorème 3.4.1. Tout d'abord, nous nous rappelons la situation du Théorème 3.1.4. Soit $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (0;0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon;0), a_3^\varepsilon = (\rho;\delta\rho)\}$ un système de trois points distincts dans $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, avec $\rho = \rho(\varepsilon), \delta = \delta(\varepsilon), |\varepsilon|^2 \geqslant |\varepsilon-\rho|^2 + |\rho|^2|\delta|^2 \geqslant |\rho|^2 + |\rho|^2|\delta|^2$, donc en particulier $|\varepsilon - \rho| \geqslant \frac{1}{2}|\varepsilon|$.

Posons $\alpha = \frac{\delta}{\rho-\varepsilon}$. Le Théorème 3.1.4 a démontré que $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \mathcal{I}_\varepsilon$ est un idéal d'intersection complète quand $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \alpha^{-1} \neq 0$, et que $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \mathcal{I}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0^2 = \left\langle z_1^2, z_1z_2, z_2^2\right\rangle$, quand $\lim_{\varepsilon\to 0}\ \alpha^{-1} = 0$. Dans ce cas-là, $\mathfrak{M}_0^2$ n'est pas un idéal d'intersection complète.

Les polynômes suivants sont dans $\mathcal{I}_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}Q_1^\varepsilon(z) &= z_1^2 - \varepsilon z_1 - \alpha^{-1}\delta z_2 \to z_1^2;\\ Q_2^\varepsilon(z) &= z_2(z_1-\rho) \to z_1z_2;\\ Q_3^\varepsilon(z) &= z_2(z_2-\delta\rho) \to z_2^2,\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$. Par suite, $\mathcal{I}_\varepsilon^2$ contient le polynôme

$$Q_1^\varepsilon(z)Q_3^\varepsilon(z) - \big(Q_2^\varepsilon(z)\big)^2 = -\alpha^{-1}\big(z_2^3 + \varepsilon\alpha z_1^2 z_2^2 + (1-\varepsilon)\delta\rho\alpha z_1^2 z_2 - 2\rho\alpha z_1 z_2^2 + \varepsilon\rho\alpha z_2^2\big).$$

Donc $z_2^3 \in \mathcal{I}_{(2)}$. Évidemment, $\mathfrak{M}_0^4 \subset \mathcal{I}_{(2)}$. Alors $J := \langle \mathfrak{M}_0^4, z_2^3\rangle \subset \mathcal{I}_{(2)}$. De plus, comme $\ell(J) = \ell\big(\mathcal{I}_{(2)}\big) = 9$, $\mathcal{I}_{(2)} = J$. Par ailleurs, il est facile de voir que

$$F_{\alpha,\beta}(z) = \big(z_1^4, z_2^3\big) \in \mathcal{I}_{(2)} \times \mathcal{I}_{(2)}$$

satisfait $mult\big(F_{\alpha,\beta}(z)\big) = 12 = 2^2 3$. En appliquant la Proposition 3.4.8, on déduit que la limite des fonctions de Green pluricomplexes $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ associée aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe et vaut $G_{\mathcal{I}_\bullet} = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}}$, où

$$\begin{aligned}\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}} &= \frac{1}{2}G_{\mathcal{I}_{(2)}}(z)\\ &= \max\left\{2\log|z_1|, \frac{1}{2}\log|z_1^3 z_2|, \log|z_1z_2|, \frac{1}{2}|z_1z_2^3|, 2\log|z_2|, \frac{3}{2}\log|z_2|\right\} + O(1).\end{aligned}$$

Comme $|z_2^4| \leqslant \frac{1}{2}\big(|z_2^3|^{\frac{5}{3}} + |z_2^3|\big) \leqslant \max\big(|z_2^3|^{\frac{5}{3}}, |z_2^3|\big)$, il vient

$$\log|z_2^4| \leqslant \max\big(\log|z_2^3|^{\frac{5}{3}}, \log|z_2^3|\big) = \log|z_2|^3 \text{ (car } \frac{5}{3}\log|z_2^3| < \log|z_2^3| < 0).$$

On en déduit que, pour tout $z \in \Omega\backslash\{0\}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_{S_\varepsilon}(z) = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}} = \max\left\{2\log|z_1|, \frac{3}{2}\log|z_2|\right\} + O(1).$$

Il reste à démontrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_{S_\varepsilon}(z) = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}} = \max\left\{2\log|z_1|, \frac{3}{2}\log|z_2|\right\}$, dans le cas où $\Omega = \mathbb{D}^2$. En effet, nous avons d'abord besoin de démontrer le résultat suivant

Proposition 3.4.11. *Soient G_1 et G_2 des fonctions plurisousharmoniques négatives et maximales sur $\mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$. Si l'on a que G_1, G_2 vérifient $G_1(z) = G_2(z) + O(1)$, $G_j(z) \to -\infty$ quand $z \to (0,0)$ et $G_j(z)\mid_{\partial\mathbb{D}^2} = 0$, pour $j = 1, 2$. Alors $G_1 = G_2$.*

Démonstration. Soit $c < 1$. On écrit, pour tout $z \in \mathbb{D}^2$,

$$G_1(z) = G_2(z) + M = c.G_2(z) + (1-c)G_2(z) + M,$$

où M est une constante. Comme $G_2(z) \to -\infty$ quand $z \to (0,0)$, il existe $\delta = \delta(c, M)$ telle que $(1-c)G_2(z) + M \leqslant 0$, pour tout $||z|| \leqslant \delta$. Il vient alors $G_1(z) \leqslant c.G_2(z)$ pour tout $||z|| \leqslant \delta(c,M), z \in \mathbb{D}^2$. D'où pour $||z|| = \delta' \leqslant \delta$, on a $G_1(z) \leqslant c.G_2(z)$ et de plus pour $||z|| = 1$, $G_1(z) = c.G_2(z) = 0$. Comme G_2 est la fonction plurisousharmonique maximale sur $\mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$, on déduit $G_1(z) \leqslant c.G_2(z)$ sur $\mathbb{D}^2\backslash\delta'\mathbb{D}^2$, pour tout $\delta' \leqslant \delta$. Donc pour tout $c < 1$, $G_1(z) \leqslant c.G_2(z)$ sur $\mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$. Il en résulte alors que $G_1(z) \leqslant G_2(z)$, pour tout $z \in \mathbb{D}^2$. On raisonne totalement de même manière pour la fonction G_1 plurisousharmonique maximale sur $\mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $G_2(z) \leqslant G_1(z)$, pour tout $z \in \mathbb{D}^2$. Alors $G_1 = G_2$ sur $\mathbb{D}^2$, d'où le résultat. $\square$

Ensuite, posons $h(z) := \max\left\{2\log|z_1|, \frac{3}{2}\log|z_2|\right\}$, pour tout $z \in \mathbb{D}^2\setminus\{(0,0)\}$. Puisque $h(z)\mid_{\partial\mathbb{D}^2}= 0$, les deux fonctions $\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}}$ et h satisfaient les hypothèses de Proposition 3.4.11. On en déduit que, pour tout $z \in \Omega\setminus\{0\}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_{S_\varepsilon}(z) = \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}} = \max\left\{2\log|z_1|, \frac{3}{2}\log|z_2|\right\},$$

d'où le résultat. $\square$

Chapitre 4

Limites des fonctions de Green pluricomplexes à quatre pôles

Dans ce chapitre, nous allons étudier la convergence des fonctions de Green pluricomplexes à quatre pôles distincts qui tendent vers l'origine dans le bidisque $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ dans le cas générique. Ensuite, nous allons étudier la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes sur la même base de quatre points dans le cas dégénéré. Enfin, en utilisant la notion de puissance des idéaux de fonctions holomorphes et la méthode de Rashkovskii-Thomas, nous donnons quelques estimations pour la limite des fonctions de Green pluricomplexes dans un cas particulier.

4.1 Limites des fonctions de Green pluricomplexes : le cas générique

4.1.1 Introduction

Soient Ω un domaine hyperconvexe borné dans $\mathbb{C}^2$ et $a_j^\varepsilon \in \Omega$, pour $\varepsilon \in \mathbb{C}$ et $1 \leqslant j \leqslant 4$ quatre points distincts tels que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_j^\varepsilon = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$. Posons que $S_\varepsilon := \{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon, a_4^\varepsilon\}$. Soient $\mathcal{I}_\varepsilon := \mathcal{I}_\varepsilon\big(S_\varepsilon\big)$ une famille d'idéaux de fonctions holomorphes sur Ω à base sur S_ε et $G_\varepsilon = G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ des fonction de Green pluricomplexe associées aux idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ avec pôle logarithmique dans S_ε.

Soient $v_{ij}^\varepsilon := [a_j^\varepsilon - a_i^\varepsilon] \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, où $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, des directions de droite qui passe deux points a_i^ε et a_j^ε. On suppose qu'il existe un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ tel que $0 \in \bar{A}\backslash A$ et qu'il existe $v_{ij} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0, \varepsilon\in A} v_{ij}^\varepsilon \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Pour la brièveté, on va écrire $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ pour signifier $\lim\limits_{\varepsilon\to 0, \varepsilon\in A}$. Posons

$$\mathcal{D}^\varepsilon = \mathcal{D}(S_\varepsilon) := \{v_{ij}^\varepsilon \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4\}$$

et

$$\mathcal{D} := \{v_{ij} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4\}.$$

Alors $1 \leqslant \#\mathcal{D} \leqslant 6$.

Dans le chapitre 1, par le Théorème 1.2.17, si la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)_{\varepsilon\in A}$ satisfait la condition d'intersection complète uniforme, alors $\mathcal{I}_\varepsilon$ converge vers un idéal $\mathcal{I}$. De plus, par le Théorème 1.2.22, si $\mathcal{I}$ est un idéal d'intersection complète (un idéal qui a précisément n générateurs), on a que $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ converge uniformément localement sur tout un compact de Ω vers $G_{\mathcal{I}}$. Dans le cas plus simple de 4 points distincts ($N = 4$) comme nos pôles dans $\Omega = \mathbb{D}^2$, le bidisque unité dans $\mathbb{C}^2$, trouvons-nous naturellement les conditions telles que la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)_{\varepsilon\in A}$ satisfait la condition d'intersection complète uniforme ? Pour cela, supposons que le système S_ε de 4 points distincts dans $\mathbb{D}^2$ satisfait la condition suivante : pour tout ensemble $\tilde{S}_\varepsilon$ de 3 points distincts dans S_ε, il existe une limite pour chaque direction dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ et l'ensemble de ces limites $\tilde{\mathcal{D}}$ satisfait

$$\#\tilde{\mathcal{D}} \geqslant 2. \tag{4.1.1}$$

Le résultat principal dans cette section est donc le suivant :

Théorème 4.1.1. *Supposons que le système S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait la condition (4.1.1). Alors si, pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$,*

$$\#\{v_{km} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C} : m \in \{1,2,3,4\}\backslash\{k\}\} \geqslant 2, \tag{4.1.2}$$

la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ satisfait la condition d'intersection complète uniforme.

En conséquence, la limite quand ε tend vers 0 de $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe et vaut J, avec $\mathfrak{M}_0^3 \subset J, \ell(J) = 4$. De plus, la fonction de Green pluricomplexe G_ε converge vers G_J, lorsque ε tend vers 0.

Remarque 4.1.2. Remarquons que la condition (4.1.1) ne implique pas de la condition (4.1.2). Par exemple, le système $S_\varepsilon = \{(0,0),(\varepsilon,0),(\varepsilon^2,\varepsilon^2),(\varepsilon^2,-\varepsilon^2)\}$ satisfait la condition (4.1.1), mais il ne satisfait pas la condition (4.1.2)). Inversement, la condition (4.1.2) ne implique pas de la condition (4.1.1). Par exemple, le système $S_\varepsilon = \{(0,0),(\varepsilon,0),(\varepsilon/3,\varepsilon^2),(\varepsilon/3,\varepsilon)\}$ satisfait la condition (4.1.2), mais il ne satisfait pas la condition (4.1.1). Donc ces deux hypothèses sont requises.

Soient $l_{ij}^\varepsilon, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$ les équations des droites de direction v_{ij}^ε dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ qui contiennent deux points $a_i^\varepsilon, a_j^\varepsilon$ et $l_{ij} := \lim_{\varepsilon\to 0} l_{ij}^\varepsilon, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Posons maintenant

$$\mathcal{L}^\varepsilon := \left\{f_1^\varepsilon := l_{12}^\varepsilon.l_{34}^\varepsilon; f_2^\varepsilon := l_{13}^\varepsilon.l_{24}^\varepsilon; f_3^\varepsilon := l_{14}^\varepsilon.l_{23}^\varepsilon\right\} \subset \mathcal{I}(S_\varepsilon).$$

et

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{v_{13}, v_{24}\} \cap \{v_{12}, v_{34}\},\\ A_2 &:= \{v_{13}, v_{24}\} \cap \{v_{14}, v_{23}\},\\ A_3 &:= \{v_{12}, v_{34}\} \cap \{v_{14}, v_{23}\}. \end{aligned}$$

Soit $f_j := \lim_{\varepsilon\to 0} f_j^\varepsilon$, pour $j = 1,2,3$. Il est facile de voir qu'il existe $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ telle que l'application holomorphe $\Psi_0 := \big(f_i, f_j\big)$ admette un zéro isolé unique à l'origine (c'est à dire, $\Psi_0^{-1}(0) = \{0\}$) si et seulement s'il existe $p \in \{1,2,3\}$ tel que $A_p = \emptyset$. De plus, s'il existe $k \in \{1,2,3,4\}$ tel que $\#\{v_{km} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C} : m \in \{1,2,3,4\}\backslash\{k\}\} = 1$ ou s'il existe un ensemble $\tilde{S}_\varepsilon$ de 3 points distincts dans S_ε tel que l'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ des limites de directions dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ satisfasse $\#\tilde{\mathcal{D}} = 1$, alors $\Psi_0^{-1}(0) \neq \{0\}$ pour tout $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$. Par conséquent, s'il existe $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ telle que l'application holomorphe $\Psi_0 := \big(f_i, f_j\big)$ admette un zéro isolé unique à l'origine, l'ensemble de S_ε satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1.

Corollaire 4.1.3. *Avec les hypothèses du Théorème 4.1.1, on a*

(i) La limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ existe et vaut

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \langle f_i, f_j\rangle\,,$$

pour tout $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ telle que l'application $\big(f_i, f_j\big)$ admette un zéro isolé unique à l'origine, et $\mathfrak{M}_0^3 \subset \mathcal{I}_0$.

(ii) De plus, pour tout $z \in \mathbb{D}^2$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z) = G_{\mathcal{I}_0}(z) = \max\big(\log\big|f_i(z)\big|, \log\big|f_j(z)\big|\big) + O(1) = 2\log\|z\| + O(1),$$

pour $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ et la convergence est localement uniforme sur $\Omega\backslash\{0\}$.

Remarque 4.1.4. On remarquera en particulier que si la limite $\mathcal{I}_0$ dépend des directions v_{ij}, la limite des fonctions de Green est toujours la même et ne dépend que du domaine Ω.

4.1.2 Preuve du résultat principal

Nous commencerons par donner un résultat d'encadrement sur les limites possibles d'idéaux basés sur quatre points qui est vrai dans un cadre plus général que le théorème 4.1.1.

Par l'hypothèse $\#\tilde{\mathcal{D}} \geqslant 2$, il vient $\#\mathcal{D} \geqslant 2$. On a le résultat suivant :

Proposition 4.1.5. *Si l'on a qu'il existe une limite pour chaque direction dans $\mathcal{D}(S_\varepsilon)$ et que l'ensemble de ces limites $\mathcal{D}$ satisfait $\#\mathcal{D} \geqslant 2$, alors $\mathfrak{M}_0^3 \subset \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon\in A} \inf \mathcal{I}_\varepsilon$. De plus, on a*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0,\varepsilon\in A} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}_0^2.$$

Démonstration. Tout d'abord, comme $\mathfrak{M}_0^3 = \langle z_1^3, z_1^2 z_2, z_1 z_2^2, z_2^3\rangle$, il suffira de montrer que chaque générateur de $\mathfrak{M}_0^3$ est approximable par des fonctions de $\mathcal{I}_\varepsilon$. De plus, cet idéal est invariant sous les applications linéaires inversibles. Comme $\#\mathcal{D} \geqslant 2$, il existe un indice $i \in \{1,2,3,4\}$ tel que $v_{ik} \neq v_{ik'}$, où $k \neq k'$ et $k,k' \in \{1,2,3,4\}\backslash\{i\}$. Sinon, pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ et pour tous $k,k' \in \{1,2,3,4\}\backslash\{i\}$, on aurait $v_{ik} = v_{ik'}$. Parce que, pour $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$, on a $v_{ij} = v_{ji}$. Donc, pour toute paire $(i,j) \neq (i',j'), i,j,i',j' \in \{1,2,3,4\}$, on a $v_{ij} = v_{i'j'}$. En effet, pour $i = 1$, on a $v_{12} = v_{13} = v_{14}$; pour $i = 2$, on a $v_{12} = v_{23} = v_{24}$; pour $i = 3$, on a $v_{13} = v_{23} = v_{34}$ et pour $i = 4$, on a $v_{14} = v_{24} = v_{34}$. Il vient alors $\#\mathcal{D} = 1$. Ce qui est contradictoire. On peut donc se ramener au cas où $v_{12} = [1:0], v_{13} = [0:1]$. On suppose que $a_1^\varepsilon = (x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon))$, où $x_j(\varepsilon) = o(1), j = 1,2$, pour tout $\varepsilon \in E$. Alors $a_2^\varepsilon - a_1^\varepsilon = (\rho_2(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ et $a_3^\varepsilon - a_1^\varepsilon = (\delta_3(\varepsilon), \rho_3(\varepsilon))$, où $\delta_j(\varepsilon) = o(\rho_j(\varepsilon))$, $j = 2,3$ pour tout $\varepsilon \in E$. Soit $a_4^\varepsilon - a_1^\varepsilon = (x_4(\varepsilon), y_4(\varepsilon))$ un point quelconque au voisinage de l'origine qui tends vers 0, quand $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in E$. Pour tout $\varepsilon \in E$, posons

$$\begin{aligned}\psi_1^\varepsilon &:= \left[z_1 - x_1(\varepsilon) - \frac{\delta_3(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon)}(z_2 - x_2(\varepsilon))\right]\left[z_1 - x_1(\varepsilon) - \rho_2(\varepsilon)\right]\\ &\quad \left[z_1 - x_1(\varepsilon) - x_4(\varepsilon)\right],\\ \psi_2^\varepsilon &:= \left[z_1 - x_1(\varepsilon) - \frac{\delta_3(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon)}(z_2 - x_2(\varepsilon))\right]\left[z_1 - x_1(\varepsilon) - \rho_2(\varepsilon)\right]\\ &\quad \left[z_2 - x_2(\varepsilon) - y_4(\varepsilon)\right],\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_3^\varepsilon &:= \left[z_1 - x_1(\varepsilon) - \frac{\delta_3(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon)}(z_2 - x_2(\varepsilon))\right]\left[z_2 - x_2(\varepsilon) - \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\rho_2(\varepsilon)}(z_1 - x_1(\varepsilon))\right]\\ &\quad \left[z_2 - x_2(\varepsilon) - y_4(\varepsilon)\right]\\ \psi_4^\varepsilon &:= \left[z_2 - x_2(\varepsilon) - \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\rho_2(\varepsilon)}(z_1 - x_1(\varepsilon))\right]\left[z_2 - x_2(\varepsilon) - \rho_3(\varepsilon)\right]\\ &\quad \left[z_2 - x_2(\varepsilon) - y_4(\varepsilon)\right],\end{aligned}$$

Alors toutes les fonctions $\psi_j^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant 4$, on a les convergences uniformes sur tout compact de Ω suivantes

$$\begin{aligned}z_1^3 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_1^\varepsilon \in \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \mathcal{I}_\varepsilon\\ z_1^2 z_2 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_2^\varepsilon \in \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \mathcal{I}_\varepsilon\\ z_1 z_2^2 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_3^\varepsilon \in \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \mathcal{I}_\varepsilon\\ z_2^3 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_4^\varepsilon \in \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \mathcal{I}_\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc on en déduit que $\mathfrak{M}_0^3 \subset \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon\in E} \inf \mathcal{I}_\varepsilon$.

Ensuite, comme $\#\mathcal{D} \geqslant 2$, il existe $i \in \{1,2,3,4\}$ tel que les deux vecteurs v_{ij}, v_{ik} soient indépendants dans $\mathcal{D}$, où $i \neq j \neq k, 1 \leqslant i,j,k \leqslant 4$. Sinon $\#\mathcal{D} = 1$. Par une translation, on peut toujours supposer que $a_1^\varepsilon = (0,0)$ et sans perte de généralité, s'il est nécessaire qu'on va renommer les points, supposons que $v_{12} \neq v_{13}$. En vertu du Théorème [Ma-Ras-Sig-Tho11, Théorème 1.12, i], on a alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}(\tilde{S}_\varepsilon) = \mathfrak{M}_0^2$, où $\tilde{S}_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon\}$. Parce que $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$. Il vient $\mathcal{I}(S_\varepsilon) \subset \mathcal{I}(\tilde{S}_\varepsilon)$. On en déduit que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}(\tilde{S}_\varepsilon) = \mathfrak{M}_0^2.$$

En conséquence, si l'on a $\#\mathcal{D} \geqslant 2$, alors

$$\mathfrak{M}_0^3 \subset \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}_0^2,$$

d'où le résultat. □

Remarque 4.1.6. Remarquons que la condition $\#\mathcal{D} \geqslant 2$ est suffisante mais pas nécessaire pour $\mathfrak{M}_0^3 \subset \liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}_0^2$. Nous avons le contre-exemple suivant : Pour le système de 4 points distincts dans Ω, $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (0,0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_3^\varepsilon = (\varepsilon/3, \varepsilon^2), a_4^\varepsilon = (\varepsilon/2, 2\varepsilon^2)\}$, puisqu'on a

$$z_1^3 = \lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(z) \in \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon,$$

où $P_\varepsilon(z) = \dfrac{\varepsilon}{21} z_2 + \dfrac{1}{21} z_1(z_1 - \varepsilon)\big(21 z_1 - \dfrac{5}{2}\varepsilon\big) \in \mathcal{I}_\varepsilon$ et

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \big[(z_1 - \varepsilon/2)\big(z_2 + 9/2 z_1(z_1-\varepsilon)\big) - 9/2 P_\varepsilon(z)\big] \in \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \\ z_2^2 &= \lim_{\varepsilon\to 0} (z_2 - 3\varepsilon z_1)\big(z_2 + 4\varepsilon(z_1 - \varepsilon)\big) \in \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon, \end{aligned}$$

alors $\mathcal{I}_0 = \langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3\rangle \in \liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$. Par suite, $\ell\big(\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\big) \leqslant \ell(\mathcal{I}_0) = 4$. Cela implique, en combinaison avec le Corollaire 2.1.6, qu'il existe la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3\rangle$. La conclusion de la Proposition 4.1.5 est donc valide dans le cas de S_ε, c'est à dire, $\mathfrak{M}_0^3 \subset \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subset \mathfrak{M}_0^2$, alors que $\#\mathcal{D} = 1$, car $\mathcal{D} = \{[1:0]\}$.

Nous allons maintenant montrer comment les hypothèses du Théorème permettent de prouver que Ψ_0 a un zéro isolé.

Proposition 4.1.7. *Le système S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1 si et seulement s'il existe $p \in \{1,2,3\}$ tel que $A_p = \emptyset$.*

Démonstration. Il est facile de voir que s'il existe $p \in \{1,2,3\}$ tel que $A_p = \emptyset$, c'est à dire, il existe $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ telle que l'application holomorphe $\Psi_0 := (f_i, f_j)$ admet un zéro isolé unique à l'origine, alors le système S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1. Inversement, il faut démontrer que si le système S_ε satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1, il existe alors $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ telle que la fonction holomorphe $\Psi_0 := (f_i, f_j)$ admet 0 qui est un zéro isolé unique, où $f_j := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_j^\varepsilon, j = 1,2,3$. En conséquence, $\{f_i, f_j\}$ est indépendante, pour cet (i,j).

En effet, par l'hypothèse $\#\tilde{\mathcal{D}} \geqslant 2$, considérons alors les deux cas suivants :

<u>Cas 1</u> : Pour tout ensemble de 3 points $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, il existe une limite pour chaque direction dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ et l'ensemble de ces limites satisfait

$$\#\tilde{\mathcal{D}} = 3. \tag{4.1.3}$$

Donc pour tout $\{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4\}, i \neq j \neq k$, on a que les directions v_{ij}, v_{jk}, v_{ki} sont distinctes, où $v_{ij} := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} v_{ij}^\varepsilon, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Il vient alors que pour tout $p \in \{1,2,3\}$, $A_p = \emptyset$. Donc $\{f_i, f_j\}$ indépendant, pour tout $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, où $f_j := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_j^\varepsilon, j = 1,2,3$. De plus, $f_i(z)$ et $f_j(z)$ sont des polynômes homogènes du second degré et satisfont $f_i(0) = f_j(0) = 0$, pour $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$. Donc $\Psi_0(0) = 0$. Par ailleurs, supposons qu'il existe un point $a \neq 0$ dans Ω tel que $\Psi_0(a) = 0$. Donc $f_i(a) = f_j(a) = 0$, pour $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$. Comme l_{ij}, l_{km} sont des polynômes homogènes du premier degré qui satisfaient $l_{ij}(0) = l_{km}(0) = 0$, pour $(i,j) \neq (k,m)$ et $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $1 \leqslant k < m \leqslant 4$, avec $\{i,j\} \cap \{k,m\} \neq \emptyset$. Donc si $l_{ij}(a) = l_{km}(a) = 0$, il vient $v_{ij} = v_{km}$. On en déduit qu'il existe $p \in \{1,2,3\}$ tel que $A_p \neq \emptyset$. Ce qui contredit (4.1.3). Par suite, pour tout $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, $\Psi_0^{-1}(0) = 0$ et 0 est un zéro isolé unique de Ψ_0.

Cas 2 : Supposons que l'ensemble S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1 et qu'il existe un ensemble S'_ε de 3 points distincts dans S_ε tel que l'ensemble $\mathcal{D}'$ des limites de directions dans $\mathcal{D}(S'_\varepsilon)$ satisfait $\#\mathcal{D}' = 2$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $S'_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon\} \subset S_\varepsilon$ et $v_{23} = v_{12} \neq v_{13}$. Il vient évidemment que $A_3 \neq \emptyset$. On va maintenant démontrer qu'il existe $p \in \{1,2\}$ tel que $A_p = \emptyset$. Supposons que $A_1 \neq \emptyset$. En raison de $v_{23} = v_{12} \neq v_{13}$ et de la condition (4.1.2), il résulte $v_{12} \neq v_{24}$. Par conséquent, il faut que $v_{34} = v_{13}$ ou $v_{34} = v_{24}$. On va en déduire que $A_2 = \emptyset$. Et alors $\{f_1, f_3\}$ sera indépendant.

On rappelle que $A_2 = \{v_{13}, v_{24}\} \cap \{v_{14}, v_{23}\}$. On vient de voir que $v_{23} \neq v_{24}$, et on a supposé $v_{23} \neq v_{13}$, donc $v_{23} \notin \{v_{13}, v_{24}\}$.

Supposons d'abord que $v_{34} = v_{13}$. Alors la conditions (4.1.1) implique que $v_{14} \neq v_{13} = v_{34}$. Supposons finalement, pour obtenir une contradiction, que $v_{14} = v_{24}$. Nous allons devoir prendre des coordonnées pour expliciter les dépendances entre les différents vecteurs.

En utilisant la translation $\Phi_\varepsilon(z) = z - a_1^\varepsilon$, nous pouvons supposer que $a_1^\varepsilon = 0 \in \mathbb{D}^2$, pour tout ε. Soient $\tilde{v}_{ij} \in \mathbb{C}^2$ telles que $||\tilde{v}_{ij}|| = 1$ et $[\tilde{v}_{ij}] = v_{ij} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Par l'hypothèse, parce que les directions $v_{23} = v_{12} \neq v_{13}$, on peut donc choisir une application linéaire inversible Φ telle que $[\Phi(\tilde{v}_{12})] = [1:0]$, $[\Phi(\tilde{v}_{13})] = [0:1]$. Par suite, on peut réduire le problème à la situation de $\Phi(S_\varepsilon)$, avec $\Phi(a_1^\varepsilon) = b_1^\varepsilon = (0,0)$, $\Phi(a_2^\varepsilon) = b_2^\varepsilon = (\rho_2(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon))$, $\Phi(a_3^\varepsilon) = b_3^\varepsilon = (\eta_3(\varepsilon), \rho_3(\varepsilon))$, et $\Phi(a_4^\varepsilon) = b_4^\varepsilon = (\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$ où toutes les coordonnées tendent vers 0 et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta_j(\varepsilon)/\rho_j(\varepsilon) = 0, j = 2, 3$. De plus, on désigne aussi $v_{ij} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$, qui est la limite de la direction v_{ij}^ε de la droite qui passe par les deux points b_i^ε et b_j^ε. Si l'on pose

$$\gamma(\varepsilon) := \frac{\rho_3(\varepsilon) - \eta_2(\varepsilon)}{\eta_3(\varepsilon) - \rho_2(\varepsilon)},$$

alors $v_{23}^\varepsilon = [1 : \gamma(\varepsilon)]$. Par suite, comme $v_{23} = v_{12} = [1:0]$, il vient $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \gamma(\varepsilon) = 0$. Cela implique que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho_3(\varepsilon)}{\rho_2(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\gamma(\varepsilon) - \frac{\eta_2(\varepsilon)}{\rho_2(\varepsilon)}}{\gamma(\varepsilon)\cdot\frac{\eta_3(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon)} - 1} = 0.$$

Si l'on a $v_{14} = v_{24}$, alors $[1:0] = v_{12} \neq v_{14} = v_{24} \neq v_{34} = [0:1]$. On peut donc supposer que $\beta/\alpha \to \ell \neq 0, \infty$. Considérons le rapport ρ_2/α, quand $\varepsilon \to 0$. D'abord, si $\|\rho_2/\alpha\| \leqslant C_2 < \infty$, lorsque $\varepsilon \to 0$ (ou même le long d'une suite $\varepsilon_k \to 0$), on a alors

$$\frac{\alpha - \eta_3}{\beta - \rho_3} = \frac{1 - \frac{\eta_3}{\rho_3}\cdot\frac{\rho_3}{\rho_2}\cdot\frac{\rho_2}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\rho_3}{\rho_2}\cdot\frac{\rho_2}{\alpha}} \to \ell \neq 0, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Ce qui contredit $\lim_{\varepsilon\to 0}[\alpha - \eta_3 : \beta - \rho_3] = v_{34} = v_{13} = [0:1]$. Ensuite, si $\alpha/\rho_2 \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$, alors

$$\frac{\beta - \eta_2}{\alpha - \rho_2} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\rho_2} - \frac{\eta_2}{\rho_2}}{\frac{\alpha}{\rho_2} - 1} \to 0, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Ce qui contredit $\lim_{\varepsilon\to 0}[\alpha - \rho_2 : \beta - \eta_2] = v_{24} = v_{14} \neq v_{12} = [1:0]$. Par conséquent, il faut que $v_{14} \neq v_{24}$. Autrement dit, $A_2 = \emptyset$.

Supposons maintenant que $v_{34} = v_{24}$. On montre de manière tout à fait analogue que $A_2 = \{v_{13}, v_{24}\} \cap \{v_{14}, v_{23}\} = \emptyset$. En effet, on a toujours $v_{23} \notin \{v_{13}, v_{24}\}$. Du fait de la condition (4.1.2) du Théorème 4.1.1, on a $v_{14} \neq v_{24} = v_{34}$. Supposons donc que $v_{14} = v_{13} = [0:1]$. Cela implique que $\alpha/\beta \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$. Considérons le rapport ρ_2/β quand $\varepsilon \to 0$. D'abord, si $0 < \|\rho_2/\beta\| \leqslant C_4 < \infty$, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a alors

$$\frac{\alpha - \eta_3}{\beta - \rho_3} = \frac{\alpha/\beta - \eta_3/\rho_3.\rho_3/\rho_2.\rho_2/\beta}{1 - \rho_3/\rho_2.\rho_2/\beta} \to 0, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Ce qui contredit $v_{34} = v_{24} \neq v_{23} = [0:1]$. Ensuite, si $\beta/\rho_2 \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$, donc

$$\frac{\beta - \eta_2}{\alpha - \rho_2} = \frac{\beta/\rho_2 - \eta_2/\rho_2}{\alpha/\beta.\beta/\rho_2 - 1} \to 0, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Ce qui contredit $v_{24} = v_{34} \neq v_{23} = [1:0]$. Par conséquent, il faut que $v_{14} \neq v_{13}$. Autrement dit, $A_2 = \emptyset$, ce qui achève le résultat. $\square$

Nous définissons maintenant un idéal $J_{6,\varepsilon} \subset \mathcal{I}_\varepsilon$ par $J_{6,\varepsilon} := \langle \psi_1^\varepsilon, \psi_2^\varepsilon, \psi_3^\varepsilon, \psi_4^\varepsilon \rangle$, où ψ_j^ε est défini comme dans la Proposition 4.1.5. Alors $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_{6,\varepsilon} = \mathfrak{M}_0^3$ uniformément sur tout un compact de Ω et de plus $\ell(J_{6,\varepsilon}) = \ell(\mathfrak{M}_0^3) = 6$, pour tout $\varepsilon \in E$ assez petit. Avec l'hypothèse de la Proposition 4.1.7, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1.8. *Supposons que l'ensemble S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1. Alors il existe la limite de $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = J$, où J est un idéal qui satisfait $\mathfrak{M}_0^3 \subset J$ et $l(J) = 4$.*

Démonstration. Tout d'abord, on va démontrer qu'il existe un idéal J tel que $l(J) = 4$ ($= N$ le nombre de points de $V(\mathcal{I}_\varepsilon)$) et $J \subseteq \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$, pour tout $\varepsilon \in A$. En effet, par l'hypothèse, de Proposition 4.1.7 on peut choisir $(i,j) \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, telle que $\{f_i, f_j\}$ est indépendant et que la fonction holomorphe $\Psi_0 := \big(f_i, f_j\big)$ admet 0 qui est un zéro isolé unique, où $f_j := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_j^\varepsilon, j = 1, 2, 3$. Sans perte de généralité, supposons que $(i,j) = (1,2)$. On a évidemment que $f_1 = l_{12}.l_{34}, f_2 = l_{13}.l_{24}$ sont des polynômes homogènes du second degré et satisfaient $f_1, f_2 \notin \mathfrak{M}_0^3$. Du fait que $\#\tilde{\mathfrak{D}} \geqslant 2$, donc $\#\mathfrak{D} \geqslant 2$. Il résulte de la proposition 4.1.5 que $\mathfrak{M}_0^3 \subset \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$. Alors l'idéal J engendré par $\{f_1, f_2, \mathfrak{M}_0^3\}$ est inclus dans $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$.

De plus, on a $\ell(\mathfrak{M}_0^3) = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{M}_0^3 = 6$ et $\dim J/\mathfrak{M}_0^3 = 2$ (car $\{f_1, f_2\}$ est indépendant et n'est pas contenu dans $\mathfrak{M}_0^3$). Donc

$$\begin{aligned} \ell(J) &= \dim \mathcal{O}/J = \dim(\mathcal{O}/\mathfrak{M}_0^3)/(J/\mathfrak{M}_0^3) \\ &= \dim \mathcal{O}/\mathfrak{M}_0^3 - \dim J/\mathfrak{M}_0^3 = 6 - 2 = 4. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.1.5, on a $\mathcal{J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$.

Nous allons toutefois montrer comment on peut aussi obtenir le résultat directement à partir du calcul de la limite supérieure.

Rappelons que on a évidemment $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subseteq \limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$. Pour finir cette seconde preuve de la Proposition 4.1.8, il suffit donc de démontrer le fait suivant :

Proposition 4.1.9. $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon \subseteq J$.

Démonstration. Pour toute fonction $h \in \limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$, par définition de $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$, il existe une suite h_ε dans $\mathcal{I}_\varepsilon$, où $\varepsilon \in E$ et $\varepsilon \to 0$, telle que h_ε converge vers h uniformément sur tout compact de Ω, quand $\varepsilon \to 0$. Pour la brièveté, on va écrire $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = h$. On va démontrer que $h \in J := \big\langle f_1, f_2, \mathfrak{M}_0^3 \big\rangle$.

En effet, tout d'abord on sait que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_{6,\varepsilon} = \mathfrak{M}_0^3$ et $\ell(J_{6,\varepsilon}) = \ell(\mathfrak{M}_0^3) = 6$, pour tout $\varepsilon \in E$ assez petit. On a

$$f_1^\varepsilon = l_{12}^\varepsilon.l_{34}^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon \text{ et } f_2^\varepsilon = l_{13}^\varepsilon.l_{24}^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon.$$

et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_1^\varepsilon = f_1$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_2^\varepsilon = f_2$. Puisque $\{f_1, f_2\}$ indépendant et $f_1, f_2 \notin \mathfrak{M}_0^3$, on a, pour ε assez petit, $\{f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon\}$ indépendant et $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon \notin J_{6,\varepsilon}$. Donc l'idéal $J_\varepsilon := \langle f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, J_{6,\varepsilon}\rangle \subset \mathcal{I}_\varepsilon$ et de plus, on a

$$\begin{aligned}\ell(J_\varepsilon) &= \dim \mathcal{O}/J_\varepsilon = \dim(\mathcal{O}/J_{6,\varepsilon})/(J_\varepsilon/J_{6,\varepsilon})\\ &= \dim \mathcal{O}/J_{6,\varepsilon} - \dim J_\varepsilon/J_{6,\varepsilon} = 6-2 = 4 = \ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big).\end{aligned}$$

Donc $J_\varepsilon = \mathcal{I}_\varepsilon$. On en déduit que pour chaque fonction $h_\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$, $\varepsilon \in A$ assez petit, on peut représenter h_ε par

$$h_\varepsilon = \alpha_\varepsilon f_1^\varepsilon + \beta_\varepsilon f_2^\varepsilon + \rho_\varepsilon, \text{ où } \rho_\varepsilon \in J_{6,\varepsilon}.$$

Posons $m_\varepsilon := \max\big(|\alpha_\varepsilon|, |\beta_\varepsilon|\big)$. Alors on a $|\alpha_\varepsilon|, |\beta_\varepsilon|$ bornés. En effet, sinon il existe un sous-ensemble $A' \subset A, \bar{A}' \ni 0$ tel que $m_\varepsilon \to +\infty$, quand $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in A'$. Dans les espaces $\mathcal{O}/J_{6,\varepsilon}$ et $\mathcal{O}/\mathfrak{M}_0^3$, on a

$$\frac{1}{m_\varepsilon}[h_\varepsilon]_{J_{6,\varepsilon}} = [\frac{\alpha_\varepsilon}{m_\varepsilon} f_1^\varepsilon]_{J_{6,\varepsilon}} + [\frac{\beta_\varepsilon}{m_\varepsilon} f_2^\varepsilon]_{J_{6,\varepsilon}}.$$

Quand $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in A'$, on a, en prenant les isomorphismes naturels entre espaces de dimension finie, que $[\frac{1}{m_\varepsilon} h_\varepsilon]_{J_{6,\varepsilon}}$ tend vers $0 \in \mathcal{O}/\mathfrak{M}_0^3$, et $[\frac{\alpha_\varepsilon}{m_\varepsilon} f_1^\varepsilon]_{J_{6,\varepsilon}} + [\frac{\beta_\varepsilon}{m_\varepsilon} f_2^\varepsilon]_{J_{6,\varepsilon}}$ tend vers $[\tilde\alpha f_1]_{\mathfrak{M}_0^3} + [\tilde\beta f_2]_{\mathfrak{M}_0^3}$, où $\frac{\alpha_\varepsilon}{m_\varepsilon}$ tend vers $\tilde\alpha$ et $\frac{\beta_\varepsilon}{m_\varepsilon}$ tend vers $\tilde\beta$. Comme

$$\max\big(|\tilde\alpha|, |\tilde\beta|\big) = \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon\in E'} \max\big(\frac{|\alpha_\varepsilon|}{m_\varepsilon}, \frac{|\beta_\varepsilon|}{m_\varepsilon}\big) = 1,$$

les fonctions holomorphes $\tilde\alpha, \tilde\beta$ sur Ω satisfont $\big(\tilde\alpha, \tilde\beta\big) \neq (0,0)$. On en déduit que $[\tilde\alpha f_1 + \tilde\beta f_2]_{\mathfrak{M}_0^3} = 0 \in \mathcal{O}/\mathfrak{M}_0^3$, c'est-à-dire $\tilde\alpha f_1 + \tilde\beta f_2 \in \mathfrak{M}_0^3$. Ce qui contredit le fait que les fonctions f_1, f_2 sont indépendantes sur $\mathfrak{M}_0^3$.

Comme $|\alpha_\varepsilon|, |\beta_\varepsilon|$ bornés, il résulte du théorème de Montel qu'il existe un sous-ensemble $A'' \subset A$ tels que α_ε converge vers α et β_ε converge vers β uniformément sur tout un compact de Ω, quand $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in A''$. Donc $\alpha_\varepsilon f_1^\varepsilon + \beta_\varepsilon f_2^\varepsilon$ converge vers $\alpha f_1 + \beta f_2$ et ρ_ε converge vers $\rho \in \mathfrak{M}_0^3$ uniformément sur tout un compact de Ω, quand $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in A''$. Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = \alpha f_1 + \beta f_2 + \rho =: h \in \big\langle f_1, f_2, \mathfrak{M}_0^3\big\rangle = J,$$

d'où le résultat. □

Ensuite, on va finir la preuve de la Proposition 4.1.8. En effet, d'après la démonstration précédente, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup \mathcal{I}_\varepsilon \subseteq J \subseteq \lim_{\varepsilon\to 0} \inf \mathcal{I}_\varepsilon.$$

On en déduit donc que la codimension

$$\ell\big(\lim_{\varepsilon\to 0} \sup \mathcal{I}_\varepsilon\big) \geqslant \ell(J) \geqslant \ell\big(\lim_{\varepsilon\to 0} \inf \mathcal{I}_\varepsilon\big).$$

Comme la codimension de $\ell\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) = N = 4$, il résulte de la Proposition 1.2.3 et de la Proposition 1.2.4 que $\ell\big(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup \mathcal{I}_\varepsilon\big) \leqslant N = 4$ et $\ell\big(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \inf \mathcal{I}_\varepsilon\big) \geqslant N = 4$. Il vient que le codimension

$$\ell\big(\lim_{\varepsilon\to 0} \sup \mathcal{I}_\varepsilon\big) = \ell\big(\lim_{\varepsilon\to 0} \inf \mathcal{I}_\varepsilon\big) = \ell(J) = 4$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf \mathcal{I}_\varepsilon = J = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup \mathcal{I}_\varepsilon.$$

Il suit que la limite de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$ existe, et vaut J. Ce qui achève le résultat. □

Enfin, nous allons finir la démonstration du Théorème 4.1.1. Pour cela, il faut démontrer que famille des idéaux $(\mathcal{I}_\varepsilon)$ satisfait la condition d'intersection complète uniforme dans la Définition 1.2.16. En conséquence, par le Théorème 1.2.17, on déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = G_{\mathcal{J}},$$

et la convergence est localement uniforme sur $\Omega\backslash\{0\}$.

En effet, par l'hypothèse, puisque le système S_ε satisfait les conditions (4.1.1) et (4.1.2), d'après la Proposition 4.1.7, choisissons $(i,j) \in \{(1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}$ telle que le système $\{f_i, f_j\}$ est indépendant et que la fonction holomorphe $\Psi_0 := \big(f_i, f_j\big)$ admet un zéro isolé unique à l'origine, où $f_j := \lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} f_j^\varepsilon, j = 1,2,3$. Sans perte de généralité, supposons que $(i,j) = (1,2)$ et $A_1 = \{v_{13}, v_{24}\} \cap \{v_{12}, v_{34}\} = \emptyset$. Posons $\Psi_\varepsilon := \big(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon\big)$, où $f_1^\varepsilon = l_{12}^\varepsilon . l_{34}^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$ et $f_\varepsilon = l_{13}^\varepsilon . l_{24}^\varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon$. Vérifions maintenant que la fonction Ψ_ε satisfait les conditions de la Définition 1.2.16. En effet, on a d'abord évidemment que Ψ_ε tend vers $\Psi_0 = (f_1, f_2)$ uniformément sur $\overline{\Omega}$, où $f_1 := l_{12}.l_{34},\ f_2 := l_{13}.l_{24}$. De plus, $\Psi_0(z)$ est une application holomorphe propre de Ω à $\Psi_0(\Omega)$.

En effet, on a $\Psi_0^{-1}\{0\} = \{0\}$ et 0 est un zéro isolé unique de Ψ_0. Parce qu'on ne considère que tout les points a_j^ε au voisinage de l'origine, il suffit de vérifier que $\Psi_0 \mid_\Omega : \Omega \longrightarrow \Psi_0(\Omega)$ est propre, où $\Omega := \Psi_0^{-1}\big(B\big)$, $B := B(0,1) = \{z \in \mathbb{C}^2 : ||z|| < 1\}$. Tout d'abord, comme Ψ_0 est continue, on a Ω est un ouvert et $0 \in \Omega$. De plus, Ω est borné. En effet, puisque 0 est un zéro isolé de Ψ_0, il exists $\delta_0 > 0$ tel que $||\Psi_0(z)|| > 0$ pour tout $0 < ||z|| < \delta_0$. Posons $\delta_1 := \min\{||\Psi_0(z)|| : ||z|| = \delta_0\} > 0$. Grâce à l'homogénéité de Ψ_0, on obtient donc, si $r > \dfrac{\delta_0}{\sqrt{\delta_1}}$, que $\delta := \min\{||\Psi_0(z)|| : ||z|| = r\}$ $= \left(\dfrac{r}{\delta_0}\right)^2 . \min\{||\Psi_0(z)|| : ||z|| = \delta_0\} = \left(\dfrac{r}{\delta_0}\right)^2 . \delta_1 > 1$. On veut montrer que $\Omega \subset B(0,r)$. En fait, pour tout $z \in \Omega$, on a $\Psi_0(z) \in B$. Donc $||\Psi_0(z)|| < 1$. Si $z \notin B(0,r)$, on a alors $||z|| \geqslant r$ et $||\Psi_0\big(r\dfrac{z}{||z||}\big)|| \geqslant \delta > 1$. Il vient que $||\Psi_0(z)|| > \dfrac{||z^2||}{r^2} \geqslant 1$. On aboutit à une contradiction. Alors Ω est borné. Par ailleurs, on a $\partial\Omega = \Psi_0^{-1}(\partial B)$. Or il est clair que $\partial\Omega \subset \Psi_0^{-1}(\overline{B})\backslash\Psi_0^{-1}(B) = \Psi_0^{-1}(\partial B)$ (car Ψ_0 est continue, on a $\overline{\Omega} \subset \Psi_0^{-1}(\overline{B})$ et de plus Ω est ouvert, donc $\partial\Omega \cap \Psi_0^{-1}(\overline{B}) = \partial\Omega\cap\Omega = \emptyset$). Inversement, on déduit de l'homogénéité de Ψ_0 que, pour tout $z \in \Psi_0^{-1}(\partial B)$, on a $||\Psi_0(tz)|| = t^2||\Psi_0(z)|| = t^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc, si $t < 1$, $\Psi_0(tz) \in B$. Ceci implique que $tz \in \Omega$. Alors $\lim\limits_{t\to 1, t<1} (tz) = z \in \overline{\Omega}$. Comme $||\Psi_0(z)|| = 1$, il vient que $\Psi_0(z) \notin B$ et que $z \notin \Omega$. D'où $z \in \overline{\Omega}\backslash\Omega = \partial\Omega$.

Soit K un compact dans $\Psi_0(\Omega)$, on va ensuite démontrer que

$$\big(\Psi_0 \mid_\Omega \big)^{-1}(K) = \big(\Psi_0\big)^{-1}(K) \cap\ \Omega$$

est compact dans Ω. Parce que $\Psi_0^{-1}(K)$ est fermé et Ω est borné, il est équivalent de montrer que $\big(\Psi_0\big)^{-1}(K)\cap\ \Omega$ est fermé dans $\mathbb{C}^2$. Or cela est équivalent à

$$\overline{\big(\Psi_0\big)^{-1}(K)\cap\ \Omega}\ \cap\ \partial\Omega = \emptyset.$$

Soit $p \in \overline{\big(\Psi_0\big)^{-1}(K)\cap\ \Omega}$ quelconque, il existe alors une suite $\{q_n\} \subset \big(\Psi_0\big)^{-1}(K)\cap\ \Omega$ telle que $q_n \longrightarrow p$. Comme K est fermé et la suite $\{\Psi_0(q_n)\} \subset K$, on a $\Psi_0(q_n) \longrightarrow \Psi_0(p) \in K \subset B$. Alors $||\Psi_0(p)|| < 1$. Supposons que $p \in \partial\Omega$, donc $p \in \Psi_0^{-1}(\partial B)$. On en déduit que $\Psi_0(p) \in \partial B$. Alors $||\Psi_0(p)|| = 1$. Ce qui est contradictoire. Donc $p \notin \partial\Omega$. D'où $\overline{\big(\Psi_0\big)^{-1}(K)\cap\ \Omega}\ \cap\ \partial\Omega = \emptyset$. L'application Ψ_0 est alors propre de Ω à $\Psi_0(\Omega)$.

En outre, parce qu'on a

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon^{-1}\big(\{0\}\big) &= \big((l_{12}^\varepsilon)^{-1}(0)\cap(l_{13}^\varepsilon)^{-1}(0)\big) \cup \big((l_{12}^\varepsilon)^{-1}(0)\cap(l_{24}^\varepsilon)^{-1}(0)\big)\\ &\cup \big((l_{34}^\varepsilon)^{-1}(0)\cap(l_{13}^\varepsilon)^{-1}(0)\big) \cup \big((l_{34}^\varepsilon)^{-1}(0)\cap(l_{24}^\varepsilon)^{-1}(0)\big),\end{aligned}$$

on en déduit clairement que $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, a_3^\varepsilon, a_4^\varepsilon\} = \Psi_\varepsilon^{-1}\big(\{0\}\big)$.

Ensuite, on veut montrer que pour tout $\varepsilon \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant 4$, il existe une constance $C(\varepsilon)$ telle que

$$\big|\log ||\Psi_\varepsilon(z)|| - \log ||z - a_j^\varepsilon||\big| \leqslant C(\varepsilon) < \infty,$$

pour tout z au voisinage de $a_j^\varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant 4$. En effet, comme Ψ_ε est dérivable, d'après la formule de Taylor, pour tout z au voisinage de a_1^ε, on a

$$\Psi_\varepsilon(z) = \Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon) + D\Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon)(z - a_1^\varepsilon) + o(||z - a_1^\varepsilon||).$$

Etant donné que le système $\{v_{12}, v_{13}\}$ est indépendant, $\{l_{12}^\varepsilon, l_{13}^\varepsilon\}$ est donc indépendant pour tout $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$. Ceci implique que la matrice Jacobienne de Ψ_ε en a_1^ε n'est pas dégénérée. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\det J\big(\Psi_\varepsilon\,|_{a_1^\varepsilon}\big) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1^\varepsilon}{\partial z_1}(a_1^\varepsilon) & \dfrac{\partial f_1^\varepsilon}{\partial z_2}(a_1^\varepsilon) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2^\varepsilon}{\partial z_1}(a_1^\varepsilon) & \dfrac{\partial f_2^\varepsilon}{\partial z_2}(a_1^\varepsilon) \end{vmatrix} \\
&= l_{34}^\varepsilon(a_1^\varepsilon).l_{24}^\varepsilon(a_1^\varepsilon). \begin{vmatrix} \dfrac{\partial l_{12}^\varepsilon}{\partial z_1}(a_1^\varepsilon) & \dfrac{\partial l_{12}^\varepsilon}{\partial z_2}(a_1^\varepsilon) \\[2ex] \dfrac{\partial l_{13}^\varepsilon}{\partial z_1}(a_1^\varepsilon) & \dfrac{\partial l_{13}^\varepsilon}{\partial z_2}(a_1^\varepsilon) \end{vmatrix} \\
&= M(\varepsilon) \neq 0.
\end{aligned}$$

Il existe donc l'application $\big(D\Psi_\varepsilon\big)^{-1}$ au voisinage de a_1^ε. Alors

$$||z - a_1^\varepsilon|| \leqslant ||\big(D\Psi_\varepsilon\big)^{-1}(a_1^\varepsilon)||.||D\Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon)(z - a_1^\varepsilon)||.$$

Quand z est près de a_1^ε, on a l'inégalité suivante

$$o(||z - a_1^\varepsilon||) \leqslant \frac{M(\varepsilon)}{2}||z - a_1^\varepsilon||$$

Posons $||\big(D\Psi_\varepsilon\big)^{-1}(a_1^\varepsilon)|| = m(\varepsilon) > 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\big|||D\Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon)(z - a_1^\varepsilon)|| - o(||z - a_1^\varepsilon||)\big| &\leqslant ||\Psi_\varepsilon(z) - \Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon)|| \\
&\leqslant ||D\Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon)(z - a_1^\varepsilon)|| + o(||z - a_1^\varepsilon||).
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\left|\frac{1}{m(\varepsilon)} - \frac{M(\varepsilon)}{2}\right| \leqslant \frac{||\Psi_\varepsilon(z) - \Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon)||}{||z - a_1^\varepsilon||} \leqslant M(\varepsilon) + \frac{M(\varepsilon)}{2} = \frac{3}{2}M(\varepsilon).$$

Posons $C_1(\varepsilon) = \max\left(\log\big|\dfrac{1}{m(\varepsilon)} - \dfrac{M(\varepsilon)}{2}\big|, \log\dfrac{3}{2}M(\varepsilon)\right)$. Notons que $\Psi_\varepsilon(a_1^\varepsilon) = 0$. Il vient alors

$$\big|\log ||\Psi_\varepsilon(z)|| - \log ||z - a_1^\varepsilon||\big| \leqslant C_1(\varepsilon) < +\infty.$$

Finalement, puisque nous avons vu que $A_1 = \{v_{12}, v_{34}\} \cap \{v_{13}, v_{24}\} = \emptyset$, les systèmes $\{v_{12}, v_{13}\}$, $\{v_{12}, v_{24}\}$, $\{v_{34}, v_{13}\}$ et $\{v_{34}, v_{24}\}$ sont indépendants. Alors on raisonne de manière tout à fait analogue que, pour chaque point $a_j^\varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant 4$, il existe une constance $C_j(\varepsilon)$, pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, telle que

$$\big|\log ||\Psi_\varepsilon(z)|| - \log ||z - a_j^\varepsilon||\big| \leqslant C_j(\varepsilon) < +\infty.$$

Posons $C(\varepsilon) = \max_j C_j(\varepsilon)$. On en déduit le résultat. □

Démonstration du Corollaire 4.1.3.

D'après le théorème 1.2.17, comme la famille des idéaux $\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big)$ satisfait les conditions d'intersection complète uniforme, il existe $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ telle que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \langle f_i, f_j\rangle =: \mathcal{I}_0$. De plus, d'après la Proposition 4.1.8, $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = J = \big\langle f_i, f_j, \mathfrak{M}_0^3\big\rangle$. Alors $\mathcal{I}_0 = J = \big\langle f_i, f_j, \mathfrak{M}_0^3\big\rangle$. D'où $\mathfrak{M}_0^3 \subset \mathcal{I}_0$.

En outre, du fait que $\mathcal{I}_0$ est un idéal d'intersection complète, en vertu du Théorème 1.2.22 et de [Ras-Sig05, Théorème 2.8, page 340], on déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon = G_{\mathcal{I}_0} = \max\big(\log\big|f_i(z)\big|, \log\big|f_j(z)\big|\big) + O(1),$$

pour tout $z \in \mathbb{D}^2$ et pour $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ et que la convergence est localement uniforme sur $\Omega\backslash\{0\}$. Ce qui achève le résultat. □

4.1.3 Exemples

Soit $\Omega = \mathbb{D}^2$ le bidisque unité dans $\mathbb{C}^2$ et soit S_ε un ensemble de quatre points distincts dans Ω qui tendent vers 0, lorsque ε tend vers 0.

Exemple 4.1.10.

Soit un système de quatre points distincts $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (0,0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon,0), a_3^\varepsilon = (0,\varepsilon^2), a_4^\varepsilon = (\varepsilon,\varepsilon^2)\}$. Pour tout ensemble de 3 points distincts $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, il existe une limite pour chacune des directions dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$, et l'ensemble de ces limites est $\tilde{\mathcal{D}} = \{[1:0],[0:1]\}$. L'ensemble S_ε satisfait alors les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1. Comme $\{f_1 = z_1^2, f_2 = z_2^2\}$ est indépendante, d'après le Théorème 4.1.1, il existe la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \big\langle f_1 = z_1^2, f_2 = z_2^2\big\rangle$ et il existe la limite de fonction de Green $G_\varepsilon(z)$. De plus, par la Proposition 3.4.11, comme la fonction $2\max\big(\log|z_1|, \log|z_2|\big)$ s'annule au bord,

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) = 2\max\big(\log|z_1|, \log|z_2|\big),$$

pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Remarquons que par la propriété multiplicative de la fonctions de Green pluricomplexes (voir le Lemme 3.3.2) et en combinaison avec le Lemme 1.1.7, comme $S_\varepsilon = \{0,\varepsilon\} \times \{0,\varepsilon^2\}$, pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(z) &= \max\big(G^{\mathbb{D}}_{\{0,\varepsilon\}}(z_1), G^{\mathbb{D}}_{\{0,\varepsilon^2\}}(z_2)\big) \\ &= \max\left(\log\left|z_1.\frac{z_1-\varepsilon}{1-\bar{\varepsilon}z_1}\right|, \log\left|z_2.\frac{z_2-\varepsilon^2}{1-\overline{\varepsilon^2}z_2}\right|\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) = 2\max\big(\log|z_1|, \log|z_2|\big),$$

pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Exemple 4.1.11.

Soit un système de quatre points distincts $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (0,0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon,0), a_3^\varepsilon = (0,\varepsilon^2), a_4^\varepsilon = (\varepsilon,\varepsilon)\}$. Comme pour tout un ensemble de 3 points distincts $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, il existe une limite pour une chaque direction dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$, et l'ensemble de ces limites est $\tilde{\mathcal{D}} = \{[1:0],[0:1]\}$ ou est $\tilde{\mathcal{D}} = \{[1:0],[0:1],[1:1]\}$. Par suite, l'ensemble de S_ε satisfait alors les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1, parce que $\{f_1 = z_2^2 - z_1z_2, f_2 = z_1^2\}$ est indépendante. D'après

Théorème 4.1.1, il existe donc la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \langle z_2^2 - z_1z_2, z_1^2\rangle$, et il existe la limite de fonction de Green $G_\varepsilon(z)$,

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) = \max\big(2\log|z_1|, \log|z_2^2 - z_1z_2|\big) + O(1),$$

pour tout $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Dans le cas générique où le système S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait la propriété : $\#\tilde{\mathcal{D}} = 3$, pour tout un sous ensemble $\tilde{S}_\varepsilon$ de 3 points dans S_ε, on a alors $A_p = \emptyset$, pour tout $p \in \{1,2,3\}$. Les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1 sont satisfaites. Nous avons d'abord un résultat suivant

Proposition 4.1.12. *Si pour tout un sous ensemble de 3 points $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, il existe une limite pour une chaque direction dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ et l'ensemble de ces limites $\tilde{\mathcal{D}}$ satisfait $\#\tilde{\mathcal{D}} = 3$. Alors*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_3\rangle .$$

Démonstration. En effet, en utilisant la translation $\Phi_\varepsilon(z) = z - a_1^\varepsilon$, nous pouvons supposer que $a_1^\varepsilon = 0 \in \mathbb{D}^2$, pour tout ε. Soient $\tilde{v}_{ij} \in \mathbb{C}^2$ telles que $||\tilde{v}_{ij}|| = 1$ et $[\tilde{v}_{ij}] = v_{ij} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Par l'hypothèse, parce que les directions v_{12}, v_{13}, v_{23} sont distincts, on peut choisir une application linéaire inversible Φ telle que $[\Phi(\tilde{v}_{12})] = [1:0]$, $[\Phi(\tilde{v}_{13})] = [0:1]$ et $[\Phi(\tilde{v}_{23})] = [-1:1]$. On peut donc réduire le problème à la situation de $\Phi(S_\varepsilon)$: $\Phi(a_1^\varepsilon) = b_1^\varepsilon = (0,0)$, $\Phi(a_2^\varepsilon) = b_2^\varepsilon = (\rho_2(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon))$, $\Phi(a_3^\varepsilon) = b_3^\varepsilon = (\eta_3(\varepsilon), \rho_3(\varepsilon))$, et $\Phi(a_4^\varepsilon) = b_4^\varepsilon = (\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$ où toutes les coordonnées tendent vers 0 et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta_j(\varepsilon)/\rho_j(\varepsilon) = 0, j = 2,3$. De plus, on désigne aussi $v_{ij} \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$, qui est la limite des directions v_{ij}^ε des droites qui passent par deux points b_i^ε et b_j^ε. Si l'on pose

$$\gamma(\varepsilon) := \frac{\eta_3(\varepsilon) - \rho_2(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon) - \eta_2(\varepsilon)},$$

alors $v_{23}^\varepsilon = [\gamma(\varepsilon):1]$. Par suite, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon) = -1$. Cela implique que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\rho_2(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{\dfrac{\eta_3(\varepsilon)}{\rho_3(\varepsilon)} - \gamma(\varepsilon)}{1 - \gamma(\varepsilon).\dfrac{\eta_2(\varepsilon)}{\rho_2(\varepsilon)}} = 1.$$

Supposons que $\alpha(\varepsilon)/\rho_2(\varepsilon) \to l$ et $\beta(\varepsilon)/\alpha(\varepsilon) \to t$, quand $\varepsilon \to 0$. Comme $\#\tilde{\mathcal{D}} = 3$, on a $l, t \neq 0, \infty$. Alors $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} v_{14}^\varepsilon = v_{14} = [1:t]$, $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} v_{24}^\varepsilon = v_{24} = \left[\dfrac{l-1}{t.l}:1\right]$ et $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} v_{34}^\varepsilon = v_{34} = \left[1 : t - \dfrac{1}{l}\right]$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
f_1 &= l_{12}.l_{34} = \big(t - \frac{1}{l}\big)z_1z_2 - z_2^2,\\
f_2 &= l_{13}.l_{24} = z_1^2 - \frac{l-1}{t.l}z_1z_2\\
f_3 &= l_{14}.l_{23} = -tz_1^2 + (1-t)z_1z_2 + z_2^2.
\end{aligned}$$

Parce qu'on a $-f_1 - t.f_2 = f_3$, alors

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_3\rangle ,$$

d'où le résultat. □

En conséquence, par le Théorème 4.1.1, nous avons le résultat suivant

Proposition 4.1.13. *Si l'ensemble S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait la propriété : $\#\tilde{\mathcal{D}} = 3$, pour tout sous ensemble $\tilde{S}_\varepsilon$ de 3 points dans S_ε, alors il existe la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \langle f_i, f_j\rangle\,,$$

pour tout $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, avec $\mathfrak{M}_0^3 \subset \mathcal{I}_0$. Et de plus, pour tout $z \in \mathbb{D}^2$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon = G_{\mathcal{I}_0} = \max\big(\log\big|f_i(z)\big|,\log\big|f_j(z)\big|\big) + O(1),$$

pour tout $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ et la convergence est localement uniforme sur $\Omega\backslash\{0\}$.

Démonstration. Par le Théorème 4.1.1 et le Corollaire 4.1.3. □

Exemple 4.1.14.

Soit un système de quatre points distincts $S_\varepsilon = \{a_1^\varepsilon = (\varepsilon,\varepsilon), a_2^\varepsilon = (\varepsilon,\varepsilon^2), a_3^\varepsilon = (0,\varepsilon), a_4^\varepsilon = (0,\varepsilon^2)\}$. L'ensemble des limites de toutes les directions dans $\mathcal{D}\big(S_\varepsilon\big)$ est donné par

$$\mathcal{D} = \big\{[1:0],[0:1],[1:1],[1:-1]\big\},$$

et satisfait $\#\mathcal{D} = 4$. Cependant, l'ensemble de S_ε satisfait alors la condition suivante : Pour tout l'ensemble de 3 points $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, l'ensemble des limites de toutes les directions dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ satisfait $\#\tilde{\mathcal{D}} = 3$. Par la Proposition 4.1.13, il existe donc la limite de la famille des idéaux, $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \big\langle f_1 = z_1^2, f_2 = z_2^2\big\rangle$, où $f_1(z) = \lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}f_1^\varepsilon(z) = \lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}(z_1-\varepsilon)^2$, $f_2(z) = \lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}f_2^\varepsilon(z) = \lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}(z_2-\varepsilon)(z_2-\varepsilon^2)$. De plus, en combinaison avec la Proposition 3.4.11, il existe alors la limite de fonction de Green $G_\varepsilon(z)$,

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}G_\varepsilon(z) = 2\max\big(\log|z_1|,\log|z_2|\big),$$

pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Remarquons que, dans l'exemple 4.1.14, en vertu du Lemme 1.1.7 et du Lemme 3.3.2, on peut retrouver la fonction de Green pluricomplexe $G_{S_\varepsilon}^{\mathbb{D}^2}(z)$ suivante : comme $S_\varepsilon = \{\varepsilon,0\}\times\{\varepsilon,\varepsilon^2\}$, pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(z) &= \max\big(G^{\mathbb{D}}_{\{\varepsilon,0\}}(z_1), G^{\mathbb{D}}_{\{\varepsilon,\varepsilon^2\}}(z_2)\big)\\ &= \max\left(\log\left|z_1.\frac{z_1-\varepsilon}{1-\bar{\varepsilon}z_1}\right|,\log\left|\frac{z_2-\varepsilon}{1-\bar{\varepsilon}z_2}\right| + \log\left|\frac{z_2-\varepsilon^2}{1-\overline{\varepsilon^2}z_2}\right|\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}G_{S_\varepsilon}(z) = 2\max\big(\log|z_1|,\log|z_2|\big),$$

pour tout $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{D}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Par ailleurs, nous avons encore le fait suivant

Proposition 4.1.15. *Si le système S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait la condition $\#\mathcal{D} \geqslant 5$, alors les conditions (4.1.1) et (4.1.2) du Théorème 4.1.1 sont satisfaites.*

Pour démontrer la Proposition 4.1.15, par la Proposition 4.1.13, il nous faut démontrer que le résultat suivant :

Proposition 4.1.16. *Supposons qu'il existe une limite pour chaque direction dans $\mathcal{D}^\varepsilon$ et que l'ensemble de ces limites $\mathcal{D}$ satisfait $\#\mathcal{D} \geqslant 5$. Alors pour tout $\tilde{S}_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ tel que $\#\tilde{S}_\varepsilon = 3$, on a que l'ensemble $\tilde{D}$ des limites de toutes les directions dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ satisfait $\#\tilde{D} = 3$.*

Démonstration. On pose $\tilde{S}_\varepsilon = \{a^\varepsilon_{i_1}, a^\varepsilon_{i_2}, a^\varepsilon_{i_3}, 1 \leqslant i \leqslant 4\} \subset S_\varepsilon$ et $v^\varepsilon_{i_j} := [a^\varepsilon_{i_k} - a^\varepsilon_{i_m}] \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ où $\{j,k,m\} = \{1,2,3\}, k,m \neq j, 1 \leqslant i \leqslant 4$. Supposons qu'il existe $E \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $0 \in \bar{E}$ et $v_{i_j} = \lim\limits_{E \ni \varepsilon \longrightarrow 0} v^\varepsilon_{i_j}, 1 \leqslant i \leqslant 4$. On a l'ensemble des directions $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon) = \{v^\varepsilon_{i_j}, j \in \{1,2,3\}, 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ converge vers $\tilde{D} = \{v_{i_j}, j \in \{1,2,3\}, 1 \leqslant i \leqslant 4\}$. Donc $\#\tilde{D} \leqslant 3$.

Si $\#\tilde{D} = 1$ (c'est-à-dire $v_{i_1} = v_{i_2} = v_{i_3}$), alors $\#\mathcal{D} \leqslant 4$.

Si $\#\tilde{D} = 2$, il existe donc deux directions distinctes. On peut supposer que $v_{i_1} = v_{i_3} \neq v_{i_2}$. En utilisant la translation $\Phi_\varepsilon(z) = z - a^\varepsilon_{i_1}$, nous pouvons supposer que $a^\varepsilon_{i_1} = 0$, pour tout ε. Soit $\tilde{v}_{i_j} \in \mathbb{C}^2$ telles que $||\tilde{v}_{i_j}|| = 1$ et $[\tilde{v}_{i_j}] = v_{i_j}, j \in \{1,2,3\}, 1 \leqslant i \leqslant 4$. Parce que $v_{i_1} = v_{i_3} \neq v_{i_2}$, on peut choisir une application linéaire inversible Φ telle que $[\Phi(\tilde{v}_{i_3})] = [1:0]$ et $[\Phi(\tilde{v}_{i_2})] = [0:1]$. On peut donc réduire la problème à la situation de $\Phi(S_\varepsilon)$: $\Phi(a^\varepsilon_{i_1}) = b^\varepsilon_1 = (0,0)$, $\Phi(a^\varepsilon_{i_2}) = b^\varepsilon_2 = (\rho_2(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon))$, $\Phi(a^\varepsilon_{i_3}) = b^\varepsilon_3 = (\eta_3(\varepsilon), \rho_3(\varepsilon)), \Phi(a^\varepsilon_{i_4}) = b^\varepsilon_4 = \big(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)\big)$, où toutes les coordonnées tendent vers 0 et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_j(\varepsilon)/\rho_j(\varepsilon) = 0, j = 2,3$. Posons $v^\varepsilon_{ij} := [b^\varepsilon_j - b^\varepsilon_i] \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} v^\varepsilon_{ij} = v_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Parce que $[1:0] = v_{23} = v_{12} \neq v_{13} = [0:1]$, si l'on pose

$$\gamma(\varepsilon) := \frac{\rho_3(\varepsilon) - \eta_2(\varepsilon)}{\eta_3(\varepsilon) - \rho_2(\varepsilon)},$$

alors $v^\varepsilon_{23} = [1 : \gamma(\varepsilon)]$. Donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \gamma(\varepsilon) = 0$. De plus, comme $\#\mathcal{D} \geqslant 5$, on obtient

$$\#\big(\mathcal{D}\backslash\{v_{23}\}\big) = 5. \tag{4.1.4}$$

Par ailleurs, comme les directions v_{12}, v_{13}, v_{14} sont distinctes, il vient $\lim_{\varepsilon \to 0} \beta(\varepsilon)/\alpha(\varepsilon) = \ell \neq 0, \infty$. Pour la brièveté, on va omettre l'indice ε.Considérons les comportements possibles du rapport α/ρ_2, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

•) Si $\alpha/\rho_2 \longrightarrow 1$, alors $\beta/\rho_2 = \beta/\alpha.\alpha/\rho_2 \longrightarrow \ell \neq 0, \infty$. Donc

$$\frac{\alpha - \rho_2}{\beta - \eta_2} = \frac{\alpha/\rho_2 - 1}{\beta/\rho_2 - \eta_2/\rho_2} \longrightarrow 0,$$

et $v_{24} = [0:1] = v_{13}$.

•) Si $\alpha/\rho_2 \longrightarrow 0$, alors $\beta/\rho_2 = \beta/\alpha.\alpha/\rho_2 \longrightarrow 0$. Donc

$$\frac{\beta - \eta_2}{\alpha - \rho_2} = \frac{\beta/\rho_2 - \eta_2/\rho_2}{\alpha/\rho_2 - 1} \longrightarrow 0,$$

et $v_{24} = [1:0] = v_{12}$.

•) Si $\rho_2/\alpha \longrightarrow 0$. Comme

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\rho_3}{\rho_2} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\gamma - \eta_2/\rho_2}{\gamma.\eta_3/\rho_3 - 1} = 0,$$

on a $\rho_3/\alpha = \rho_3/\rho_2.\rho_2/\alpha \longrightarrow 0$. Donc $\eta_3/\alpha = \eta_3/\rho_3.\rho_3/\alpha \longrightarrow 0$. On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\beta - \rho_3}{\alpha - \eta_3} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\beta/\alpha - \rho_3/\alpha}{1 - \eta_3/\alpha} = \ell,$$

et alors $v_{34} = v_{14}$.

•) Si $0 < C_1 \leqslant ||\rho_2/\alpha|| \leqslant C_2 < \infty$ (ρ_2/α borné), donc $\rho_3/\alpha = \rho_3/\rho_2.\rho_2/\alpha \longrightarrow 0$ et $\eta_3/\alpha = \eta_3/\rho_3.\rho_3/\alpha \longrightarrow 0$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\beta - \rho_3}{\alpha - \eta_3} = \ell,$$

et alors $v_{34} = v_{14}$.

En conclusion, dans tous les cas, on a démontré que $\#\mathcal{D} \leqslant 4$ ce qui contredit (4.1.4). Donc $\#\tilde{D} = 3$. Ce qui achève le résultat. □

Exemple 4.1.17.

Soit $\Omega = \mathbb{D}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : ||z_j|| < 1, j = 1, 2\}$ le bidisque unité dans $\mathbb{C}^2$, et $\mathcal{I}_\varepsilon$ une famille d'idéaux basés sur quatre points distincts $a_j^\varepsilon, j = 1, 2, 3, 4$ au voisinage de l'origine dans Ω.

Si nous prenons un système de quatre points distincts

$$S_\varepsilon := \{a_1^\varepsilon = (0, 0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_3^\varepsilon = (0, \varepsilon), a_4^\varepsilon = (2\varepsilon, -2\varepsilon)\},$$

alors l'ensemble des limites de toutes les directions dans $\mathcal{D}^\varepsilon$ est donné par

$$\mathcal{D} = \{[1 : 0], [0 : 1], [1 : -1], [1 : -2], [2 : -3]\},$$

et satisfait $\#\mathcal{D} = 5$. Alors, d'après le Théorème 4.1.1, il existe la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ et existe la limite de fonction de Green pluricomplexe G_ε, lorsque ε tend vers 0. Comme $\#\big(\mathcal{D}\backslash\{v_{14}\}\big) = 5$, choisissons la fonction $\Psi_\varepsilon(z) = \big(f_1^\varepsilon(z), f_2^\varepsilon(z)\big)$, où

$$f_1^\varepsilon = l_{12}^\varepsilon . l_{34}^\varepsilon = z_2\big(3z_1 + 2(z_2 - \varepsilon)\big) \in \mathcal{I}_\varepsilon,$$

et

$$f_2^\varepsilon = l_{13}^\varepsilon . l_{24}^\varepsilon = z_1\big(2(z_1 - \varepsilon) + z_2\big) \in \mathcal{I}_\varepsilon.$$

On a évidemment que Ψ_ε tend vers $\Psi_0 = (g, f)$ uniformément sur $\overline{\Omega}$, où

$$f_1 := l_{12}.l_{34} = 3z_1z_2 + 2z_2^2, \ f_2 := l_{13}.l_{24} = 2z_1^2 + z_1z_2.$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \left\langle 3z_1z_2 + 2z_2^2, 2z_1^2 + z_1z_2 \right\rangle.$$

Il est clair que $\mathfrak{M}_0^3 \subset \mathcal{I}_0$. De plus, il existe la limite de fonction de Green pluricomplexe à pôle dans S_ε,

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) = G_{\mathcal{I}_0}(z) = \max\{\log|3z_1z_2 + 2z_2^2|, \log|2z_1^2 + z_1z_2|\} + O(1),$$

et la convergence est localement uniforme sur $\Omega\backslash\{0\}$.

Remarquons que pour un autre système S_ε de quatre points distincts qui admet le même ensemble de limites de toutes les directions, $\mathcal{D} = \{[1 : 0], [0 : 1], [1 : -1], [1 : -2], [2 : -3]\}$, par exemple,

$$S_\varepsilon := \{a_1^\varepsilon = (0, 0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon + \varepsilon^2, \varepsilon^2), a_3^\varepsilon = (\varepsilon^2, \varepsilon + \varepsilon^2), a_4^\varepsilon = (2\varepsilon + \varepsilon^2, -2\varepsilon + \varepsilon^2)\},$$

on a donc la même limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ et la même limite de fonction de Green pluricomplexe à pôle dans S_ε.

Si nous prenons un autre système de quatre points distincts

$$S_\varepsilon := \{a_1^\varepsilon = (0, 0), a_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), a_3^\varepsilon = (0, \varepsilon), a_4^\varepsilon = (3\varepsilon, 2\varepsilon)\},$$

on a l'ensemble des limites de toutes les directions dans $\mathcal{D}^\varepsilon$ est donné par

$$\mathcal{D} = \{[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1], [-1 : 1], [3 : 2], [3 : 1]\}.$$

et il satisfait $\#\mathcal{D} = 6$. D'après le Théorème 4.1.1, il existe alors la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ et la limite des fonctions de Green pluricomplexes G_ε, lorsque ε tend vers 0. Il est facile de calculer de manière analogue qu'on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_0 = \left\langle z_1z_2 - 3z_2^2, z_1^2 - z_1z_2 \right\rangle.$$

et la limite des fonctions de Green pluricomplexes

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} G_\varepsilon(z) = G_{\mathcal{I}_0}(z) = \max\{\log|z_1z_2 - 3z_2^2|, \log|z_1^2 - z_1z_2|\} + O(1).$$

4.2 Limites de la famille des idéaux de fonctions holomorphes : les cas dégénérés

4.2.1 Introduction

Dans le cas dégénéré où le système S_ε de 4 points distincts dans Ω ne satisfait pas les conditions (4.1.1) et (4.1.2), supposons que la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes sur Ω existe, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}$, alors $\mathcal{I}$ n'est pas un idéal d'intersection complète.

Les résultats principaux dans cette section sont les suivants :

Théorème 4.2.1. *Supposons que le système S_ε de 4 points distincts dans Ω satisfait la condition (4.1.1). Alors s'il existe $i \in I := \{1,2,3,4\}$ tel que*

$$\#\big\{v_{ij} \in \mathbb{CP}^1 : j \in I\backslash\{i\}\big\} = 1, \tag{4.2.1}$$

alors, après changement de variables linéaire, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_0 := \big\langle z_1z_2, z_2^2, z_1^3\big\rangle$, et par le Théorème 1.2.22, on en déduit que la fonction de Green pluricomplexe G_ε ne converge pas vers

$$G_{\mathcal{I}_0}(z) = \max\big\{\log|z_1z_2|, 2\log|z_2|, 3\log|z_1|\big\} + O(1).$$

Ensuite, si le système S_ε ne satisfait pas le conditions (4.1.1), en raison de Proposition 4.1.16, l'ensemble $\mathcal{D}$ de limites des directions dans $\mathcal{D}\big(S_\varepsilon\big)$ satisfait donc $\#\mathcal{D} \leqslant 4$. Dans le cas où $2 \leqslant \#\mathcal{D} \leqslant 4$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. *Si l'on a un système S_ε de 4 points distincts dans $\mathbb{D}^2$ qui satisfait la condition suivante : il existe un sous-système $\tilde{S}_\varepsilon$ de trois points distincts dans S_ε tel que l'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ des limites de toutes les directions dans $\mathcal{D}(\tilde{S}_\varepsilon)$ satisfait*

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{v = [1:0]\} \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}. \tag{4.2.2}$$

Alors

(i) Si $\#\mathcal{D} \geqslant 3$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_0 := \big\langle z_1z_2, z_2^2, z_1^3\big\rangle$.

(ii) Si $\#\mathcal{D} = 2$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un des idéaux $\mathcal{I}_0$ ou $\mathcal{J}_0$ ou $\mathcal{I}_1$ définis dans la Proposition 4.2.5.

De plus, dans le cas où $\#\mathcal{D} = 1$, on va supposer comme ci-dessus que $\mathcal{D} = \{[1:0]\}$ et on a alors pour tout sous-système $\tilde{S}_\varepsilon$ de trois points distincts dans S_ε,

$$\#\tilde{\mathcal{D}} = 1. \tag{4.2.3}$$

Dans ce cas-là, posons

$$\widehat{S}_j^\varepsilon := S_\varepsilon\backslash\{a_j^\varepsilon\} \subset \Omega \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

En raison de (4.2.3), le Théorème 3.1.4 implique qu'il existe une limite d'idéal $\mathcal{I}\big(\tilde{S}_\varepsilon\big)$, pour tout un sous-système $\tilde{S}_\varepsilon$ de trois points distincts dans S_ε,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(\tilde{S}_\varepsilon\big) = \mathcal{J}(m),$$

où $m \in \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et l'idéal $\mathcal{J}(m)$ est défini par

$$\mathcal{J}(m) := \begin{cases} \big\langle z_2 - mz_1^2, z_1^3\big\rangle \text{ si } m \in \mathbb{C} \\ \mathfrak{M}_0^2 = \big\langle z_1^2, z_1z_2, z_2^2\big\rangle \text{ si } m = \infty. \end{cases}$$

Posons, pour $1 \leqslant j \leqslant 4$,

$$\widehat{\mathcal{I}}_j := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(\widehat{S}_j^\varepsilon\big).$$

Nous avons alors la condition suivante pour l'existence de la limite des idéaux $\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$:

Proposition 4.2.3. *Supposons qu'il existe $m_1, m_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, $m_1 \neq m_2$ tels que $\widehat{\mathcal{I}}_i = \mathcal{J}(m_1)$ et que $\widehat{\mathcal{I}}_j = \mathcal{J}(m_2)$, où $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Alors la limite des idéaux $\mathcal{I}(S_\varepsilon)$ existe et vaut*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{I}_0 := \langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3 \rangle .$$

4.2.2 Preuve du Théorème 4.2.1

Nous posons d'abord

$$\mathcal{I}_* := \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) \text{ et } \mathcal{I}^* := \limsup_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon).$$

Ensuite, en utilisant la translation $\Phi_\varepsilon(z) = z - a_1^\varepsilon$, nous pouvons toujours supposer que $a_1^\varepsilon = 0 \in \Omega$, pour tout ε. Parce que $\#\tilde{\mathcal{D}} \geqslant 2$, pour tout ensemble $\tilde{S}_\varepsilon$ de 3 points dans S_ε, alors $\#\mathcal{D} \geqslant 2$. Donc, sans perte de généralité, supposons que $v_{12} \neq v_{13}$. Parce que le système S_ε satisfait le condition (4.2.1), sans perte de généralité, on peut donc supposer qu'il existe $i = 2$ tel que $v_{12} = v_{23} = v_{24}$. Dans ce cas-là, on va démontrer d'abord, que $\#\mathcal{D} \geqslant 3$. En effet, supposons que $\#\mathcal{D} = 2$, donc $\mathcal{D} = \{v_{12}, v_{13}\}$. Considérons les deux vecteurs v_{14} et v_{34}. Comme $\#\mathcal{D} = 2$, on a alors trois cas suivants

•) Si $v_{14} = v_{12}$, il vient $v_{12} = v_{14} = v_{24}$. Ce qui contredit alors l'hypothèse (4.1.1).

•) Si $v_{34} = v_{12}$, il vient $v_{23} = v_{34} = v_{24}$. Ce qui contredit donc l'hypothèse (4.1.1).

•) Si $v_{14} = v_{34} = v_{13}$, notre situation contredit l'hypothèse (4.1.1).

Par conséquent, $\#\mathcal{D} \geqslant 3$. Ensuite, comme $v_{12} \neq v_{13}$, choisissons une application linéaire inversible $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ telle que

$$[\Phi(\tilde{v}_{12})] = [1:0] \text{ et } [\Phi(\tilde{v}_{13})] = [0:1],$$

où $\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_{13} \in \mathbb{C}^2$ sont tels que $\|\tilde{v}_{12}\| = \|\tilde{v}_{13}\| = 1$ et que $[|\tilde{v}_{12}] = v_{12}$, $[|\tilde{v}_{13}] = v_{13}$. Alors

$$\Phi(S_\varepsilon) = S'_\varepsilon = \{b_1^\varepsilon = (0,0), b_2^\varepsilon, b_3^\varepsilon, b_4^\varepsilon\},$$

qui satisfait $v_{12} = [1:0] \neq v_{13} = [0:1]$. Soit $l_{ij}^\varepsilon(z)$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, les équations des droites qui passent par les deux points b_i^ε et b_j^ε. Alors $\lim_{\varepsilon \to 0} l_{12}^\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} l_{14}^\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} l_{24}^\varepsilon(z) = z_2$ et $\lim_{\varepsilon \to 0} l_{13}^\varepsilon(z) = z_1$. Cela implique que

$$z_1 z_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} l_{13}^\varepsilon(z) l_{24}^\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*,$$

et que

$$z_1^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} l_{13}^\varepsilon(z) \left[z_1 - z_1(b_2^\varepsilon)\right] \left[z_1 - z_1(b_4^\varepsilon)\right] \in \mathcal{I}_*.$$

Alors $\langle z_1 z_2, z_1^3 \rangle \subset \mathcal{I}_*$. Si $\#\mathcal{D} \geqslant 3$, il existe $(i,j) \in \{(2,3),(3,4)\}$ tel que le vecteur v_{ij}^ε tend vers $[1:t]$, où $t \neq 0, \infty$. Donc $\lim_{\varepsilon \to 0} l_{ij}^\varepsilon(z) = z_2 - t z_1 \in \mathcal{I}_*$. Cela implique que

$$z_2^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(l_{ij}^\varepsilon(z) l_{km}^\varepsilon(z) + t l_{13}^\varepsilon(z) l_{24}^\varepsilon(z) \right) \in \mathcal{I}_*,$$

où $k, m \in I \backslash \{i,j\}, 1 \leqslant k < m \leqslant 4$. Enfin, on a $\mathcal{I}_0 := \langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3 \rangle \subset \mathcal{I}_*$, avec $\ell(\mathcal{I}_0) = 4$. On en déduit, d'après le Corollaire 2.1.6, que $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{I}_0$. Ce qui achève la preuve. $\square$

4.2.3 Preuve du Théorème 4.2.2

Afin de démontrer les résultats du Théorème 4.2.2, nous allons d'abord démontrer le fait facile suivant

Proposition 4.2.4. *Soit S_ε un système des 4 points distincts qui tendent vers l'origine lorsque $\varepsilon \to 0$. Soit $\Phi_\varepsilon : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ une application holomorphe inversible telle que Φ_ε converge vers Φ_0 uniformément et Φ_0 est inversible. Supposons qu'il existe $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{I}_0$. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{I}\big(\Phi_\varepsilon\big(S_\varepsilon\big)\big) = \mathcal{I}_0 \Phi_0^{-1} = \big\{ f \circ \Phi_0^{-1} \mid f \in \mathcal{I}_0 \big\}.$$

Démonstration. Soient $f_\varepsilon \in \mathcal{I}(S_\varepsilon)$ telles que f_ε converge vers f_0 uniformément lorsque ε tend vers 0. Alors $f_\varepsilon\mid_{S_\varepsilon} = 0$. Comme

$$\Big(f_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1} \Big) \big(\Phi_\varepsilon\big(S_\varepsilon\big)\big) = f_\varepsilon\big(S_\varepsilon\big) = 0,$$

il vient $f_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{I}\big(\Phi_\varepsilon\big(S_\varepsilon\big)\big)$ et de plus $f_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1}$ converge vers $f_0 \circ \Phi_0^{-1}$ uniformément lorsque ε tend vers 0. Il en résulte que $f_0 \circ \Phi_0^{-1} \in \mathcal{I}_0 \Phi_0^{-1}$. D'où le résultat. □

Ensuite, on a besoin du résultat suivant :

Proposition 4.2.5. *Soit $S_\varepsilon = \{(0,0), (\varepsilon, 0), (\rho, \delta\rho), (0, \beta)\}$ quatre points distincts dans Ω qui tendent vers 0, lorsque ε tend vers 0, où $\rho := \rho(\varepsilon), \delta := \delta(\varepsilon), \beta := \beta(\varepsilon)$ et $0 < |\rho| \leqslant \frac{1}{2}|\varepsilon|$, $|\varepsilon| \ll |\beta|$. Alors*

i) Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\delta}{\rho - \varepsilon} = m \neq \infty$, il existe donc la limite de $\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_0 := \left\langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3 \right\rangle.$$

ii) Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\delta}{\varepsilon} = \infty$, on a les deux cas suivants

ii.1) S'il existe $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\rho - \varepsilon}{\delta\beta} = k \notin \{0, \infty\}$, il existe alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{J}_0 := \left\langle z_1 z_2, z_1^2 + k z_2^2, z_1^3 \right\rangle.$$

ii.2) S'il existe $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\rho - \varepsilon}{\delta\beta} = k \in \{0, \infty\}$, il existe alors la limite de $\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$ et vaut $\mathcal{I}_0$, si $k = \infty$ et vaut $\mathcal{I}_1 := \left\langle z_1 z_2, z_1^2, z_2^3 \right\rangle$, si $k = 0$.

Démonstration. Par l'hypothèse, parce que $|\varepsilon| \ll |\beta|$, alors

$$z_1 z_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \big(z_2 - \rho z_1\big)\big[z_1 + \frac{\varepsilon}{\beta} z_2 - \varepsilon\big] \in \mathcal{I}_*,$$

et

$$z_1^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} z_1 (z_1 - \rho)(z_1 - \varepsilon) \in \mathcal{I}_*.$$

On a donc $\left\langle z_1 z_2, z_1^3 \right\rangle \subset \mathcal{I}_*$. De plus,

i) Comme $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\delta}{\rho - \varepsilon} = m \neq \infty$ et le polynôme

$$Q_\varepsilon(z) := \frac{\delta\varepsilon}{\rho - \varepsilon}(\delta\rho - \beta) z_1 - \beta z_2 - \frac{\delta}{\rho - \varepsilon}(\delta\rho - \beta) z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big),$$

il vient $z_2^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} Q_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*$. Alors l'idéal $\mathcal{I}_0 := \langle z_1z_2, z_2^2, z_1^3\rangle \subset \mathcal{I}_*$. Comme $\ell(\mathcal{I}_0) = 4$, on obtient $\ell(\mathcal{I}_*) \leqslant \ell(\mathcal{I}_0) = 4$. Par la Proposition 2.1.5, on en déduit qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{I}_0$.

ii) Comme, par l'hypothèse, $0 < |\rho| \leqslant \frac{1}{2}|\varepsilon|$, on a $\frac{|\varepsilon|}{2} \leqslant |\rho - \varepsilon| \leqslant |\varepsilon|$. Par suite, si $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta}{\varepsilon} = \infty$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho-\varepsilon}{\delta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\delta} = 0$. Considérons les deux cas suivants :

ii.1) Supposons qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho-\varepsilon}{\delta\beta} = k \notin \{0, \infty\}$. Considérons le polynôme

$$P_\varepsilon(z) := -\varepsilon z_1 + \frac{\rho-\varepsilon}{\delta\beta}\frac{\beta}{\frac{\delta\rho}{\beta}-1} z_2 + z_1^2 - \frac{\rho-\varepsilon}{\delta\beta}\frac{1}{\frac{\delta\rho}{\beta}-1} z_2^2. \tag{4.2.4}$$

Il est facile de vérifier que $P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}(S_\varepsilon)$. De plus, comme $|\delta\rho| \ll |\rho| \leqslant \frac{1}{2}|\varepsilon| \ll |\beta|$, il vient $\frac{\delta\rho}{\beta} \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$. Il en résulte que

$$z_1^2 + kz_2^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*.$$

Alors l'idéal $\mathcal{J}_0 := \langle z_1z_2, z_1^2 + kz_2^2, z_1^3\rangle \subset \mathcal{I}_*$. Or $[z_1^2] = [z_1^2 + kz_2^2] - k[z_2^2] = -k[z_2^2] \in \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{J}_0$, donc $\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{J}_0 = \langle [1], [z_1], [z_2], [z_2^2]\rangle$. Il vient alors $\ell(\mathcal{J}_0) = 4$, donc $\ell(\mathcal{I}_*) \leqslant \ell(\mathcal{J}_0) = 4$. À l'aide de la Proposition 2.1.5, on en déduit qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{J}_0$.

ii.2) Supposons qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho-\varepsilon}{\delta\beta} = k \in \{0, \infty\}$. De (4.2.4), considérons alors le polynôme

$$R_\varepsilon(z) := \frac{\delta\beta}{\varepsilon}\big(\frac{\delta\rho}{\beta} - 1\big)\frac{\varepsilon}{\rho-\varepsilon}\varepsilon z_1 - \beta z_2 - \frac{\delta\beta}{\varepsilon}\big(\frac{\delta\rho}{\beta} - 1\big)\frac{\varepsilon}{\rho-\varepsilon} z_1^2 + z_2^2.$$

Il est facile de vérifier que $P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}(S_\varepsilon)$. Si $k = \infty$, donc $|\delta\beta| \ll |\rho - \varepsilon| \ll |\delta|$. On déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta\beta}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta\beta}{\rho-\varepsilon}\frac{\rho-\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$$

Il en résulte alors que

$$z_2^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*.$$

Alors l'idéal $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_*$. Comme $\ell(\mathcal{I}_0) = 4$, on a $\ell(\mathcal{I}_*) \leqslant \ell(\mathcal{I}_0) = 4$. En combinaison avec la Proposition 2.1.5, il existe alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{I}_0$.

Enfin, si $k = 0$, donc $|\rho - \varepsilon| \ll |\delta\beta| \ll |\delta|$. De (4.2.4), on déduit que

$$z_1^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*.$$

De plus,

$$z_2^3 = \lim_{\varepsilon\to 0} z_2(z_2 - \delta\rho)(z_2 - \beta) \in \mathcal{I}_*.$$

Il vient alors $\mathcal{I}_1 := \langle z_1z_2, z_1^2, z_2^3\rangle \subset \mathcal{I}_*$. Comme $\ell(\mathcal{I}_1) = 4$, on a $\ell(\mathcal{I}_*) \leqslant \ell(\mathcal{I}_1) = 4$. Par la Proposition 2.1.5, on en déduit qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}(S_\varepsilon) = \mathcal{I}_1$. Si l'on échange les axes, $\Phi(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(\Phi(S_\varepsilon)\big) = \mathcal{I}_1 \circ \Phi^{-1} = \mathcal{I}_0.$$

D'où le résultat. □

Démonstration du Théorème 4.2.2.

En utilisant la translation $\Phi_\varepsilon(z) = z - a_1^\varepsilon$, nous pouvons toujours supposer que $a_1^\varepsilon = 0 \in \Omega$, pour tout ε. Par l'hypothèse, de $\#\mathcal{D} \geqslant 2$, sans perte de généralité, supposons donc que $v_{12} \neq v_{13}$. Choisissons maintenant une application linéaire inversible $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ telle que

$$[\Phi(\tilde{v}_{12})] = [1:0] \text{ et } [\Phi(\tilde{v}_{13})] = [0:1],$$

où $\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_{13} \in \mathbb{C}^2$ tels que $\|\tilde{v}_{12}\| = \|\tilde{v}_{13}\| = 1$ et que $[\tilde{v}_{12}] = v_{12}$, $[\tilde{v}_{13}] = v_{13}$. Alors

$$\Phi\big(S_\varepsilon\big) = S'_\varepsilon = \{b_1^\varepsilon = (0,0), b_2^\varepsilon, b_3^\varepsilon, b_4^\varepsilon\},$$

qui satisfait $v_{12} = [1:0] \neq v_{13} = [0:1]$.

Ensuite, comme le système S_ε satisfait le condition (4.2.2), sans perte de généralité, on peut supposer que $v_{12} = v_{14} = v_{24} = v = [1:0]$. Soit $l_{ij}^\varepsilon(z)$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, les équations des droites qui passent par les deux points b_i^ε et b_j^ε. Donc $\lim_{\varepsilon\to 0} l_{12}^\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} l_{14}^\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} l_{24}^\varepsilon(z) = z_2$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} l_{13}^\varepsilon(z) = z_1$. Cela implique que

$$z_1 z_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} l_{13}^\varepsilon(z) l_{24}^\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*,$$

et que

$$z_1^3 = \lim_{\varepsilon\to 0} l_{13}^\varepsilon(z)\big[z_1 - z_1(b_2^\varepsilon)\big]\big[z_1 - z_1(b_4^\varepsilon)\big] \in \mathcal{I}_*.$$

Alors $\langle z_1 z_2, z_1^3\rangle \subset \mathcal{I}_*$.

(i) Si $\#\mathcal{D} \geqslant 3$, il existe $(i,j) \in \{(2,3),(3,4)\}$ tel que le vecteur v_{ij}^ε tend vers $[1:t]$, où $t \neq 0, \infty$. Donc $\lim_{\varepsilon\to 0} l_{ij}^\varepsilon(z) = z_2 - t z_1 \in \mathcal{I}_*$. Cela implique que

$$z_2^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \big(l_{ij}^\varepsilon(z) l_{km}^\varepsilon(z) + t l_{13}^\varepsilon(z) l_{24}^\varepsilon(z)\big) \in \mathcal{I}_*,$$

où $k, m \in I\backslash\{i,j\}, 1 \leqslant k < m \leqslant 4$. Alors l'idéal $\mathcal{I}_0 := \langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3\rangle \subset \mathcal{I}_*$. Comme $\ell(\mathcal{I}_0) = 4$, on a $\ell\big(\mathcal{I}_*\big) \leqslant \ell(\mathcal{I}_0) = 4$. On déduit de la Proposition 2.1.5 qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_0$.

(ii) Si $\#\mathcal{D} = 2$, considérons donc deux vecteurs v_{23} et v_{34}. Alors il existe $(i,j) \in \{(2,3),(3,4)\}$ tel que le vecteur v_{ij}^ε tend vers $v_{ij} = [1:0]$. Sinon, il faut que $v_{23} = v_{34} = [0:1]$.

Supposons tout d'abord qu'il existe $(i,j) \in \{(2,3),(3,4)\}$ tel que $v_{ij} = [1:0]$. Donc $\lim_{\varepsilon\to 0} l_{ij}^\varepsilon(z) = z_2$. Cela implique que

$$z_2^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} l_{ij}^\varepsilon(z) l_{km}^\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_*,$$

où $k, m \in I\backslash\{i,j\}, 1 \leqslant k < m \leqslant 4$. Dans ces cas-là, on a alors $\mathcal{I}_0 := \langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3\rangle \subset \mathcal{I}_*$. Comme $\ell\big(\mathcal{I}_0\big) = 4$, on a $\ell\big(\mathcal{I}_*\big) \leqslant \ell(\mathcal{I}_0) = 4$. Par la Proposition 2.1.5, on en déduit qu'il existe $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_0$.

Ensuite, considérons le cas où $v_{23} = v_{34} = [0:1]$. On a alors $v_{13} = v_{23} = v_{34} = [0:1]$ et $v_{12} = v_{14} = v_{24} = [1:0]$. Comme les trois points $b_1^\varepsilon, b_2^\varepsilon, b_4^\varepsilon$ tendent vers l'origine selon une même direction, on peut, d'après [Du-Tho11], paramétrer le système S'_ε tel que $|\varepsilon| = \|b_2^\varepsilon - b_1^\varepsilon\|$ et choisir une coordonnée qui dépend de ε telle que $b_1^\varepsilon = (0,0), b_2^\varepsilon = (\varepsilon, 0), b_4^\varepsilon = \big(\rho(\varepsilon), \delta(\varepsilon)\rho(\varepsilon)\big)$, où $0 < |\rho(\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{2}|\varepsilon|$ et $\delta(\varepsilon) \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$. De plus, supposons que $b_3^\varepsilon = \big(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)\big)$. Comme $v_{13}^\varepsilon = [\alpha(\varepsilon) : \beta(\varepsilon)] \to [0:1]$, on obtient $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)} = 0$. Pour la brièveté, on va écrire $\rho = \rho(\varepsilon), \delta = \delta(\varepsilon), \alpha = \alpha(\varepsilon), \beta = \beta(\varepsilon)$. Pour δ assez petit, posons

$$\tilde{\delta} := \frac{\delta}{1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\delta}$$

et

$$\tilde{\rho} := \rho\big(1 - \frac{\alpha}{\beta}\delta\big).$$

Donc $\tilde{\delta}, \tilde{\rho}$ tendent vers 0, lorsque ε tend vers 0. De plus,

$$\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\rho}-\varepsilon} = \frac{\delta/(\rho-\varepsilon)}{\left(1-\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\delta\rho}{\rho-\varepsilon}\right)(1-\dfrac{\alpha}{\beta}\delta)},$$

donc s'il existe $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta}{\rho-\varepsilon} = m$, il existe $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\rho}-\varepsilon} = m$. Considérons maintenant l'application holomorphe inversible

$$\Phi_{1,\varepsilon} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ z \mapsto \Phi_{1,\varepsilon}(z) = \left(z_1 - \frac{\alpha}{\beta}z_2, z_2\right),$$

Donc $\Phi_{1,\varepsilon}\big(S'_\varepsilon\big) = S_{1,\varepsilon} = \big\{(0,0),(\varepsilon,0),(\tilde{\rho},\tilde{\delta}\tilde{\rho}),(0,\beta)\big\} \in \mathbb{D}^2$. Comme $v_{23} = [0:1]$ et $v_{13} = [0:1]$, il vient $|\alpha-\varepsilon| \ll \frac{1}{2}|\beta|$ et $|\alpha| \ll \frac{1}{2}|\beta|$. Cela implique que $|\varepsilon| \leqslant |\alpha-\varepsilon| + |\alpha| \ll |\beta|$. D'après la Proposition 4.2.5, il existe alors $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} \mathcal{I}\big(S_{1,\varepsilon}\big) = \mathcal{I}$ où l'idéal $\mathcal{I}$ est $\mathcal{I}_0$ ou $\mathcal{J}_0$ ou $\mathcal{I}_1$ qui sont définis dans la Proposition 4.2.5. On en déduit, d'après la Proposition 4.2.4, qu'il existe

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathcal{I}\left(\big(\Phi_{1,\varepsilon}\big)^{-1}\big(S_{1,\varepsilon}\big)\right) = \mathcal{I}\circ\Phi_1,$$

où $\Phi_{1,\varepsilon}$ converge vers $\Phi_1(z) = Id_{\mathbb{D}^2}$. Alors $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}$. D'où le résultat. □

4.2.4 Preuve de la Proposition 4.2.3

Observons d'abord que, pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $\mathcal{I}^* \subseteq \widehat{\mathcal{I}}_i$ et $\mathcal{I}^* \subseteq \widehat{\mathcal{I}}_j$, puisque $S_\varepsilon \supset \widehat{S}_i^\varepsilon$ et $S_\varepsilon \supset \widehat{S}_j^\varepsilon$. Donc $\mathcal{I}^* \subseteq \widehat{\mathcal{I}}_i \cap \widehat{\mathcal{I}}_j$. De plus, il est évident que $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{J}(\infty) = \mathfrak{M}_0^2$, pour $m = \infty$ et que $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{J}(m) = \langle z_2 - mz_1^2, z_1^3\rangle$, pour $m \in \mathbb{C}$ (car $z_1z_2 = z_1\big(z_2 - mz_1^2\big) + mz_1^3 \in \mathcal{J}(m)$ et $z_2^2 = \big(z_2 - mz_1^2\big)^2 - m^2z_1z_1^3 + 2mz_1(z_1z_2) \in \mathcal{J}(m)$). Par suite, $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{J}(m)$, pour tout $m \in \widehat{\mathbb{C}}$. Cela implique que $\mathcal{I}_0 \subseteq \widehat{\mathcal{I}}_i \cap \widehat{\mathcal{I}}_j$ avec $\ell\big(\mathcal{I}_0\big) = 4$. Pour terminer la preuve, il suffit de prouver que $\widehat{\mathcal{I}}_i \cap \widehat{\mathcal{I}}_j \subseteq \mathcal{I}_0$. Par conséquent, $\ell\big(\mathcal{I}^*\big) \geqslant \ell\big(\widehat{\mathcal{I}}_i \cap \widehat{\mathcal{I}}_j\big) = \ell\big(\mathcal{I}_0\big) = 4$. Alors, par la Proposition 2.1.4, il existe la limite des idéaux $\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big) = \mathcal{I}_0 := \langle z_1z_2, z_2^2, z_1^3\rangle.$$

En effet, par l'hypothèse, il existe $m_1, m_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, $m_1 \neq m_2$ tels que $\widehat{\mathcal{I}}_i = \mathcal{J}(m_1)$ et que $\widehat{\mathcal{I}}_j = \mathcal{J}(m_2)$, où $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Si m_1 et m_2 sont tous les deux différents de ∞, pour tout une fonction holomorphe sur Ω, $f(z) \in \mathcal{J}(m_1) \cap \mathcal{J}(m_2)$, il existe des fonctions holomorphes sur Ω, $\psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{2,1}, \psi_{2,2} \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que

$$f(z) = \psi_{1,1}\big(z_2 - m_1z_1^2\big) + \psi_{1,2}z_1^3 = \psi_{2,1}\big(z_2 - m_2z_1^2\big) + \psi_{2,2}z_1^3.$$

D'où

$$\big(\psi_{1,1} - \psi_{2,1}\big)z_2 = z_1^2\big(m_1\psi_{1,1} - m_2\psi_{2,1} + z_1\big(\psi_{2,2} - \psi_{1,2}\big)\big).$$

Comme le plus grand diviseur commun de z_2 et z_1^2 est 1 (on écrit $PGCD(z_2, z_1^2) = 1$), il vient $\psi_{1,1} - \psi_{2,1} = z_1^2\Psi_1$, où $\Psi_1 \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors

$$\Psi_1z_2 = m_1\big(\psi_{2,1} + z_1^2\Psi_1\big) - m_2\psi_{2,1} + z_1\big(\psi_{2,2} - \psi_{1,2}\big).$$

Puisque $m_1 \neq m_2$, on obtient $\psi_{2,1} = -z_1\Psi_2 + z_2\Psi_3$, où

$$\Psi_2 = \frac{1}{m_1 - m_2}\big(\big(\psi_{2,2} - \psi_{1,2}\big) + m_1z_1\Psi_1\big) \in \mathcal{O}(\Omega),$$

et
$$\Psi_3 = \frac{1}{m_1 - m_2} z_1 \Psi_1 \in \mathcal{O}(\Omega).$$
Par suite, $\psi_{1,1} = z_1\Psi_2 + z_2\Psi_3 + z_1^2\Psi_1$. On en déduit que
$$f(z) = \big(z_1\Psi_2 + z_2\Psi_3 + z_1^2\Psi_1\big)\big(z_2 - m_1 z_1^2\big) + \psi_{1,2} z_1^3 \in \mathcal{I}_0 := \left\langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3 \right\rangle.$$
Par conséquent, $\widehat{\mathcal{I}}_i \cap \widehat{\mathcal{I}}_j \subseteq \mathcal{I}_0$.

D'autre part, s'il existe $m_i = \infty$, pour $i \in \{1, 2\}$. Supposons, sans perte de généralité, que $m_2 = \infty$. Donc $\mathcal{J}(m_2) = \mathfrak{M}_0^2$. On raisonne de manière tout à fait analogue dans le cas ci-dessus que $\mathcal{J}(m_1) \cap \mathfrak{M}_0^2 \subseteq \mathcal{I}_0$. En effet, pour tout $g(z) \in \mathcal{J}(m_1) \cap \mathfrak{M}_0^2$, il existe $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2}, \theta_{2,3} \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que
$$f(z) = \theta_{1,1}\big(z_2 - m_1 z_1^2\big) + \theta_{1,2} z_1^3 = \theta_{2,1} z_1^2 + \theta_{2,2} z_1 z_2 + \theta_{2,3} z_2^2.$$
D'où
$$\big(\theta_{1,1} - \theta_{2,2} z_1 - \theta_{2,3} z_2\big) z_2 = z_1^2 \big(\theta_{2,1} - \theta_{1,2} z_1\big).$$
Puisque $PGCD(z_2, z_1^2) = 1$, on a $\theta_{2,1} - \theta_{1,2} z_1 = z_2\theta$, où $\theta \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors $\theta_{2,1} = \theta_{1,2} z_1 + z_2\theta$. Il en résulte que
$$f(z) = \big(\theta_{1,2} z_1 + z_2\theta\big) z_1^2 + \theta_{2,2} z_1 z_2 + \theta_{2,3} z_2^2 \in \mathcal{I}_0.$$
On en déduit le résultat. □

4.2.5 Exemples

Nous allons considérer des exemples où $\#\mathcal{D} = 1$.

Rappelons l'exemple 1.2.23, où $S_\varepsilon = \{(0;0), (\varepsilon;0), (p\varepsilon;0), (q\varepsilon;0)\}$ est un système de quatre points distincts dans le bidisque unité $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$, $p, q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, p \neq q$. Il est alors facile de voir que $\#\mathcal{D} = 1$ et qu'il existe une limite d'idéal $\mathcal{I}\big(\tilde{S}_\varepsilon\big)$, pour tout un sous-système $\tilde{S}_\varepsilon$ de trois points distincts dans S_ε,
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}\big(\tilde{S}_\varepsilon\big) = \mathcal{J}(0) = \left\langle z_2, z_1^3 \right\rangle.$$
Dans ce cas-là, le système S_ε ne satisfait pas l'hypothèse de la Proposition 4.2.3. Cependant que, par l'exemple 1.2.23, il existe la limite
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \left\langle z_2, z_1^4 \right\rangle.$$

L'exemple suivant est une application de la Proposition 4.2.3. Soit $S_\varepsilon \subset \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ un système de quatre points distincts, où
$$S_\varepsilon = \{a_1(\varepsilon) = (0,0), a_2(\varepsilon) = (\varepsilon, 0), a_3(\varepsilon) = (\varepsilon^2, \varepsilon^3), a_4(\varepsilon) = (\varepsilon^2/2, \varepsilon^4)\}.$$
Observons d'abord que, $\#\mathcal{D} = 1$, puisque $\mathcal{D} = \{[1:0]\} \subset \mathbb{CP}^1$. Par le Théorème 3.1.4, il est facile de voir que $\widehat{\mathcal{I}}_3 := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}\big(\widehat{S}_3^\varepsilon\big)$ existe et
$$\widehat{\mathcal{I}}_3 = \left\langle z_2, z_1^3 \right\rangle = \mathcal{J}(0).$$
De plus, il existe la limite
$$\widehat{\mathcal{I}}_4 := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}\big(\widehat{S}_4^\varepsilon\big) = \left\langle z_2 + z_1^2, z_1^3 \right\rangle = \mathcal{J}(-1).$$
D'après la Proposition 4.2.3, il résulte que
$$\mathcal{I}_0 = \left\langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3 \right\rangle = \mathcal{J}(0) \cap \mathcal{J}(-1).$$

Et alors la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$ existe et vaut $\mathcal{I}_0$.

Le troisième exemple est plus surprenant. Soit

$$S_\varepsilon=\{(0;0),(\varepsilon;0),(t\varepsilon;\varepsilon^2\alpha),(u\varepsilon;\varepsilon^2\alpha)\},\alpha=\alpha(\varepsilon)\to 0 \text{ et } 0<t+u<1\subset\mathbb{D}^2.$$

On remarque que, pour tout $1\leqslant j\leqslant 4$, il existe

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(\widehat{S}^\varepsilon_j\big)=\mathcal{J}(0)=\big\langle z_2,z_1^3\big\rangle\,.$$

Alors le système S_ε ne satisfait pas l'hypothèse de la Proposition 4.2.3. De toute façon, si $t+u=1$, donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\big\langle z_2,z_1^4\big\rangle$. Par contre, dans le cas où $t+u\neq 1$,

(i) Si $\alpha\gg\varepsilon$ (ex : $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$), donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\big\langle z_1z_2,z_2^2,z_1^3\big\rangle$;

(ii) Si $\alpha\ll\varepsilon$ (ex : $\alpha=\varepsilon^2$), donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\big\langle z_2,z_1^4\big\rangle$;

(ii) Si $\alpha\sim\varepsilon$, donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\mathcal{I}=\big\langle pz_2+z_1^3,z_1^4\big\rangle$, avec $\ell\big(\mathcal{I}\big)=4$, où $p:=\frac{u(1-u)}{t+u-1}\neq 0$.

Le quatrième exemple est le cas où

$$S_\varepsilon=\{(0;0),(\varepsilon;0),(t\varepsilon;\varepsilon\delta),(u\varepsilon;\varepsilon\delta)\}\subset\mathbb{D}^2,\delta=\delta(\varepsilon)\to 0 \text{ et } 0<t+u<1.$$

Puisque si $\delta\ll\varepsilon$, on peut écrire $\delta=\varepsilon\beta$, où $\beta=\beta(\varepsilon)\to 0$. Par conséquent, $\varepsilon\delta=\varepsilon^2\beta$. Retombons dans le premier exemple ci-dessus. Alors on ne considère que le cas où $\delta\gg\varepsilon$ ou $\delta\sim\varepsilon$. Tout d'abord, considérons le cas où $\delta\gg\varepsilon$. Évidemment pour tout $1\leqslant j\leqslant 4$, il existe

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(\widehat{S}^\varepsilon_j\big)=\mathcal{J}(\infty)=\mathfrak{M}_0^2.$$

Ensuite, si $t+u=1$, alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\big\langle z_1^2,z_2^2\big\rangle$. Par contre, si $t+u\neq 1$, on obtient $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\big\langle z_1z_2,z_2^2,z_1^3\big\rangle$.

D'autre part, dans le cas particulier où $\delta=\varepsilon$. Si $t+u=1$, donc il existe $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(\widehat{S}^\varepsilon_j\big)=\big\langle z_2+mz_1^2,z_1^3\big\rangle$, où $m=\frac{1}{tu}$. Au contraire, dans le cas où $t+u\neq 1$, on remarque que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(\widehat{S}^\varepsilon_4\big)=\big\langle z_2-m_1z_1^2,z_1^3\big\rangle\,,$$

et que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(\widehat{S}^\varepsilon_3\big)=\big\langle z_2-m_2z_1^2,z_1^3\big\rangle\,,$$

où $m_1=\frac{1}{t(t-1)}$ et $m_2=\frac{1}{u(u-1)}$. Puisque $m_1\neq m_2$ (car $t+u\neq 1$), par la Proposition 4.2.3, on obtient $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\big\langle z_1z_2,z_2^2,z_1^3\big\rangle$.

4.2.6 Questions ouvertes

Les exemples ci-dessus n'épuisent pas toutes les situations.

Problème 1 : Étudions encore la famille des idéaux de fonctions holomorphes sur Ω, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$ dans le cas où le système S_ε de quatre points distincts dans le bidisque unité $\mathbb{D}^2\subset\mathbb{C}^2$ qui satisfait la condition $\#\mathfrak{D}=1$? Plus précisément, supposons que, pour tout $1\leqslant j\leqslant 4$, il existe $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(\widehat{S}^\varepsilon_j\big)=\widehat{\mathcal{I}}_j=\mathcal{J}(m)$, où $m\in\widehat{\mathbb{C}}$. Quelle est la limite de $\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$, quand $\varepsilon\to 0$?

Problème 2 : Quelle est la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}G_\varepsilon$ dans le cas dégénéré où le système S_ε de 4 points distincts dans Ω ne satisfait pas des conditions (4.1.1) et (4.1.2), et dans le cas où la famille des idéaux de fonctions holomorphes sur Ω existe, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)=\mathcal{I}$, mais $\mathcal{I}$ n'est pas d'un idéal d'intersection complète ?

4.3 Borne inférieure pour la limite des fonctions de Green pluricomplexes : un cas particulier

4.3.1 Introduction

Dans cette section, en utilisant les puissances d'idéaux et la méthode de Rashkovskii-Thomas vue au chapitre 3, nous allons étudier la limite des fonctions de Green pluricomplexes G_ε dans un cas très particulier où la limite $\mathcal{I}$ de la famille des idéaux $\mathcal{I}_\varepsilon$ n'est pas un idéal d'intersection complète. Malheureusement, nous n'avons obtenu que quelques estimations partielles.

Soit $\Omega = \mathbb{D}^2$ le bidisque unité dans $\mathbb{C}^2$ et $S_\varepsilon := \{(0;0), (\varepsilon;0), (0;\varepsilon), (k\varepsilon;0)\}$, où $k \neq 1$, un système de quatre points distincts dans Ω. Il est facile de voir que

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \langle z_1 z_2, z_2(z_2-\varepsilon), z_1(z_1-\varepsilon)(z_1-k\varepsilon)\rangle . \tag{4.3.1}$$

Donc la limite de la famille des idéaux $\mathcal{I}\big(S_\varepsilon\big)$ existe,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I} = \left\langle z_1 z_2, z_2^2, z_1^3 \right\rangle .$$

Évidemment, $\mathcal{I}$ n'est pas un idéal d'intersection complète. D'après le Théorème 1.2.22, la fonction de Green pluricomplexe $G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ ne converge pas uniformément localement vers la fonction

$$G_{\mathcal{I}}(z) = \max\big\{ \log|z_1 z_2|, 2\log|z_2|, 3\log|z_1| \big\} + O(1),$$

pour tout $z \in \Omega\backslash\{0\}$.

Les résultats principaux de cette section utilisent la Proposition 3.4.6, qui estiment la limite des fonctions de Green en fonction de celles des idéaux $\mathcal{I}_{(p)} := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^p$.

Une première estimation pour la limite des fonctions de Green pluricomplexes G_ε s'obtient en prenant $p = 2$.

Proposition 4.3.1. *(i)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^2 = \mathcal{I}_{(2)} = \left\langle z_1 z_2^3, z_1^2 z_2^2, z_2^4, z_1^3 z_2, z_1^6 \right\rangle .$$

(ii) On a $\liminf_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant 2\log\|z\| + O(1)$, *pour tout* $z \in \Omega\backslash\{0\}$, $z_2 \neq 0$.

Une deuxième estimation de la limite des fonctions de Green pluricomplexes G_ε s'obtient en prenant $p = 3$.

Proposition 4.3.2. *(i)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^3 = \mathcal{I}_{(3)} = \langle \mathcal{J}_0, g(z)\rangle ,$$

où

$$\mathcal{J}_0 := \left\langle z_1^k z_2^{6-k}, 0 \leqslant k \leqslant 4, z_1^6 z_2, z_1^9 \right\rangle ,$$

et

$$g(z) := z_1 z_2^2 (z_1 + z_2)(z_1 + k z_2)$$

(ii) On a $\liminf_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant \frac{5}{3}\log\|z\| + O(1)$, *pour tout* $z \in \Omega\backslash\{0\}$ *tel que* $g(z) \neq 0$.

Remarque : l'ensemble exceptionnel $\{g(z) = 0\}$ est l'union des droites qui sont limites des droites passant par deux ou trois des pôles de S_ε, le long desquelles on sait déjà que $\limsup_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(z) \leq 2\log\|z\| + O(1)$ (respectivement $\leq 3\log\|z\| + O(1)$).

Enfin, la troisième estimation pour la limite des fonctions de Green pluricomplexes G_ε est la suivante.

Proposition 4.3.3. *Pour $p = 4$, alors*

(i)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^4 = \mathcal{I}_{(4)} = \left\langle \mathcal{J}_1, z_1 z_2 g(z), z_2^2 g(z) \right\rangle,$$

où

$$\mathcal{J}_1 := \left\langle z_1^k z_2^{8-k}, 0 \leqslant k \leqslant 6, z_1^9 z_2, z_1^{12} \right\rangle,$$

(ii) On a $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geq \frac{1}{4} G_{\mathcal{I}_{(4)}}(z)$.

Remarque. Ce résultat ne permet pas d'améliorer l'estimation du type $c \log \|z\|$ obtenue dans la Proposition 4.3.2, puisqu'ici on trouverait $c = \frac{7}{4} > \frac{5}{3}$.

4.3.2 Preuve des résultats principaux

Soit $0 \in \Omega$ dans $\mathbb{C}^n$ et soit $\mathcal{I}_\varepsilon$ une famille d'idéaux radicaux de fonctions holomorphes sur Ω de longueur finie tels que $V(\mathcal{I}_\varepsilon)$ contient N points distincts $a_1(\varepsilon), \cdots, a_N(\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon \neq 0$ assez petit et que $V(\mathcal{I}_\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Supposons qu'il existe $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^p = \mathcal{I}_{(p)}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Observons d'abord le résultat suivant.

Proposition 4.3.4. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\ell(\mathcal{I}_{(p)}) = N \binom{n+p-1}{n} = N \ell(\mathfrak{M}_0^p).$$

Démonstration. Puisque la longueur d'idéal est stable par passage à la limite, on obtient $\ell(\mathcal{I}_{(p)}) = \ell(\mathcal{I}_\varepsilon^p)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, chaque idéal $\mathcal{I}_\varepsilon^p$ contient toutes les fonctions $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui satisfaient

$$\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial z^\beta}\big(a_j(\varepsilon)\big) = 0, \text{ pour } |\beta| < p, 1 \leqslant j \leqslant N.$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\ell(\mathcal{I}_{(p)}) = N \binom{n+p-1}{n} = N \ell(\mathfrak{M}_0^p).$$

Ce qui prouve notre assertion. □

Ensuite, par [Ras-Tho12, Proposition 4.6], nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.3.5. *Soit φ le plus grand minorant plurisousharmonique de la fonction $\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\varphi \geqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(p)}} + C_p = \frac{1}{p} G_{\mathcal{I}_{(p)}} + C_p,$$

avec des constantes C_p qui dépendent de p.

Démonstration. Compte tenu de la Proposition 1.2.9, il résulte que

$$\varphi \geqslant G_{\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{J}_\varepsilon} + O(1),$$

pour toute famille d'idéaux $\mathcal{J}_\varepsilon$ telle que $V\big(\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{J}_\varepsilon\big) = \{0\}$. En appliquant ce résultat pour $\mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{I}_\varepsilon^p$ et en combinaison avec (1.1.4) et (3.4.5), on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\varphi \geqslant \widehat{G}_{\mathcal{I}(p)} + C_p = \frac{1}{p} G_{\mathcal{I}(p)} + C_p,$$

avec des constantes C_p qui dépendent de p. Ce qui implique le résultat. □

Maintenant, pour $p = 2$, par la relation (4.3.1) il est facile de voir que,

$$\mathcal{I}_{(2)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^2 \supseteq \left\langle z_1 z_2^3, z_1^2 z_2^2, z_2^4, z_1^4 z_2, z_1^6 \right\rangle.$$

Or

$$\mathcal{I}_\varepsilon^2 \ni -z_1^3 z_2^2 + z_1(z_1-\varepsilon)(z_1-k\varepsilon)z_2(z_2-\varepsilon) =: P_\varepsilon(z),$$

donc

$$\mathcal{I}_\varepsilon^2 \ni -\frac{1}{\varepsilon} P_\varepsilon(z) \to z_1^3 z_2 + (k+1) z_1^2 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(2)}.$$

Puisque $z_1^2 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(2)}$, on a $z_1^3 z_2 \in \mathcal{I}_{(2)}$. On en déduit que

$$\mathcal{J} := \left\langle z_1 z_2^3, z_1^2 z_2^2, z_2^4, z_1^3 z_2, z_1^6 \right\rangle \subseteq \mathcal{I}_{(2)}.$$

D'après la Proposition 4.3.4, comme

$$\ell\big(\mathcal{I}_{(2)}\big) = 4\ell\big(\mathfrak{M}_0^2\big) = 4\binom{3}{2} = 12 = \ell\big(\mathcal{J}\big),$$

on obtient $\mathcal{I}_{(2)} = \mathcal{J}$.

Par ailleurs, par la Proposition 4.3.5, on déduit

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) &\geqslant \frac{1}{2} G_{\mathcal{I}_{(2)}}(z) + O(1), \\
&= \frac{1}{2} \max \left\{ \log|z_1 z_2^3|, \log|z_1^2 z_2^2|, \log|z_2^4|, \log|z_1^3 z_2|, \log|z_1^6| \right\} + O(1).
\end{aligned}$$

pour tout $z \in \Omega\backslash\{0\}$. Supposons que $z = \lambda\xi$, où $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \partial\Omega$, $\|\xi\| = 1$ et $|\lambda| = \|z\|$. Si $\xi_2 \neq 0$, alors $|z_2| \geqslant C_\xi |\lambda|$. Il vient $\frac{1}{2}\log|z_2^4| \geqslant 2\log\|z\| + O(1)$. Cela implique que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant 2\log\|z\| + O(1),$$

pour tout $z \in \Omega\backslash\{0\}$. Ce qui achève la preuve de la Proposition 4.3.1. □

Ensuite, pour $p = 3$, la preuve de la Proposition 4.3.2 est tout à fait analogue. En effet, de la relation (4.3.1), il est d'abord facile de voir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{(3)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^3 &\supseteq \left\langle z_2^6, z_1 z_2^5, z_1^2 z_2^4, z_1^3 z_2^3, z_1^4 z_2^3, z_1^3 z_2^4, z_1^5 z_2^2, z_1^6 z_2^2, z_1^7 z_2, z_1^9 \right\rangle \\
&= \left\langle z_2^6, z_1 z_2^5, z_1^2 z_2^4, z_1^3 z_2^3, z_1^5 z_2^2, z_1^7 z_2, z_1^9 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\varepsilon^3 \ni p_\varepsilon(z) &:= -z_1^3 z_2^3 . z_1 + z_1 z_2 z_2 (z_2 - \varepsilon) z_1 (z_1 - \varepsilon)(z_1 - k\varepsilon) \\
&= -\varepsilon z_1^2 z_2^2 \left\{ z_1^2 + (k+1) z_1 z_2 \right\} + z_1^2 z_2^2 \left\{ \varepsilon^2 \big(k(z_1 + z_2) + z_1 \big) - k\varepsilon^3 \right\},
\end{aligned}$$

on obtient, quand $\varepsilon \to 0$,

$$-\frac{1}{\varepsilon} p_\varepsilon(z) \to z_1^4 z_2^2 + (k+1) z_1^3 z_2^3 \in \mathcal{I}_{(3)}.$$

Comme $z_1^3 z_2^3 \in \mathcal{I}_{(3)}$, alors $z_1^4 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(3)}$. De plus, on voit que

$$\mathcal{I}_\varepsilon^3 \ni q_\varepsilon(z) := z_1^2 (z_1 - \varepsilon)^2 (z_1 - k\varepsilon)^2 z_2 (z_2 - \varepsilon) - z_1 . z_1 (z_1 - \varepsilon)(z_1 - k\varepsilon) z_1^2 z_2^2 = -\varepsilon \left\{ z_1^2 + (k+1) z_1 z_2 \right\} z_1^4 z_2.$$

Il vient alors, quand $\varepsilon \to 0$,

$$-\frac{1}{\varepsilon} q_\varepsilon(z) \to z_1^6 z_2 + (k+1) z_1^5 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(3)}.$$

D'où $z_1^6 z_2 \in \mathcal{I}_{(3)}$, puisque $z_1^5 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(3)}$. On en déduit que

$$\mathcal{K}_0 := \left\langle z_1^k z_2^{6-k}, 0 \leqslant k \leqslant 4, z_1^6 z_2, z_1^9 \right\rangle \subseteq \mathcal{I}_{(3)}.$$

Par ailleurs, parce que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon^3 \ni g_\varepsilon(z) &:= z_1.z_1^2 z_2^2 z_2(z_2-\varepsilon) - z_1(z_1-\varepsilon)(z_1-k\varepsilon)z_2^2(z_2-\varepsilon)^2 - \varepsilon\big\{z_1^3 z_2^3 + (k+1)z_1^2 z_2^2 z_2(z_2-\varepsilon)\big\} \\ &= -\varepsilon^2 z_1 z_2^2\big\{z_1^2 + 2(k+1)z_1 z_2 + k z_2^2\big\} + \varepsilon^2(k+1)z_1^2 z_2^3 + \varepsilon^3 z_1 z_2^2\big\{(k+1)z_1 + 2k z_2\big\} - k\varepsilon^4 z_1 z_2^2.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} g_\varepsilon(z) \to z_1 z_2^2(z_1+z_2)(z_1+kz_2) =: g(z) \in \mathcal{I}_{(3)}.$$

Posons ensuite $\mathcal{K} := \langle \mathcal{K}_0, g(z)\rangle \subseteq \mathcal{I}_{(3)}$. La relation

$$\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{K} = \big(\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{K}_0\big)\big/\big(\mathcal{K}/\mathcal{K}_0\big),$$

implique $\ell(\mathcal{K}) = \ell(\mathcal{K}_0) - 1 = 24$, puisque $\ell(\mathcal{K}_0) = 25$. Or, d'après la Proposition 4.3.4,

$$\ell\big(\mathcal{I}_{(3)}\big) = 4\ell\big(\mathfrak{M}_0^3\big) = 4\binom{4}{2} = 24 = \ell\big(\mathcal{K}\big).$$

On obtient alors $\mathcal{I}_{(3)} = \mathcal{K}$.

De plus, de la Proposition 4.3.5, on déduit

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant \frac{1}{3} G_{\mathcal{I}_{(3)}}(z) + O(1) \geqslant \frac{1}{3}\log\big|z_1 z_2^2(z_1+z_2)(z_1+kz_2)\big| + O(1).$$

pour tout $z \in \Omega\backslash\{0\}$. Supposons que $z = \lambda\xi$, où $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \partial\Omega$, $\|\xi\| = 1$ et $|\lambda| = \|z\|$. Si $\xi_1\xi_2^2(\xi_1+\xi_2)(\xi_1+k\xi_2) \neq 0$, donc $|z_j| \geqslant C_j|\lambda|$, pour $j = 1, 2$ et $|\xi_1+\xi_2| \geqslant C_3|\lambda|$, $|\xi_1+k\xi_2| \geqslant C_4|\lambda|$. Par suite, $\frac{1}{3}\log\big|z_1 z_2^2(z_1+z_2)(z_1+kz_2)\big| \geqslant \frac{5}{3}\log\|z\| + O(1)$. Cela implique que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant \frac{5}{3}\log\|z\| + O(1),$$

pour tout $z \in \Omega\backslash\{0\}$. Ce qui achève la preuve de la Proposition 4.3.2. □

Enfin, dans le cas où $p = 4$, de la relation (4.3.1) on déduit que

$$\mathcal{I}_{(4)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon^4 \supseteq \left\langle z_1^k z_2^{8-k}, 0 \leqslant k \leqslant 4, z_1^6 z_2^3, z_1^8 z_2^2, z_1^{12}\right\rangle.$$

Sachant que $z_1^2 z_2^2 P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_\varepsilon^4$, on obtient alors que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$-\frac{1}{\varepsilon} z_1^2 z_2^2 P_\varepsilon(z) \to z_1^2 z_2^2\big\{z_1^3 z_2 + (k+1)z_1^2 z_2^2\big\} \in \mathcal{I}_{(4)}.$$

Ce qui donne $z_1^5 z_2^3 \in \mathcal{I}_{(4)}$, puisque $z_1^4 z_2^4 \in \mathcal{I}_{(4)}$. De plus, on remarque que $\big(P_\varepsilon(z)\big)^2 \in \mathcal{I}_\varepsilon^4$. Il en résulte que, en faisant tendre ε vers 0,

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\big(P_\varepsilon(z)\big)^2 \to \big(z_1^3 z_2 + (k+1)z_1^2 z_2^2\big)^2 \in \mathcal{I}_{(4)}.$$

Il vient alors $z_1^6 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(4)}$, puisque $z_1^5 z_2^3, z_1^4 z_2^4 \in \mathcal{I}_{(4)}$. Par ailleurs, comme $z_1^2(z_1-\varepsilon)^2(z_1-k\varepsilon)^2 P_\varepsilon(z) \in \mathcal{I}_\varepsilon^4$, on trouve, en faisant tendre ε vers 0, que

$$\frac{1}{\varepsilon} z_1^2(z_1-\varepsilon)^2(z_1-k\varepsilon)^2 P_\varepsilon(z) \to z_1^3\big(z_1^3 z_2 + (k+1)z_1^2 z_2^2\big) \in \mathcal{I}_{(4)}.$$

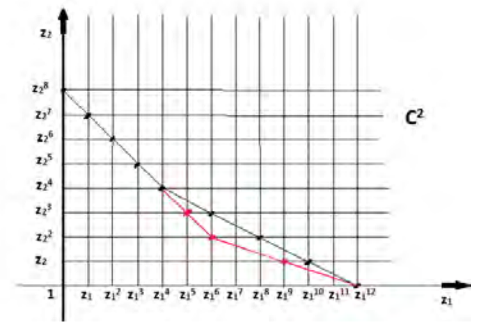

FIGURE 4.1 – H1

D'où $z_1^9 z_2 \in \mathcal{I}_{(4)}$, puisque $z_1^8 z_2^2 \in \mathcal{I}_{(4)}$. Finalement, nous avons

$$\mathcal{I}_{(4)} \supseteq \mathcal{J}_1 := \left\langle z_1^k z_2^{8-k}, 0 \leqslant k \leqslant 4, z_1^5 z_2^3, z_1^6 z_2^2, z_1^9 z_2, z_1^{12} \right\rangle,$$

avec $\ell\big(\mathcal{J}_1\big) = 42$ (voir la figure 4.1 - H1).

Ensuite, compte tenu de la Proposition 3.4.2, on obtient $\mathcal{I}_{(1)} \cdot \mathcal{I}_{(3)} \subset \mathcal{I}_{(4)}$. On en déduit que

$$z_1 z_2 g(z) = z_1^2 z_2^3 (z_1 + z_2)(z_1 + k z_2) = z_1^4 z_2^3 + (k+1) z_1^3 z_2^4 + k z_1^2 z_2^5 \in \mathcal{I}_{(4)},$$

et que

$$z_2^2 g(z) = z_1 z_2^4 (z_1 + z_2)(z_1 + k z_2) = z_1^3 z_2^4 + (k+1) z_1^2 z_2^5 + k z_1 z_2^6 \in \mathcal{I}_{(4)}.$$

On remarque d'autre part que le système $\{z_1 z_2 g(z), z_2^2 g(z)\}$ est indépendant, puisque le système des monômes $\{z_1^4 z_2^3, z_1^3 z_2^4\}$ est indépendant. Par conséquent, $\mathcal{I}_{(4)} \supseteq \mathcal{I} := \big\langle \mathcal{J}_1, z_1 z_2 g(z), z_2^2 g(z) \big\rangle$. De la relation

$$\mathcal{O}\big(\Omega\big)/\mathcal{I} = \big(\mathcal{O}\big(\Omega\big)/\mathcal{J}_1\big) \big/ \big(\mathcal{I}/\mathcal{J}_1\big),$$

il vient donc $\ell\big(\mathcal{I}\big) = \ell\big(\mathcal{J}_1\big) - 2 = 40$. Or, d'après la Proposition 4.3.4,

$$\ell\big(\mathcal{I}_{(4)}\big) = 4\ell\big(\mathfrak{M}_0^4\big) = 4\binom{5}{2} = 40 = \ell\big(\mathcal{I}\big).$$

On obtient alors $\mathcal{I}_{(4)} = \mathcal{I} = \big\langle \mathcal{J}_1, z_1 z_2 g(z), z_2^2 g(z) \big\rangle$.

□

4.4 Questions ouvertes

Soit $\mathcal{I}$ un idéal dans $\mathcal{O}\big(\Omega\big)$ avec $\#V\big(\mathcal{I}\big) < \infty$. La valuation de $\mathcal{I}$ non nul est définie par le minimum de l'ordre d'annulation sur $V(\mathcal{I})$ des fonctions $f \in \mathcal{I}$. La valuation d'un idéal nul est $+\infty$.

De la relation (4.3.1), il est facile de voir que $Val\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) = 2$. Alors, pour chaque $p \in \mathbb{N}$,

$$Val\big(\mathcal{I}_\varepsilon^p\big) = p\, Val\big(\mathcal{I}_\varepsilon\big) = 2p.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $Val\big(\mathcal{I}_{(p)}\big) \leqslant 2p$. Des Propositions 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3, on remarque que $Val\big(\mathcal{I}_{(1)}\big) = 2, Val\big(\mathcal{I}_{(2)}\big) = 4, Val\big(\mathcal{I}_{(3)}\big) = 5$ et $Val\big(\mathcal{I}_{(4)}\big) = 7$ et que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} G_{\mathcal{I}_\varepsilon}(z) \geqslant \frac{Val\big(\mathcal{I}_{(p)}\big)}{p} \log \|z\| + O(1),$$

pour tout $z \in \Omega \backslash \{0\}$ et pour $p = 1, 2, 3, 4$.

Problème 1 : Étudions la suite $\{Val(\mathcal{I}_{(p)})\}_{p\in\mathbb{N}}$. Est-ce que la suite $\{Val(\mathcal{I}_{(p)})\}_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone ?

D'autre part, par la Proposition 3.4.5 (ii), on trouve que, pour $p = 6 = 2 \vee 3$,

$$\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(6)}}(z) \geqslant \max\left(\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(2)}}(z), \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(3)}}(z)\right) \geqslant \max\left\{2\log|z|, \frac{5}{3}\log|z|\right\} + O(1) = \frac{5}{3}\log|z| + O(1),$$

pour z tel que $g(z) \neq 0$, et que, pour $p = 12 = 3 \vee 4$,

$$\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(12)}}(z) \geqslant \max\left(\widehat{G}_{\mathcal{I}_{(3)}}(z), \widehat{G}_{\mathcal{I}_{(4)}}(z)\right) \geqslant \max\left\{\frac{5}{3}\log|z|, \frac{7}{4}\log|z|\right\} + O(1) = \frac{5}{3}\log|z| + O(1),$$

pour z tel que $g(z) \neq 0$.

Problème 2 : Quelle est la meilleure estimation possible de $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p} G_{\mathcal{I}_{(p)}}(z)$? Peut-on l'obtenir pour un certain p fini, et lequel ?

Bibliographie

[Be-T76] Bedford, E., Taylor, B.A., *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. **37** (1976), 1-44.

[Be-De88] Bedford, E., Demailly, J.-P., *Two counterexamples concerning the pluri-complex Green function in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J 37 no **4** (1988), 865-867.

[Br-Sk74] J. Briançon, H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en point de* $\mathbb{C}^n$, C. R. Acad. Sci Série A, **278** (1974), 949-951.

[Ca98] Carlehed, M., *The pluricomplex Green function and related topics in pluripotential theory*, Doctoral thesis no **12** (1998), Dept. of Mathematics, Umeå University.

[Ca-Wi03] Carlehed, M., Wiegerinck, J. *Le cône des fonctions plurisousharmoniques négatives et une conjecture de Coman.* Ann. Pol. Math. **80**(2003), 93-108.

[Ce04] Cegrell, U., *The general definition of the complex Monge-Ampère operator*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **54** (2004), 159-179.

[Ce06] Cegrell, U., *Week-* convergence of Monge-Ampère measures*, Math. Z., **254** (2006), 505-508.

[Cel-Po97] H. I. Celik, E. A. Poletsky, *Fundamental solutions of the complex Monge-Ampère equation*, Ann. Polon. Math, **57** (1997),no. 2 103-110.

[Com00] Coman, D. *The pluricomplex Green function with two poles in the unit baal of* $\mathbb{C}^n$. Pacific J. Math. **194** (2000), 257-283.

[Da93] J. D'Angelo, *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton-Ann Arbor-London-Tokyo, **1993**.

[De] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, manuscript, Université de Grenoble I, Institut Fourier, 455 p., http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/book.html.

[De85] J.-P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **19** (1985), 1-124.

[De87] J.-P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques*, Math. Z., **194** (1987), 519-564.

[De07] J.-P. Demailly, *Estimates on Mong-Ampère operators derived from a local algebra inequality*, in Complex Analysis and Digital Geometry, Proceedings from the Kiselmanfest, 2006, Uppsala University, 2009, 131-143 ; available at arXiv :0709.3524v2.

[Du-Tho11] Duong Quang Hai, Pascal J. Thomas, *Limit of three-point Green functions : the degenerate case*, eprint arXiv :1205.5899v1.

[Edig99] A. Edigarian, *Remarks on the pluricomplex Green functions*, Univ.Iagel. Acta Maths. **37** (1999), 159-164.

[Hör90] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Third Edition (revised), Mathematical Library, Vol. 7, North Holland, Amsterdam-New York - Oxford- Tokyo, 1990.

[Kli85] Klimek, M., *Extremal plurisubharmonique functions and invariant pseudodistances*, Bull. Soc. Math. France, **13** (1985), 123-142.

[Kli91] M. Klimek, Pluripotential theory, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991, London Math. Soc. Monographs N.S. 6.

[Le89] Pierre LeLong, *Fonction de Green pluricomplexe et lemmes de schwarz dans les espaces de Banach*, J. Math. pures et appl. **68** (1989), 319-347.

[Lem81] Lempert, L., *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France. **109** (1981), 427-474.

[Lem83] Lempert, L., *Solving the degenerate Monge-Ampère equation with one concentrated singularity*, Math. Ann. **263** (1983), 515-532.

[La-Sig98] Lárusson, F., Sigurdsson, R., *Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds*, J. Rene Angew. Math. **501** (1998), 1-39.

[La-Sig] Lárusson, F., Sigurdsson, R., *The Plurisubharmonic extremal functions for a hypersurface.* Mid Sweden University, Department of Mathematics, Reports No **4** (1998).

[Ma-Ras-Sig-Tho11] Magnusson, Jon I. ; Rashkovskii, Alexander ; Sigurdsson, Ragnar ; Thomas, Pascal J., *Limits of multipole pluricomplex Green functions*, eprint arXiv :1103.2296v1.

[Rans95] Ransford T., *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[Rash06] A. Rashkovskii, *Relative types and extremal problems for plurisubharmonic functions*, Int. Math. Res. Not. **2006** (2006), Article ID 76283, 26p.

[Ras-Sig05] A. Rashkovskii et R. Sigurdsson, *Green function with sigularities along complex spaces*, Int. J. Math. **16** (2005), no. 4, 333-355.

[Ras-Tho12] A. Rashkovskii et Pascal J.Thomas, *Powers of ideals and convergence of Green functions with colliding poles*, eprint arXiv :1208.2824v2.

[Ru80] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$. Reprint of the 1980 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Niv04] Stéphanie Nivoche, *Proof of a conjecture of Zahariuta concerning a problem of Kolmogorov on the* ε*-entropy.* Invent. Math. **158** (2004), 413-450.

[Tho12] Thomas, P. J., *Green vs. Lempert functions : a minimal example.* Pacific J. Math., **257** (2012), no. 1, 189-197.

[Tho-Trao03] Thomas, P. J., Trao, N. V. *Pluricomplex green and lempert functions for equally weighted poles.* Ar. Mat. **41** (2) (2003), 381-400.

[Tho-Trao09] Thomas, P. J., Trao, N. V. *Discontinuity of the Lempert function of the spectral ball.* Proc. Amer. Math. Soc. **138** (7) (2010), 2403-2412 .

[Tsi92] A. K. Tsikh, *Multidimentional Residues and Their Applications*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 103, American Mathematical Society, Providence, 1992.

[Zah84] V. P. Zahariuta, *Spaces of analytic functions and maximal plurisubharmonic functions*, D. Sci. Dissertation, Rostov-on-Don, 1984.

[Zah94] V. P. Zahariuta, *Spaces of analytic functions and Complex Potential Theory*, Linear Topological Spaces and Complex Analysis **1** (1994), 74-146.

[Zar-Sam75] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, Vol. II, Reprint of the 1960 edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[Zer97] Zeriahi, A. *Pluricomplex Green functions and the Dirichlet problem for th complex Monge-Ampère operator.* Michigan Math. J. **44** (1997), 579-596.

Le titre de la thèse :

LIMITES D’IDÉAUX DE FONCTIONS HOLOMORPHES ET DE FONCTIONS DE GREEN PLURICOMPLEXES

Les résumés et les mots-clés :

RÉSUME

Cette thèse est consacrée à l'étude des limites d'idéaux de fonctions holomorphes et de fonctions de Green pluricomplexes sur un domaine Ω (ouvert connexe) hyperconvexe borné qui contient l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Les idéaux concernés sont définis par l'annulation sur un nombre fini de points.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques notions élémentaires de théorie du potentiel en plusieurs variables complexes et la fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles. Ensuite, on étudie la convergence de cette fonction à pôles logarithmiques simples dans le cas où le nombre de pôles est fini et tous les pôles tendent vers un seul point.

Dans le deuxième chapitre, nous allons donner une méthode pour réduire la vérification de la convergence d'une famille des idéaux de fonctions holomorphes. Plus précisément, nous allons démontrer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la limite d'une famille des idéaux de fonctions holomorphes existe.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la limite de la fonction de Green pluricomplexe sur la base de 3 points distincts qui tendent vers l'origine dans le cas particulier où les limites de toutes les directions de droites qui passent par les deux points sont alignées. Nous allons commencer par étudier la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes de même base, puis nous donnons quelques estimations pour la borne supérieure et la borne inférieure de la limite de la fonction de Green pluricomplexe. Finalement, en utilisant les notions de puissance des idéaux de fonctions holomorphes, nous introduisons une méthode de Rashkovskii-Thomas et recherchons la limite de la fonction de Green pluricomplexe dans ce cas-là.

Dans le quatrième chapitre, nous allons étudier la convergence des fonctions de Green pluricomplexes à quatre pôles distincts qui tendent vers l'origine dans $\mathbb{C}^2$ dans le cas générique. Ensuite, nous allons étudier la limite de la famille des idéaux de fonctions holomorphes basés, de même, sur quatre points, dans le cas dégénéré. Enfin, en utilisant la notion de puissance des idéaux de fonctions holomorphes et la méthode de Rashkovskii-Thomas, nous donnons quelques estimations pour la limite des fonctions de Green pluricomplexes dans un cas particulier.

Mots-clefs

Fonction plurisousharmonique, fonction de Green pluricomplexe à plusieurs pôles, opérateur de Monge-Ampère complexe, disque analytique, idéaux de fonctions holomorphes, longueur d'un idéal, multiplicité de Hilbert-Samuel.

Abstract

The aim of this thesis is to study the convergence of pluricomplex Green functions on a bounded hyperconvex domain Ω in $\mathbb{C}^n$, with $0 \in \Omega$ and the convergence of some families of ideals in the space $\mathscr{O}\big(\Omega\big)$ of all holomorphic functions on Ω. The zero variety of each those ideals, consisting of all common zeros of the holomorphic functions in the ideal, is a finite set.

In the first chapter, we introduce some basic notions of potential theory in several complex variables and the pluricomplex Green function with simple logarithmic poles at finitely many points. Then, we study the convergence of these functions with simple logarithmic poles at finitely many points as the poles tend to a single point.

In the second chapter, we give a method to reduce the verification of the convergence of a family of ideals of holomorphic functions. More precisely, we prove two necessary and sufficient conditions for the convergence of the family of ideals.

The third chapter is devoted to the study of the convergence of pluricomplex Green functions based on three distinct poles in the particular case where all the poles tend to the origin along the same asymptotic direction. We begin by studying the limit of the family of ideals of holomorphic functions based on the same points, then we give some estimates for the upper and the lower limit of the pluricomplex Green functions. Finally, using the notion of powers of ideals of holomorphic functions, we introduce a method of Rashkovskii - Thomas and study the limit of the pluricomplex Green functions in this case.

In the fourth chapter, we study the convergence of pluricomplex Green functions with simple logarithmic poles at four points as the poles tend to 0 in $\mathbb{C}^2$ for the generic case. Then we study the limit of the family of ideals of holomorphic functions based on the same points for the degenerate case. Finally, using the notion of powers of ideals of holomorphic functions and the method of Rashkovskii - Thomas, we give some estimates for the limit of the pluricomplex Green functions for a particular case.

Keywords

Plurisubharmonic function, pluricomplex Green function, complex Monge-Ampère equation, analytic disks, ideals of holomorphic functions, length of an ideal, Hilbert-Samuel multiplicity.