THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier (UT3Paul Sabatier)*
Discipline ou spécialité : *Informatique*

Présentée et soutenue par *Farid Aïche*
Le *12 Juillet 2013*

Titre : *COMPARAISON D'INTERVALLES FLOUS POUR LA PROGRAMMATION MULTI-OBJECTIFS DANS L'INCERTAIN*

JURY
Pr. Sylvie Galichet, Professeur, Université de Savoie
Pr. Allel Hadj-Ali, Professeur, Université de Poitiers
Marie-Christine Lagasquie-Schiex, Professeur Université de Toulouse
D.Dubois Directeur de Recherches au CNRS

Ecole doctorale : *EDMITT*
Unité de recherche : *IRIT*
Directeur(s) de Thèse : *Didier Dubois*
Rapporteurs :
Pr. Sylvie Galichet, Université de Savoie
Pr. Allel Hadj-Ali, Université de Poitiers

COMPARAISON D'INTERVALLES FLOUS POUR lA
PROGRAMMATION MULTI-OBJECTIFS
DANS L'INCERTAIN

Résumé

Depuis plusieurs années, on considère que les deux sources d'incertitude principales sont le manque d'informations et la variabilité des phénomènes. On modélise alors les informations soit par des distributions de probabilité (informations aléatoires) soit par des ensembles flous (informations incomplètes). Dans pas mal de situations, les deux sources d'incertitude peuvent se trouver combinées. Les variables aléatoires floues proposent un bon formalisme pour cette combinaison.
Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa en programmation mathématique.
Ce travail s'évertue à faire avancer l'état de l'art dans ce domaine en proposant des résultats concernant les variables aléatoires floues dans le but de développer des approches pour la résolution d'un programme linéaire multiobjectifs en présence de ces dernières. On a alors, en premier lieu, étendu aux variables aléatoires floues, deux concepts connus en théorie de la décision, à savoir la dominance stochastique et la préférence statistique en les combinant avec des méthodes de comparaison d'intervalles flous, ces dernières généralisant les ordres d'intervalles. On a envisagé trois façons de comparer les intervalles flous : vus comme des distributions de possiblité ordinales, comme intervalles graduels ou comme intervalles aléatoires consonants.
On a, en second lieu, généralisé conjointement, aux variables aléatoires floues, les deux variantes du "chance constrained programming", l'une avec des coefficients flous due à Dubois, l'autre avec des coefficients aléatoires due à Charnes et Cooper selon trois versions : (i) en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et nécessité (version 1) ; (ii) en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues (version 2) ; et (iii) en combinant "chance-constrained programming" et comparaisons d'intervalles aléatoires (un intervalle flou peut être vu comme un intervalle aléatoire) (version 3). Dans le cas où les coefficients des contraintes sont purement flous ou purement aléatoires, se réduit à "chance constrained programming" avec des coefficients flous ou "chance constrained programming" avec des coefficients aléatoires. Cette généralisation permet de développer des approches pour la programmation linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro, discrètes, normales de type L-R ou discrètes de type L-R. On a, ensuite, établi les conditions de convexité des ensembles des solutions admissibles résultant de l'application de cette méthode à des contraintes floues stochastiques. C'est en quelque sorte une extension aux variables floues des conditions de convexité des ensembles des solutions admissibles résultant de l'application de "chance constrained programming" due à Charnes et Cooper en programmation linéaire stochastique.
Et enfin on a considéré des programmes linéaires multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues discrètes, normales au sens de Shapiro, discrètes de type L-R ou normales de type L-R, on distingue quatre cas, selon que les coefficients des objectifs sont déterministes, flous, aléatoires ou flous aléatoires. Pour la résolution, on peut appliquer pour tous les cas, "chance constrained programming" avec des coefficients flous aléatoires. Ou combiner selon le cas considéré, les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs déterministe, floue ou stochastique entre elles ou avec "chance constrained programming" avec des coefficients flous aléatoires.

Mots clés : variables aléatoires floues, probabilité, possibilité, nécessité, ordre des intervalles, comparaison d'intervalles flous, dominanace stochastique, préférence statistique, "chance constrained programming".

Abstract

In the recent years, it has been acknowledged that the two principal sources of uncertainty are the lack of information and the variability of phenomena. Then, one represents the information by probability distributions (random information) or by fuzzy sets (incomplete information).
In quite a lot of situations, both sources of uncertainty can be combined. Fuzzy random variables propose a good formalism for this combination.
These last years, works were realized in the simultaneous consideration of the fuzziness and the randomness in mathematical programming.
This work makes every effort to advance the state of the art in this domain by proposing results concerning the comparison of fuzzy random variables with the aim in developing approaches for the resolution of multiobjective linear programming problem in the presence of fuzzy random variables.
Then, firstly, one extends to fuzzy random variables two concepts known in decision theory, namely stochastic dominance and statistical preference, by combining them with methods of comparison of fuzzy intervals which generalize interval orders. One has envisaged three manners to compare fuzzy intervals : viewed as ordinal possibilty distributions, as gradual intervals or as consonant random intervals.
One has, secondly, generalized jointly, to fuzzy random variables, the two variants of chance constrained programming, the one with fuzzy coefficients due to Dubois, the other with random coefficients due to Charnes and Cooper, according to three versions :(i) by combining probability and possibility, or probability and necessity (version 1) ; (ii) by combining probability and scalar indices for comparing fuzzy quantities (version 2) ; and (iii) by combining chance-constrained programming and random interval comparisons (a fuzzy interval can be viewed as a random interval) (version 3). In the case where the coefficients of constraints are purely fuzzy or purely random, chance constrained programming with fuzzy random cefficients reduces to chance constrained programming with fuzzy coefficients or to chance constrained programming with random cefficients. This generalization allows to develop approaches for solving multiobjective linear programming problem in presence of fuzzy random variables, which can be normal as defined by Shapiro, discrete, normal of type L-R, or discrete of type L-R.
One has, thereafter, established the conditions of convexity of the set of feasible solutions resulting from the application of this method to fuzzy stochastic constraints. It is in a way, an extension, to fuzzy random variables, of the conditions of convexity of the set of feasible solutions resulting from the application of chance constrained programming due to Charnes and Cooper in stochastic linear programming.
Finally, one has proposed multiobjective linear programming problem in presence of fuzzy random variables which can be discrete, normal as defined by Shapiro, discrete of type L-R or normal of type L-R. One distinguishes four cases, as the coefficients of objectives are determinist, fuzzy, random or fuzzy random. To solve these problems, one can apply to all the cases, chance constrained programming with fuzzy random cefficients, or combine the techniques of deterministic, fuzzy or stochastic multiobjective linear programming between them, or with chance constrained programming with fuzzy random coefficients.

Key words : fuzzy random variables, probability, possibility, necessity, interval order, comparison of fuzzy intervals, stochastic dominance, statiscal preference, chance constrained programming.

REMERCIEMENTS

– Je tiens tout d'abord à remercier Didier Dubois, Directeur de recherche C.N.R.S à l'IRIT, de m'avoir aidé, en tant que co-encadrant, à finaliser ma thèse de doctorat de l'université de Tizi-Ouzou (Algérie). Dont l'intitulé du sujet est : sur la programmation linéaire multi-objectifs floue stochastique. Thèse soutenue le 17 Juin 2013.
– Je le remercie également de m'avoir proposé ce sujet de thèse de doctorat de l'université de Toulouse, de m'avoir encadré et donné goût à la recherche. Ses suggestions et ses critiques pertinentes m'ont beaucoup aidé dans l'avancement de mes travaux de recherche des deux thèses.

– Mes remerciements vont également à Marie-Christine Lagasquie-Schiex, professeur à l'université Paul Sabatier de Toulouse, de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

– Un grand Merci à mes deux rapporteurs Allel Hadj-Ali, professeur à l'université de Poitiers et Sylvie Galicher, Professeur à l'université de Savoie, pour la lecture de mon manuscrit et dont les critiques constructives m'ont permis d'en améliorer la qualité.

– Je tiens également à remercier tous les membres de l'équipe ADRIA et du personnel administratif et technique de l'IRIT pour leur hospitalité et leur gentillesse.

– Je tiens aussi à remercier Martine Labruyère, responsable des soutenances à l'école doctorale : EDMITT, de m'avoir aidé dans les formalités administratives de soutenance.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'une expérience ou d'un problème d'optimisation ou de décision qui se ramène à un programme mathématique, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Cette hypothèse est peu réaliste compte tenu du fait que ces dernières peuvent être imprécises avec une imprécision de nature floue ou aléatoire. C'est ce qui a motivé l'introduction de la programmation floue et la programmation stochastique. Beaucoup de travaux ont été réalisés en programmation floue ([36], [53], [54], [55], [59]) et en programmation stochastique ([40], [39], [41], [45]) .

Dans pas mal de situations, le flou et l'aléa peuvent se trouver combinés dans un programme mathématique, ce qui a donné naissance à la programmation floue stochastique.

Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme pour cette combinaison. Elles ont été introduites en premier lieu par Kwakernaak [44] qui les définit comme étant des variables aléatoires dont les valeurs sont des intervalles flous. C'est cette définition que l'on considère dans ce travail. Par la suite d'autres auteurs, tels que Kruse et Meyer [43], Puri et Ralescu [50] et récemment I. Couso et D. Dubois [20] ont donné d'autres interprétations de ce concept. Shapiro [56] a introduit les variables aléatoires floues normales.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa dans un contexte d'optimisation ([10], [65],[51], [52],[61], [49], [46], [42]). Il en existe dans la littérature, ceux traitant des cas des programmes mathématiques en présence de variables aléatoires floues dans les objectifs ([46], [42],[51], [52],[61]) et dans les contraintes ([51], [52],[61], [1],[7],[48]).

Ce travail s'évetue à faire avancer les débats dans ce domaine en proposant des résultats concernant les variables aléatoires floues dans le but de développer des approches pour la résolution d'un programme linéaire multiobjectifs en présence de ces dernières, à savoir :

1. les extensions, aux variables aléatoires floues, de la dominance stochastique et de la préférence statistique des variables aléatoires réelles, en deux étapes. La première consiste à les étendre des variables aléatoires réelles aux intervalles aléatoires, la deuxième, des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues.
2. généraliser conjointement, aux variables aléatoires floues, les deux variantes du chance constrained programming, l'une avec des coefficients flous due à Dubois [25], l'autre avec des coefficients aléatoires due à Charnes et Cooper [16], pour avoir : chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [7].

Ce travail est organisé comme suit : au chapitre 1, nous nous sommes limités volontairement aux rappels des prérequis pour la suite, à savoir : la comparaison d'intervalles de nombres réels d'une part, la dominance stochastique du premier ordre et la préférence statistique des variables aléatoires réelles d'autre part. Au chapitre 2, en nous basant sur l'ordre des intervalles de nombres réels, nous proposons d'étendre des variables aléatoires réelles aux intervalles aléatoires la dominance stochastique et la préférence statistique.

Etant donné que les valeurs des variables aléatoires floues sont des intervalles flous, nous avons donc recours à la comparaison d'intervalles flous. Il existe à ce sujet une abondante littérature, malheureusement trés dispersée avec des propositions souvent ad hoc. Certains auteurs comme Wang et Kerre [61] ont tenté d'organiser les méthodes existantes, en séparant celles qui substituent des nombres réels aux intervalles flous pour induire un ordre total, de celles qui construisent des relations floues

de dominance. Par ailleurs ils ont proposé quelques postulats que toute comparaison d'intervalles flous devrait respecter.
Au chapitre 3, nous avons considéré une autre voie possible pour classer les méthodes qui s'appuye sur le fait que les intervalles flous généralisent les intervalles, et représentent une forme d'incertitude, pour généraliser d'une part la comparaison d'intervalles flous, et d'autre part la comparaison de distributions de probabilités. Au chapitre 4, portant sur la combinaison du flou et de l'aléa qui est mieux représentée par les variables aléatoires floues, nous donnons les définitions des différents types de ces dernières que nous reprendrons au chapitre 5, et notamment au chapitre 6 comme données dans un programme linéaire multiobjectifs.
Au chapitre 5, nous proposons, en premier lieu, de généraliser la dominance stochastique aux variables aléatoires floues, en utilisant les α-coupes des ces dernières, les intervalles flous comme des distributions de possibilité ordinales d'une part et comme intervalles de nombres graduels d'autre part, et, en utilisant aussi les méthodes qui défuzzifient les intervalles flous pour les classer. Et enfin, nous proposons l'extension de la dominance stochastique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues de type L-R en nous nous appuyant sur les travaux de Chanas et col, qui consistent à généraliser l'ordre des intervalles de nombres réels aux intervalles flous du type L-R, donc en utilisant les indices de comparaison d'intervalles flous du type L-R dus à ces derniers.
Nous avons ainsi pu généraliser la dominance stochastique aux intervalles flous aléatoires, en considérant les intervalles flous comme des intervalles classiques aléatoires emboîtés. Dans nos articles précédents [2, 4, 3] nous avons étendu la dominance stochastique aux variables aléatoires floues en utilisant ces points de vue. En deuxième lieu, nous proposons de généraliser la préférence statistique aux variables aléatoires floues en utilisant ces mêmes points de vue. Mais seulement dans le cas des variables aléatoires floues de type L-R, en utilisant les indices de comparaison d'intervalles flous du type L-R dus à Chanas *et col.* [15, 12], nous proposons deux extensions de la préférence statistique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues de type L-R. L'une coincide avec la dominance stochastique entre ces indices qui sont des variables aléatoires rélles à valeurs dans l'intervalle $(0, 1]$, l'autre avec la préférence statistique. Nous montrons que l'une raffine l'autre. Dans notre article [6], nous avons proposé ces deux extensions.
Au chapitre 6, nous proposons chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [7] avec ses trois versions : (i) en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et necessité (version 1) ; (ii) en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues (version 2) ; et (iii) en combinant chance-constrained programming et comparaisons d'intervalles aléatoires (un intervalle flou peut être vu comme un intervalle aléatoire) (version 3), a pour but de transformer les contraintes en présence de variables aléatoires floues en des contraintes déterministes équivalentes.
Dans le cas où les coefficients des contraintes sont purement flous ou purement aléatoires, chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [7] se réduit à chance constrained programming with fuzzy coefficients [25] ou chance constrained programming with stochastic coefficients [16].
Ensuite nous considérons des programmes linéaires multiobjectifs flous stochastiques en présence de variables aléatoires floues discrètes, normales au sens de Shapiro, discrètes de type L-R ou normales de type L-R, nous distinguons quatre cas, selon que les coefficients des objectifs sont déterministes, flous, aléatoires ou flous aléatoires. Pour la résolution, nous pouvons appliquer pour tous les cas, chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [7]. Ou combiner selon le cas

considéré, les techniques de la programmation multiobjectifs déterministe, floue ou stochastique entre elles ou avec chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [7].
Ce travail se termine par une conclusion où nous répertorions les principaux résultats obtenus et nous indiquons quelques axes pour de futurs travaux.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, nous nous sommes limités aux rappels des notions prérequises pour la suite du travail, à savoir :

1. la comparaison d'intervalles de nombres réels,
2. la Comparaison de variables aléatoires réelles.

Nous proposons, dans ce travail, une généralisation conjointe, aux variables aléatoires floues, de ces deux comparaisons pour aboutir à la comparaison de variables aléatoires floues.

1.1 Comparaison d'intervalles de nombres réels

Soient $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ et $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ deux intervalles de nombres réels. Donc $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}$ and $\overline{b}$ sont des nombres réels tels que $\underline{a} \leq \overline{a}$ and $\underline{b} \leq \overline{b}$. Pour ordonner A et B, nous avons quatre relations $>_i, i = 1, 2, 3, 4,$ definies dans [31] comme suit :

Définition 1 *[31]*

1. $[\underline{a}, \overline{a}] >_1 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} > \overline{b}$ *(i.e.* $\forall x \in A, \forall y \in B, x > y$*)*
2. $[\underline{a}, \overline{a}] >_2 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} > \underline{b}$ *(i.e.* $\forall x \in A, \exists y \in B, x > y$*)*
3. $[\underline{a}, \overline{a}] >_3 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \overline{a} > \overline{b}$ *(i.e.* $\exists x \in A, \forall y \in B, x > y$*)*
4. $[\underline{a}, \overline{a}] >_4 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \overline{a} > \underline{b}$ *(i.e.* $\exists (x, y) \in A \times B, x > y$*)*

La relation $>_1$ est la plus forte ,$>_4$ est la plus faible,$>_2$ et $>_3$ sont les intermédiaires, d'où les implications suivantes :
Pour $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ et $B = [\underline{b}, \overline{b}]$, deux intervalles de nombres réels, nous avons :

1. $A >_1 B \Rightarrow A >_2 B \Rightarrow A >_4 B$
2. $A >_1 B \Rightarrow A >_3 B \Rightarrow A >_4 B$.

La relation $>_1$ est un ordre d'intervalle (Fishburn [33]).
Nous déduisons de la définition 1 que $A >_4 B \Longleftrightarrow \neg(B \geq_1 A)$.

1.1.1 Autres méthodes de comparaison d'intervalles de nombres réels

1. Extension intervalle de l'ordre usuel :
   $[\underline{a}, \overline{a}] >_c [\underline{b}, \overline{b}]$ si $\underline{a} \geq \underline{b}$ et $\overline{a} \geq \overline{b}$.
2. Subjective (pessimiste/optimiste Hurwicz) :
   $[\underline{a}, \overline{a}] >_\lambda [\underline{b}, \overline{b}]$ si $\lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a} \geq \lambda\underline{b} + (1-\lambda)\overline{b}$, $\lambda \in [0, 1)$.

Remarque 1 – $A >_c B \Longleftrightarrow (A \geq_2 B) \wedge (A \geq_3 B) \Longleftrightarrow \max([\underline{a}, \overline{a}], ([\underline{b}, \overline{b}]) = [\underline{a}, \overline{a}] \Longleftrightarrow \min([\underline{a}, \overline{a}], ([\underline{b}, \overline{b}]) = [\underline{b}, \overline{b}]$.
– $A >_c B \Longleftrightarrow A >_\lambda B, \forall \lambda \in [0, 1)$.

1.2 Comparaison de variables aléatoires réelles

Dans ce qui suit, nous rappelons que la comparaison de variables aléatoires peut s'effectuer de trois façons : la comparaison de valeurs moyennes, la comparaison des distributions cumulatives (dominance stochastique du premier ordre) et la préférence statistique.

1.2.1 Comparaison des valeurs moyennes des variables aléatoires réelles

Définition 2 *Soient a et b deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. a est dite dominée par b si $E(a) \leq E(b)$ où E représente l'espérance mathématique.*

1.2.2 Dominance stochastique du premier ordre

Le concept de la dominance stochastique du premier ordre consiste à comparer les distributions de probabilité de deux variables aléatoires a et b comme suit :

Définition 3 *Soient a et b deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. a est dite stochastiquement dominée par b si $P(\omega : a(\omega) > x) \leq P(\omega : b(\omega) > x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.*
On note $a \leq_{s.d} b$

Autement dit a est dite stochastiquement dominée par b si $F_a(x) \geq F_b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$; où F_a et F_b sont les fonctions de répartition de a et b respectivement.

1.2.3 Préférence statistique

Pour comparer deux variables aléatoires a et b, B. De Baets et H. De Meyer [21], en se basant sur la probabilité qu'une variable aléatoire a est plus grande qu'une autre b, ont proposé la relation binaire Q définie par $Q(a,b) = P\{\omega : a(\omega > b(\omega)\} + \frac{1}{2}P\{\omega : a(\omega) = b(\omega)\}$ dite relation de préférence statistique, qui vérifie la propriété de réciprocité $Q(a,b) + Q(b,a) = 1$.
Si $a(\omega), b(\omega)$ représentent des gains aléatoires liés à des choix de stratégies, la valeur de $P\{\omega : a(\omega) > b(\omega)\}$ représente la probabilité que le choix de a soit préférable à b. La relation binaire $>_{\alpha}^{Q}$ est définie, pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, par $a >_{\alpha}^{Q} b \Longleftrightarrow Q(a,b) \geq \alpha$. Et puisque $Q(a,b) + Q(b,a) = 1$, alors $Q(a,b) \geq \frac{1}{2}$ est équivalent à $Q(a,b) \geq Q(b,a)$, qui est équivalent à $P\{\omega : a(\omega) > b(\omega)\} \geq P\{\omega : b(\omega) > a(\omega)\}$. On dit alors que a est statistiquement préférable à b, d'où la définition suivante :

Définition 4 *Soient a et b deux variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*
On dit que a est statistiquement préférable à b, on note $a \geq^p b$ si $P(\omega : a(\omega) > b(\omega)) \geq P(\omega : b(\omega) > a(\omega))$

Proposition 1 *Soient $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}$ et $\overline{b}$ quatre variables aléatoires telles que $\forall \omega \in \Omega$, $\underline{a}(\omega) < \overline{a}(\omega)$ et $\underline{b}(\omega) < \overline{b}(\omega)$.*
On a alors :
- $\underline{a} \geq^p \overline{b} \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b} \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$
- $\underline{a} \geq^p \overline{b} \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b} \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$

Preuve. $\forall \omega \in \Omega, \underline{a}(\omega) < \overline{a}(\omega)$ et $\underline{b}(\omega) < \overline{b}(\omega)$, on a d'une part :
$\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \subset \left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \subset \{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\}$ et d'autre part
$\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \subset \{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \subset \{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\}$. Par cronséquent on obtient :

1. $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$
2. $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$.
   De la même manière, en remplaçant a par b et b par a, nous obtenons les inégalités suivantes :
3. $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$
4. $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$.

Nous avons :
- $\underline{a} \geq^p \overline{b} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}$, en utilisant les inégalités 4 et 2 établies ci-dessus, nous obtenons les implications suivantes : $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow$ $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$.

Autrement dit : $\underline{a} \geq^p \bar{b} \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b} \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

– Pour montrer que : $\underline{a} \geq^p \bar{b} \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \bar{b} \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$, il suffit de remplacer dans la preuve précédente $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\}$ et $P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\}$ par $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$ et $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}$ respectivement. Autrement dit utiliser les inégalités 3 et 1 établies ci-dessus.

.

La dominance stochastique du premier ordre et la préférence statistique sont deux concepts qui concernent en premier lieu les variables aléatoires réelles, nous allons dans ce travail les étendre aux intervalles aléatoires, ensuite aux variables aléatoires floues.

Chapitre 2

Comparaison d'intervalles aléatoires

Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre la dominance stochastique de premier ordre et la préférence statistique des variables aléatoires aux intervalles aléatoires.

2.1 Extension de la dominance stochastique aux intervalles aléatoires

Dans ce qui suit, nous reprenons l'extension de la dominance stochastique de premier ordre aux intervalles aléatoires établie par T. Denoeux [24], et nous proposons une extension directe en nous nous appuyant sur les quatre relations d'ordre des intervalles de nombres réelles. Ensuite, nous établirons les liens entre ces deux extensions.

2.1.1 Extension de la dominance stochastique aux intervalles aléatoires due à Denoeux [24]

Un intervalle aléatoire définissant une fonction de croyance, on peut relier ces notions à celles proposées par T. Denoeux [24]. Une fonction de croyance continue [57] est définie par une fonction de densité de masse $m(x, y) \geq 0$ si et seulement si $x \leq y$, attribuée à l'intervalle $A(\omega) = [x, y]$. On peut alors construire les fonctions cumulées :
Soit $A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega)]$, alors :

$$\begin{aligned}
Bel_A((-\infty,x]) &= P(A(\omega)\subseteq(-\infty,x]) \\
&= P(\overline{a}(\omega)\leq x) \\
Pl_A((-\infty,x]) &= P(A(\omega)\cap(-\infty,x]\neq\emptyset) \\
&= P(\underline{a}(\omega)\leq x).
\end{aligned}$$

T. Denoeux [24] a généralisé le concept de la dominance stochastique de premier ordre aux intervalles aléatoires comme suit :
il considère deux masses, m_A et m_B généralisées aux intervalles aléatoires $A(\omega)=[\underline{a}(\omega),\overline{a}(\omega)]$ et $B(\omega)=[\underline{b}(\omega),\overline{b}(\omega)]$ respectivement, i.e. $\forall c,d,c',d'\in\mathbb{R}$, $m_A([c,d])=P\{\omega:[\underline{a}(\omega),\overline{a}(\omega)]=[c,d]\}=P\{\omega:\underline{a}(\omega)=c,\overline{a}(\omega)=d\}$ et $m_B([c',d'])=P\left\{\omega:[\underline{b}(\omega),\overline{b}(\omega)]=[c',d']\right\}=P\left\{\omega:\underline{b}(\omega)=c',\overline{b}(\omega)=d'\right\}$.
On note leurs fonctions de croyance respectives par Bel_A et Bel_B et leurs fonctions de plausibilité respectives par Pl_A et Pl_B, où quelque soit l'intervalle C de nombres réels on a :
$Bel_A(C)=P\{\omega:[\underline{a}(\omega),\overline{a}(\omega)]\subseteq C\}$ et $Pl_A(C)=P\{\omega:[\underline{a}(\omega),\overline{a}(\omega)]\cap C\neq\emptyset\}$.
Soient $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ deux familles de probabilité associées respectivement à (Bel_A,Pl_A) et (Bel_B,Pl_B).
Quatre formes de généralisation de la dominance stochastique de premier ordre ont été définies dans [24] comme suit :

1. $m_A\leq_1 m_B$ si et seulement si $Pl_A(]x,+\infty[)\leq Bel_B(]x,+\infty[)$, $\forall x\in\mathbb{R}$
2. $m_A\leq_2 m_B$ si et seulement si $Bel_A(]x,+\infty[)\leq Bel_B(]x,+\infty[)$, $\forall x\in\mathbb{R}$
3. $m_A\leq_3 m_B$ si et seulement si $Pl_A[]x,+\infty[)\leq Pl_B(]x,+\infty[)$, $\forall x\in\mathbb{R}$
4. $m_A\leq_4 m_B$ si et seulement si $Bel_A(]x,+\infty[)\leq Pl_B(]x,+\infty[)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Etant donné que : $Pl_A(]x,+\infty[)=P\{\omega:[\underline{a}(\omega),\overline{a}(\omega)]\cap]x,+\infty[\neq\emptyset\}=P\{\omega:\overline{a}(\omega)>x\}$ et $Bel_A(]x,+\infty[)=P\{\omega:[\underline{a}(\omega),\overline{a}(\omega)]\subseteq]x,+\infty[\}=P\{\omega:\underline{a}(\omega)>x\}$, de la même manière, nous avons $Pl_B(]x,+\infty[)=P\left\{\omega:\overline{b}(\omega)>x\right\}$ et $Bel_B(]x,+\infty[)=P\{\omega:\underline{b}(\omega)>x\}$, alors nous obtenons les équivalences suivantes :

1. $Pl_A(]x,+\infty[)\leq Bel_B(]x,+\infty[)\,\forall x\in\mathbb{R}\iff P\{\omega:\overline{a}(\omega)>x\}\leq P\{\omega:\underline{b}(\omega)>x\}\,\forall x\in\mathbb{R}\iff\overline{a}\leq_{s.d}\underline{b}$
2. $Bel_A(]x,+\infty[)\leq Bel_B(]x,+\infty[)\,\forall x\in\mathbb{R}\iff P\{\omega:\underline{a}(\omega)>x\}\leq P\{\omega:\underline{b}(\omega)>x\}\,\forall x\in\mathbb{R}\iff\underline{a}\leq_{s.d}\underline{b}$
3. $Pl_A[]x,+\infty[)\leq Pl_B(]x,+\infty[)\,\forall x\in\mathbb{R}\iff P\{\omega:\overline{a}(\omega)>x\}\leq P\left\{\omega:\overline{b}(\omega)>x\right\}\,\forall x\in\mathbb{R}\iff\overline{a}\leq_{s.d}\overline{b}$
4. $Bel_A(]x,+\infty[)\leq Pl_B(]x,+\infty[)\,\forall x\in\mathbb{R}\iff P\{\omega:\underline{a}(\omega)>x\}\leq P\left\{\omega:\overline{b}(\omega)>x\right\}\,\forall x\in\mathbb{R}\iff\underline{a}\leq_{s.d}\overline{b}$

2.1.2 Extension directe de la dominance stochastique aux intervalles aléatoires

En nous basant sur la définition 3 de la dominance stochastique des variables aléatoires établie à la section 1.2 et des quatre relations d'ordre des intervalles de nombres réels, nous définissons la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

Définition 5 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
On dit qu'un intervalle aléatoire A *est* (i, j) *stochastiquement dominé par un intervalle aléatoire* B *si* $P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : B(\omega) >_j x\} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$.
On note $A \leq^{s.d}_{(i,j)} B$

2.1.2.1 Propriétés

Nous établissons en premier lieu les résultats suivants utiles pour la suite.

Proposition 2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega)]$ *un intervalle aléatoire, où* $\underline{a}(\omega)$ *et* $\overline{a}(\omega)$ *sont des variables aléatoires réelles telles que* $\forall \omega \in \Omega$, $\underline{a}(\omega) < \overline{a}(\omega)$.
On a alors $\forall x \in \mathbb{R} : P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$.
Autrement dit $\forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{3, 4\}$ *on a :* $P\{\omega : A(\omega) >_i (x)\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\} \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega)]$ un intervalle aléatoire, où $\underline{a}(\omega)$ et $\overline{a}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles telles que $\forall \omega \in \Omega$, $\underline{a}(\omega) < \overline{a}(\omega)$.
Nous avons : Pour $i \in \{1, 2\}$, $A(\omega) >_i x \iff \underline{a}(\omega) > x$ et pour $j \in \{3, 4\}$, $A(\omega) >_j x \iff \overline{a}(\omega) > x$. Nous obtenons $\forall x \in \mathbb{R}$: pour $i \in \{1, 2\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_i x\} = P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\}$ et pour $j \in \{3, 4\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_j x\} = P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$.
Etant donné que $\forall \omega \in \Omega$, $\underline{a}(\omega) < \overline{a}(\omega)$, donc $\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \subset \{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$.
Par conséquent, nous obtenons $\forall x \in \mathbb{R} : P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$.
Autrement dit : pour $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{3, 4\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}$.

En tenant compte de la définition 5 (section 2.1.2) de la dominance stochastique des intervalles aléatoires et de la définition 1 (section 1.1) de l'ordre des intervalles, nous établissons, en utilisant l'inégalité de la proposition 2, que pour $i \in \{1, 2\}$ et pour $j \in \{3, 4\}$, nous avons : la relation $\leq^{s.d}_{(j,i)}$ est la plus forte, $\leq^{s.d}_{(i.j)}$ la plus faible , $\leq^{s.d}_{(j.j)}$ et $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ sont les intermédiaires.
D'où les implications suivantes :

Proposition 3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et,* A, B *deux intervalles aléatoires.*
$\forall i \in \{1,2\}$, $\forall j \in \{3,4\}$ *on a :*

1. $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(j,j)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} B$

2. $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,i)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} B$

Preuve. En utilisant l'ordre des intervalles, nous obtenons que pour $i \in \{1,2\}$, $A(\omega) >_i x \Longleftrightarrow \underline{a}(\omega) > x$ et pour $j \in \{3,4\}$, $A(\omega) >_j x \Longleftrightarrow \overline{a}(\omega) > x$, d'où pour $j \in \{3,4\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_j x\} = P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$ et pour $i \in \{1,2\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_i x\} = P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\}$.
Alors nous avons pour $i \in \{1,2\}$ et pour $j \in \{3,4\}$, $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_j x\} \leq P\{\omega : B(\omega) >_i x\}, \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\}, \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$.
D'où en tenant compte de l'inégalité de la proposition 2, nous obtenons que :
$\forall x \in]-\infty, +\infty[$, $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > x\right\}$.
Nous déduisons alors que $\forall x \in]-\infty, +\infty[$:

1. $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > x\right\} \Longrightarrow P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > x\right\}$.
   i.e. $\forall i \in \{1,2\}$, $\forall j \in \{3,4\}$, $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(j,j)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} B$
2. $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \Longrightarrow P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \Longrightarrow P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > x\right\}$.
   i.e. $\forall i \in \{1,2\}$, $\forall j \in \{3,4\}$, $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,i)} B \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} B$.

2.1.2.2 Transitivité

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{I}_a$ l'ensembles des intervalles aléatoires. Nous considérons deux cas, l'un où i=j et l'autre où $i \neq j$ comme suit :

1. cas où i=j
   $\forall i \in \{1,2,3,4\}$ la relation $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ est transitive sur $\mathcal{I}_a$ comme suit :
   Proposition 4 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $A, B, C \in \mathcal{I}_a$.
   Alors : $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, *on a* $A \leq^{s.d}_{(i,i)} B$ *et* $B \leq^{s.d}_{(i,i)} C \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,i)} C$.

   Preuve. Evidente.
2. cas où $i \neq j$:
   nous définissons une autre forme de transitivité comme suit :
   Définition 6 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $A, B, C \in \mathcal{I}_a$ *et* $l, k \in \{1,2,3,4\}$.
   On dit que la relation $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a$*, si* $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$, *on a :*
   $A \leq^{s.d}_{(i,l)} B$ *et* $B \leq^{s.d}_{(k,j)} C \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} C$.
   Nous distinguons deux cas, l'un où $k = l$ et l'autre où $k \neq l$ comme suit :
   – Cas où $k = l$:
     dans ce cas, $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$ la relation $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ est (l,l)-transitive sur $\mathcal{I}_a$, $\forall l \in \{1,2,3,4\}$ comme suit :

Proposition 5 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $A, B, C \in \mathcal{I}_a$.
Alors $\forall i, j, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, *on a* $A \leq^{s.d}_{(i,l)} B$ *et* $B \leq^{s.d}_{(l,j)} C \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} C$.

Preuve. Evidente.

– Cas où $k \neq l$:
dans ce cas, $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ est (l, k)-transitive sur $\mathcal{I}_a$, $\forall l \in \{1, 2\}$ et $\forall k \in \{3, 4\}$ comme suit :
Proposition 6 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $A, B, C \in \mathcal{I}_a$.
$\forall l \in \{1, 2\}$, $\forall k \in \{3, 4\}$ *et* $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, *on a* $A \leq^{s.d}_{(i,l)} B$ *et* $B \leq^{s.d}_{(k,j)} C \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} C$.

Preuve. Nous avons : $A \leq^{s.d}_{(i,l)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_l x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ et $A \leq^{s.d}_{(k,j)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_k x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}, \forall x \in \mathbb{R}$. En vertu de la proposition 2, nous avons :
$\forall l \in \{1, 2\}$ et $\forall k \in \{3, 4\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_l x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_k x\}, \forall x \in \mathbb{R}$.
Alors $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\forall l \in \{1, 2\}$, $\forall k \in \{3, 4\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ nous avons :
$P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_l x\}$ et $P\{\omega : A(\omega) >_k x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}$ impliquent $P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}$.
i.e. $A \leq^{s.d}_{(i,l)} B$ et $B \leq^{s.d}_{(k,j)} C \Longrightarrow A \leq^{s.d}_{(i,j)} C$.

Remarque 2
1. *Cas où* $i = j$:
   – $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a$ *pour les mêmes conditions que celles des propositions 5 et 6.*
   – *Si de plus* $l = k = i$, *alors :* $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ *est* (i, i)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a \Longleftrightarrow \leq^{s.d}_{(i,i)}$ *est transitive sur* $\mathcal{I}_a$.
2. *Soient* $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $l = k$ *(avec* $(l, k) \in \{1, 2, 3, 4\}$*) ou* $l \neq k$ *(avec* $l \in \{1, 2\}$ *et* $k \in \{3, 4\}$*), le lecteur peut montrer aisément que :*
   – *la* (l, k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(i,j)}$, $i \in \{3, 4\}$ *est plus forte que la* (l, k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(m,j)}$, $m \in \{1, 2\}$ *sur* $\mathcal{I}_a$ *i.e.*
   $\leq^{s.d}_{(i,j)}, i \in \{3, 4\}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(m,k)}, m \in \{1, 2\}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a$
   – *la* (l, k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(j,i)}$, $i \in \{1, 2\}$ *est plus forte que la* (l, k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(j,n)}$, $n \in \{3, 4\}$ *sur* $\mathcal{I}_a$ *i.e.*
   $\leq^{s.d}_{(j,i)}, i \in \{1, 2\}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(j,n)}, n \in \{3, 4\}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a$
   – *Par conséquent la* (l, k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(i,j)}, i \in \{3, 4\}, j \in \{1, 2\}$ *est plus forte que la* (l, k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(m,n)}, m \in \{1, 2\}, n \in \{3, 4\}$ *sur* $\mathcal{I}_a$ *i.e.*
   $\leq^{s.d}_{(i,j)}, i \in \{3, 4\}, j \in \{1, 2\}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(m,n)}, m \in \{1, 2\}, n \in \{3, 4\}$ *est* (l, k)*-transitive sur* $\mathcal{I}_a$

2.1.2.3 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires

En tenant compte de la définition 5 (section 2.1.2) de la dominance stochastique des intervalles aléatoires, de celle (définition 3) des variables aléatoires réelles et de la définition 1 (section 1.1) de l'ordre des intervalles, nous établissons les équivalences entre la dominance stochastique des intervalles aléatoires et celle de leurs bornes qui sont des variables aléatoires réelles comme suit :

Proposition 7 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ *deux intervalles aléatoires.*
$\forall i \in \{1,2\}$ *et* $\forall j \in \{3,4\}$ *on a :*

1. $A \leq^{s.d}_{(i,j)} B \Longleftrightarrow \underline{a} \leq_{s.d} \overline{b}$
2. $A \leq^{s.d}_{(j,j)} B \Longleftrightarrow \overline{a} \leq_{s.d} \overline{b}$
3. $A \leq^{s.d}_{(i,i)} B \Longleftrightarrow \underline{a} \leq_{s.d} \underline{b}$
4. $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longleftrightarrow \overline{a} \leq_{s.d} \underline{b}$

Preuve. Pour $i \in \{1,2\}$, nous avons $A(\omega) >_i x \Longleftrightarrow \underline{a}(\omega) > x$ alors $P\{\omega : A(\omega) >_i x\} = P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\}$ et pour $j \in \{3,4\}$, nous avons $A(\omega) >_j x \Longleftrightarrow \overline{a}(\omega) > x$ alors $P\{\omega : A(\omega) >_j x\} = P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$.
Pour la preuve de cette proposition, il suffit d'appliquer la définition 5 et remplacer :
pour $i \in \{1,2\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_i x\}$ et $P\{\omega : B(\omega) >_i x\}$ par $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\}$ et $P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\}$ respectivement.
Et pour $j \in \{3,4\}$, $P\{\omega : A(\omega) >_j x\}$ et $P\{\omega : B(\omega) >_j x\}$ par respectivement $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\}$ et $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > x\right\}$.

2.1.2.4 Liens avec les comparaisons de fonctions de croyance de Denoeux

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ deux intervalles aléatoires.
$\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$ on a :

1. $A \leq^{s.d}_{(i,j)} B \Longleftrightarrow Pl_A(]x, +\infty[) \leq Bel_B(]x, +\infty[), \forall x \in \mathbb{R}$
2. $A \leq^{s.d}_{(j,j)} B \Longleftrightarrow Bel_A(]x, +\infty[) \leq Bel_B(]x, +\infty[), \forall x \in \mathbb{R}$
3. $A \leq^{s.d}_{(i,i)} B \Longleftrightarrow Pl_A[]x, +\infty[) \leq Pl_B(]x, +\infty[), \forall x \in \mathbb{R}$
4. $A \leq^{s.d}_{(j,i)} B \Longleftrightarrow Bel_A(]x, +\infty[) \leq Pl_B(]x, +\infty[), \forall x \in \mathbb{R}$

2.2 Extension de la préférence statistique aux intervalles aléatoires

En nous basant sur la définition 4 (section 1.2.3) de la préférence statistique des variables aléatoires et sur les quatre relations d'ordre des intervalles, nous définissons la préférence statistique des intervalles aléatoires comme suit :

Définition 7 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* A, B *deux intervalles aléatoires et* $i, j \in \{1, 2, 3, 4, \}$.
On dit que A *est* (i, j) *statistiquement préférable à* B*, on note* $A \geq^p_{(i,j)} B$*, si :*
$P\{\omega : A(\omega) >_i B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_j A(\omega)\}$.

En tenant compte du fait que l'odre $>_1$ est le plus fort ,$>_4$ est le plus faible,$>_2$ et $>_3$ sont les intermédiaires, nous établissons la proposition suivante utile pour la démonstration, par la suite, d'autres propositions.

Proposition 8 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* A, B *deux intervalles aléatoires.*
On a alors $\forall i \in \{2, 3\}$ *:*
$P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : A(\omega) >_i B(\omega)\} \geq P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\}$.

Preuve. Nous avons vu au chapitre 1 que pour ω donné, et $i \in \{2, 3\}$ nous avons :
$A(\omega) >_1 B(\omega) \Longrightarrow A(\omega) >_i B(\omega) \Longrightarrow A(\omega) >_4 B(\omega)$, alors :
$\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\} \subset \{\omega : A(\omega) >_i B(\omega)\} \subset \{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\}$.
Par conséquent nous obtenons que :
$P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_i B(\omega)\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\}, \forall i \in \{2, 3\}$

A partir de la définition 7 de la préférence statistique des intervalles aléatoires et des relations d'inégalités de proposition 8, nous établissons que d'une part $\geq^p_{(1,.)}$ est la plus forte, $\geq^p_{(4,.)}$ est la plus faible et $\geq^p_{(i,.)}, i \in \{2, 3\}$ sont les intermédiaires. Et d'autre part $\geq^p_{(.,4)}$ est la plus forte, $\geq^p_{(.,1)}$ est la plus faible et $\geq^p_{(.,j)}, j \in \{2, 3\}$ sont les intermédiaires. D'où les implications suivantes :

Proposition 9 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* A, B *deux intervalles aléatoires.*
$\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$ *on a :*

1. $A \geq^p_{(1,j)} B \Rightarrow A \geq^p_{(i,j)} B \Rightarrow A \geq^p_{(4,j)} B$ *pour tout* $i \in \{2, 3\}$.
2. $A \geq^p_{(j,4)} B \Rightarrow A \geq^p_{(j,i)} B \Rightarrow A \geq^p_{(j,1)} B$ *pour tout* $i \in \{2, 3\}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition 7 de la préférence statistique des intervalles aléatoires et ensuite utiliser les inégalités de la proposition 8 comme suit :
nous avons d'une part par définition que $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$:
$A \geq^p_{(1,j)} B \iff P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_j A(\omega)\}$ et d'autre part, en vertu de la proposition 8, que $P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : A(\omega) >_i B(\omega)\} \geq P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\}, \forall i \in \{2, 3\}$. Il s'ensuit alors que $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$:
$P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_j A(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_i B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_j A(\omega)\} \Longrightarrow$
$P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_j A(\omega)\}$ avec $i \in \{2, 3\}$.

Autrement dit que $\forall j \in \{1,2,3,4\}$: $A \geq^p_{(1,j)} B \Rightarrow A \geq^p_{(i,j)} B \Rightarrow A \geq^p_{(4,j)} B$ pour tout $i \in \{2,3\}$.
De même pour l'item 2, nous avons $\forall j \in \{1,2,3,4\}$:
$A \geq^p_{(j,4)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_j B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_4 A(\omega)\}$ et
$P\{\omega : A(\omega) >_j B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_4 A(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_j B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_i A(\omega)\} \Longrightarrow$
$P\{\omega : A(\omega) >_j B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_1 A(\omega)\}$ avec $i \in \{2,3\}$.
Autrement dit que $\forall j \in \{1,2,3,4\}$: $A \geq^p_{(j,4)} B \Rightarrow A \geq^p_{(j,i)} B \Rightarrow A \geq^p_{(j,1)} B$ pour tout $i \in \{2,3\}$.

2.2.1 Expressions en termes de préférence statistique des variables aléatoires

A partir de la définition 7 de la préférence statistique de intervalles aléatoires, de la définition 3 de la préférence statistique de variables aléatoires et de la définition 1 de l'ordre des intervalles, nous établissons aisément les équivalences entre la préférence statistique des intervalles aléatoires et celle de leurs bornes qui sont des variables aléatoires comme suit :
Soient A et B deux intervalles aléatoires telles que $A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega)]$ et $B(\omega) = [\underline{b}(\omega), \overline{b}(\omega)]$ où $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}$ et $\overline{b}$ variables aléatoires avec
$P\{\omega : \underline{a}(\omega) < \overline{a}(\omega)\} = P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) < \overline{b}(\omega)\right\} = 1$.

Proposition 10 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et A, B deux intervalles aléatoires. On a alors :*

1. $A \geq^p_{(2,2)} B \Longleftrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b}$
2. $A \geq^p_{(3,3)} B \Longleftrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b}$
3. $A \geq^p_{(1,4)} B \Longleftrightarrow \underline{a} \geq^p \overline{b}$
4. $A \geq^p_{(4,1)} B \Longleftrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$

Preuve.

1. $A \geq^p_{(2,2)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_2 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_2 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \Longleftrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b}$.
2. $A \leq^p_{(3,3)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_3 B(\omega)\} \geq P\{\omega / B(\omega) >_3 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \Longleftrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b}$.
3. $A \geq^p_{(1,4)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_4 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \Longleftrightarrow \underline{a} \geq^p \overline{b}$.
4. $A \geq^p_{(4,1)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_1 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\} \Longleftrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

2.2.2 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires

Nous avons pu établir pour certains indices i et$j$ les équivalences entre la préférence statistique des intervalles aléatoires et la préférence statistique de leurs bornes qui sont des variables aléatoires. Pour d'autres, nous établissons les liens suivants :

Proposition 11 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et A, B deux intervalles aléatoires. On a alors :*

1. $A \geq^p_{(1,1)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$
2. $A \geq^p_{(1,2)} B \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b}$
3. $A \geq^p_{(1,3)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b}$
4. $A \geq^p_{(2,4)} B \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b}$
5. $A \geq^p_{(3,4)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b}$
6. $\forall j = 1, 3,\ A \geq^p_{(2,j)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$
7. $\forall j = 1, 2,\ A \geq^p_{(3,j)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$
8. $\forall j = 2, 3, 4,\ A \geq^p_{(4,j)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$

Preuve. Il suffit d'utiliser les inégalités suivantes : (voir preuve de la proposition 1 du chapitre 1),
$P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$ (1) et
$P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$ (2).
De la même manière, en remplaçant dans ces deux iinégalités (1) et (2) a par b et b par a, nous obtenons respectivement :
$P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}$ (3) et
$P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}$ (4).

1. $A \geq^p_{(1,1)} B \Longleftrightarrow P\left\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : B(\omega) >_1 A(\omega)\right\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (2) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$, nous obtenons que :
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(1,1)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.
2. $A \geq^p_{(1,2)} B \Longleftrightarrow P\left\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : B(\omega) >_2 A(\omega)\right\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (2) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\}$, nous obtenons que :
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(1,2)} B \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b}$.

3. $A \geq^p_{(1,3)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_1 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_3 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (1) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$, nous obtenons que :
   $P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(1,3)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b}$.
4. $A \geq^p_{(2,4)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_2 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_4 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (4) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\}$, nous obtenons que :
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(2,4)} B \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \underline{b}$.
5. $A \geq^p_{(3,4)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_3 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_4 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (3) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}$, nous obtenons que :
   $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(3,4)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \overline{b}$.
6. Nous considérons $A \geq^p_{(2,j)} B$ avec $j = 1, 3$.

   Pour $j = 1$, nous avons :
   $A \geq^p_{(2,1)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_2 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_1 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (1) à savoir que $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\}$, nous obtenons que :
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(2,1)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.
   - Pour $j = 3$, nous avons :
   $A \geq^p_{(2,3)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_2 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_3 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}.$
   Ainsi en utilisant les inégalités (1) et (3) à savoir que $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\}$ et $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$, nous obtenons que :
   $P\{\omega : \underline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(2,3)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.
7. Nous considérons $A \geq^p_{(3,j)} B$ avec $j = 1, 2$.

   Pour $j = 1$, nous avons :
   $A \geq^p_{(3,1)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_3 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_1 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
   $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}.$
   Ainsi en utilisant l'inégalité (1) à savoir que $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$, nous obtenons que :
   $P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}.$
   Autrement dit : $A \geq^p_{(3,1)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

– Pour $j = 2$, nous avons :
$A \geq^p_{(3,2)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_3 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_2 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
$P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\}$.
Ainsi en utilisant les inégalités (1) et (3) à savoir que $P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$ et $P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$, nous obtenons que :
$P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$.
Autrement dit : $A \geq^p_{(3,2)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

8. Nous considérons $A \geq^p_{(4,j)} B$ avec $j = 2, 3, 4$.

Pour $j = 2$, nous avons :
$A \geq^p_{(4,2)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_2 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
$P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\}$.
Ainsi en utilisant l'inégalité (4) à savoir que $P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$, nous obtenons que :
$P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$.
Autrement dit : $A \geq^p_{(4,2)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

– Pour $j = 3$, nous avons :
$A \geq^p_{(4,3)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_3 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
$P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\}$.
Ainsi en utilisant l'inégalité (3) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$, nous obtenons que :
$P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$.
Autrement dit : $A \geq^p_{(4,3)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

– Pour $j = 4$, nous avons :
$A \geq^p_{(4,4)} B \Longleftrightarrow P\{\omega : A(\omega) >_4 B(\omega)\} \geq P\{\omega : B(\omega) >_4 A(\omega)\} \Longleftrightarrow$
$P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}$.
Ainsi en utilisant l'inégalité (3) à savoir que $P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$, nous obtenons que :
$P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\} \Longrightarrow P\{\omega : \overline{a}(\omega) > \underline{b}(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > \overline{a}(\omega)\}$.
Autrement dit : $A \geq^p_{(4,4)} B \Longrightarrow \overline{a} \geq^p \underline{b}$.

Ces extensions de la dominance stochastique et la préférence statistique des variables aléatoires aux intervalles aléatoires que nous venons d'établir pourront servir par la suite comme première étape quant aux extensions de la dominance stochastique et de la préférence statistique des variables aléatoires réelles aux variables aléatoires floues.

Chapitre 3

Comparaison d'intervalles flous

Dans ce chapitre, nous rappelons les quatre visions des intervalles flous. Ensuite nous reprenons, à partir de ces dernières et selon chacune des trois premières visions, les méthodes de construction des relations floues de dominance.
Par ailleurs, nous considérons quatre indices de comparaison de quantités floues parmi ceux présentés dans Wang et Kerre [60].

3.1 Quatre visions des intervalles flous

Un intervalle flou peut être vu comme une généralisation d'un intervalle et une relaxation de la notion de distribution de probabilité. Plus précisément, il existe quatre interprétations de base d'un intervalle flou [27] comme suit :

1. une distribution de possibilité ordinale [30] ;
2. un intervalle aléatoire consonant [15] ;
3. un intervalle de nombres graduels [34] ;
4. une famille de mesure de probabilités [26].

que nous reprenons comme suit :

3.1.1 Intervalle flou vu comme une distribution de possibilité ordinale [30]

Dans ce qui suit, nous rappelons en premier lieu la distribution de possibilité, ensuite l'incertitude possibiliste dans le cas d'un intervalle net, puis généralisée à un intervalle flou, d'où la vision de ce dernier comme distribution de possibilité.

1. Distribution de possibilité [30] :
   une distribution de possibilité est une représentation d'un état de connaissance d'un agent relatif à l'état du monde comme suit : on considère un référentiel U qui est l'ensemble d'états du monde, une valeur mal connue X qui est à valeur dans U et un ensemble totalement ordonné L qui est l'echelle de plausibilité. Une distribution de possibilité π_X attachée à X est une fonction de U dans L, telle que $\forall u$, $\pi_X(u) \in L$ et $\exists u$, $\pi_X(u) = 1$.

2. Incertitude possibiliste [30] :
   - soit E est un intervalle net et A un événement :
     si on sait seulement que $x \in E$, alors :
     - l'événement A est possible si $A \cap E \neq \phi$
     - l'événement A est certain si$A \subset E$

     sont caractérisés par respectivement la mesure de possibilité Π et la mesure de nécéssité N comme suit :
     - $\Pi(A) = 1$ si l'événement A est possible (i.e. $A \cap E \neq \phi$) et $\Pi(A) = 0$ sinon (i.e. $A \cap E = \phi$)
     - $N(A) = 1$ si l'événement A est certain (i.e. $A \subset E$) et $N(A) = 0$ sinon (i.e. si A n'est pas inclus dans E).

     La mesure de possibilité Π se définit à partir de d'une distribution de possibilité π comme suit :
     $\Pi(A)$ et $N(A)$ sont définies par : $\Pi(A) = max\{\pi(u), u \in A\}$ et $N(A) = min\{1 - \pi(u), u \notin A\}$.
   - cas où E est un intervalle flou :
     Si E est un intervalle flou, on le note $\widetilde{E}$, sa fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{E}}$ peut être interprétée comme une distribution de possibilité telle que $\mu_{\widetilde{E}}(u) = \pi_X(u)$ où π_X , dans ce cas, est définie de $U = \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. Autrement dit le degré d'appartenance de u à $\widetilde{E}$ c'est le degré de possibilité pour X d'être égal à u.
     Par conséquent $\Pi_{\widetilde{E}}(A) = max\left\{\mu_{\widetilde{E}}(u), u \in A\right\}$ et $N_{\widetilde{E}}(A) = min\left\{1 - \mu_{\widetilde{E}}(u), u \notin A\right\}$.

3.1.2 Intervalle flou vu comme un intervalle aléatoire consonant [15]

Dubois et Prade [29] voient un intervalle flou $\widetilde{A}$ comme une sorte d'intervalle aléatoire : $[\underline{a}^\xi, \overline{a}^\xi]$ où ξ est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et telle que pour chaque $\xi = \alpha$, on obtient l'α-coupe $\widetilde{A}^\alpha$ de $\widetilde{A}$ comme réalisation. Dans ce cas, $\widetilde{A}$ est vu comme un intervalle aléatoire à réalisations emboîtées.
Chanas et Nowakowski [13] considèrent la même vision : $[\underline{a}^\xi, \overline{a}^\zeta]$ mais avec deux variables aléatoires uniformes ξ et ζ sur $[0, 1]$ qui peuvent être dépendantes $\xi = \zeta$ ou indépendantes $\xi \neq \zeta$. Dans le cas de dépendance, on retrouve pour chaque $\xi = \zeta = \alpha$, l'α-coupe $\widetilde{A}^\alpha$ de $\widetilde{A}$ comme réalisation.
Chanas et col [14]) considèrent la même vision que Chanas et Nowakowski [13] pour un intervalle flou $\widetilde{A} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R}$ de type L-R. Autrement dit, ils considèrent les deux variables aléatoires ξ et ζ uniformes sur $[0, 1]$, de telle sorte que la réalisation obtenue pour chaque $\xi = \zeta = \alpha$, est l'α-coupe $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a} - L^{-1}(\alpha)\delta^a, \overline{a} + R^{-1}(\alpha)\gamma^a]$, où L^{-1} et R^{-1} sont les fonctions réciproques de L et R respectivement. Les fonctions L et R étant continues. Dans ce cas, $\widetilde{A}$ est vu comme un intervalle

aléatoire : $[\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a, \overline{a} + R^{-1}(\zeta)\gamma^a]$.

3.1.3 Intervalle flou vu comme un intervalle de nombres graduels [34]

Définition 8 *[34]*
Un nombre graduel $\tilde{r}$ est une application $\tilde{r} : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'intervalle $[0,1]$ dans l'ensemble des nombres réels R telle que pour tout $\alpha \in (0,1]$ on associe le nombre réel $\tilde{r}(\alpha) = r_\alpha$.

Un exemple typique de nombre graduel est l'inverse de la fonction de répartition F^{-1} utilisée dans les simulations de Monte-Carlo.

Un intervalle flou $\widetilde{A}$ peut donc être vu comme un intervalle standard, de nombres graduels qui sont des éléments pris dans chaque α-coupe de $\widetilde{A}^\alpha$, borné par $\underline{\tilde{a}}$ et $\overline{\tilde{a}}$ [34] :

$$\widetilde{A} = \{\tilde{r} : \underline{a}_\alpha \leq \tilde{r}(\alpha) \leq \overline{a}_\alpha, \forall \alpha \in (0,1]\} = \{\tilde{r} : \underline{\tilde{a}} \leq \tilde{r} \leq \overline{\tilde{a}}\} = \{\tilde{r} : \tilde{r} \in \widetilde{A}\}.$$

Où les nombres graduels $\underline{\tilde{a}}$ et $\overline{\tilde{a}}$ sont définies par les applications $\alpha \mapsto \underline{a}_\alpha$ et $\alpha \mapsto \overline{a}_\alpha$.

3.1.4 Intervalle flou vu comme une famille de mesures de probabilité

Nous avons vu à la section 3.1.1 que la fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}$ d'un intervalle flou $\widetilde{A}$ représente la distribution de possibilité associée à la mesure de possibilité $\Pi_{\widetilde{A}}$. Cette dernière peut être considérée comme la borne supérieure de l'ensemble des mesures de probabilité satsfaisant à la condition $P(\widetilde{A}^\alpha) \geq 1 - \alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$ où $\widetilde{A}^\alpha$ est l'α-coupe de $\widetilde{A}$. Donc un intervalle flou $\widetilde{A}$ peut être vu comme un ensemble de mesures de probabilité comme suit :
La mesure de possibilité $\Pi_{\widetilde{A}}$ et la mesure de nécessité $N_{\widetilde{A}}$ associées à la distribution de possibilité $\mu_{\widetilde{A}}$, peuvent être vues comme respectivement la borne supérieure P^* et la borne inférieure P_* de la probabilité P, au sens de Dempster, qui appartient à l'ensemble des probabilités $\mathcal{P}$. Nous rappelons que si $A \subset R$, $\Pi_{\widetilde{A}}(A) = sup \left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), x \in A\right\}$ et $N_{\widetilde{A}}(A) = inf \left\{1 - \mu_{\widetilde{A}}(x), x \notin A\right\}$.
les fonctions de répartition haute F^* et basse F_* relatives respectivement à P^* et P_* sont définies par : $F^*(x) = \Pi_{\widetilde{A}}(] - \infty, x])$ et $F_*(x) = N_{\widetilde{A}}(] - \infty, x])$.
Dans le cas où $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$, $si\, x \in [\underline{a}, \overline{a}]$ on obtient :

$$F^*(x) = \{ \begin{array}{ll} \mu_{\widetilde{A}}(x) & si\, x \leq \underline{a}, \\ 1 & ailleurs \end{array} \}$$

$$F_*(x) = \{ \begin{array}{ll} 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x) & si\, x \geq \overline{a}, \\ 0 & ailleurs \end{array} \}$$

Un intervalle flou $\widetilde{A}$ peut aussi être vu comme un ensemble de mesures de probabilité dont les fonctions de distributions F sont telles que $F_* \leq F \leq F^*$. L'intervalle $[F_*, F^*]$ est appelé une p-box.

3.2 Comparaison d'intervalles flous

Dans ce qui suit, nous reprenons deux façons de comparer les intervalles flous, l'une s'appuie sur le fait que les intervalles flous généralisent les intervalles et représentent une forme d'incertitude ; dans ce cas, nous condidérons : (i) l'approche possibiliste , (ii) la comparaison de nombres graduels et son extension aux intervalles, (iii) l'extension probabiliste de l'ordre d'intervalles.
Et l'autre par défuzzification, en remplaçant l'intervalle flou par son substitut scalaire.

3.2.1 Comparaison d'intervalles flous vus comme des distributions de possibilité ordinales

Considérons deux intervalles flous $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ dont les fonctions d'appartenance sont respectivement $\mu_{\widetilde{A}}$ et $\mu_{\widetilde{B}}$.
Dans ce qui suit les abréviations *pos* et *nec* représentent respectivement possibilité et nécessité.

Dubois et Prade [30] proposent d'étendre graduellement aux intervalles flous les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ utilisés à la définition 1 de l'odre d'intervalles, c'est en quelque sorte une fuzzification des quatre relations d'ordre d'intervalles en utilisant le principe d'extension comme suit :

1. Les relations $>_4$ et $>_1$, c'est à dire pour la plus faible et la plus forte, deviennent respectivement possibilité de $\widetilde{A} > \widetilde{B}$, notée $pos(\widetilde{A} > \widetilde{B})$ et la nécessité de $\widetilde{A} > \widetilde{B}$, notée $nec(\widetilde{A} > \widetilde{B})$ définies comme suit :
   - $pos(\widetilde{A} > \widetilde{B}) = sup(min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(y))$ où x et y sont des nombres réels tels que $x > y$.
   - $nec(\widetilde{A} > \widetilde{B}) = 1 - pos(\widetilde{A} \leq \widetilde{B}) = 1 - sup(min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(y))$ où x et y sont des nombres réels tels que $x \leq y$.
2. Les relations intermédiaires $>_2$ et $>_3$, deviennent respectivement nécessité de $\widetilde{A} > \widetilde{B}$, noté $nec_2(\widetilde{A} > \widetilde{B})$ et la possibilité de $\widetilde{A} > \widetilde{B}$, noté $pos_3(\widetilde{A} > \widetilde{B})$ définies comme suit :
   - $nec_2(\widetilde{A} > \widetilde{B}) = inf\left\{sup\left[max(1 - \mu_{\widetilde{A}}(u), \mu_{\widetilde{B}}(v))/u < v\right]\right\}$
   - $pos_3(\widetilde{A} > \widetilde{B}) = sup\left\{inf\left[min(\mu_{\widetilde{A}}(u), 1 - \mu_{\widetilde{B}}(v))/u > v\right]\right\}$

Dans le but de ramener la comparaison d'intervalles flous utilisant possibilité et nécessité à celle de nombres réels, Dubois et Prade [30] ont établi les résultats suivants :

Proposition 12 *[30]*
Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux intervalles flous et $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$, $\widetilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$, $\widetilde{A}^{1-\alpha} = [\underline{a}^{1-\alpha}, \overline{a}^{1-\alpha}]$ et $\widetilde{B}^{1-\alpha} = [\underline{b}^{1-\alpha}, \overline{b}^{1-\alpha}]$ leurs coupes de niveau.
Alors on a :

1. $pos(\widetilde{A} > \widetilde{B}) \geq \alpha \Longleftrightarrow \underline{a}^\alpha > \overline{b}^\alpha$
2. $nec(\widetilde{A} > \widetilde{B}) \geq \alpha \Longleftrightarrow \overline{a}^{1-\alpha} > \underline{b}^{1-\alpha}$
3. $nec_2(\widetilde{A} > \widetilde{B}) \geq \alpha \Longleftrightarrow \underline{a}^\alpha > \underline{b}^{1-\alpha}$
4. $pos_3(\widetilde{A} > \widetilde{B}) \geq \alpha \Longleftrightarrow \overline{a}^{1-\alpha} > \overline{b}^\alpha$

On remarque l'existence des liens entre possibilité, nécessité et les comparaisons d'intervalles comme suit :

Remarque 3 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux intervalles flous et $\widetilde{A}^{\alpha}$, $\widetilde{B}^{\alpha}$, $\widetilde{A}^{1-\alpha}$ et $\widetilde{B}^{1-\alpha}$ leurs coupes de niveau.*

- $pos(\widetilde{A} > \widetilde{B}) > \alpha \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{\alpha} >_4 \widetilde{B}^{\alpha}$
- $nec(\widetilde{A} > \widetilde{B}) > \alpha \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{1-\alpha} >_1 \widetilde{B}^{1-\alpha}$
- $nec_2(\widetilde{A} > \widetilde{B}) > \alpha \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{\alpha} >_2 \widetilde{B}^{1-\alpha}$
- $pos_3(\widetilde{A} > \widetilde{A}) > \alpha \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{1-\alpha} >_3 \widetilde{B}^{\alpha}$

Proposition 13 *[30]*
Quelque que soient les intervalles flous $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, on a :

1. $nec(\widetilde{A} > \widetilde{B}) \leq pos(\widetilde{A} > \widetilde{B})$.
2. $nec(\widetilde{A} > \widetilde{B}) > 0 \Longrightarrow pos(\widetilde{A} > \widetilde{B}) = 1$

3.2.2 Comparaaison d'intervalles flous vus comme intervalles de nombres graduels

3.2.3 Comparaison de nombres graduels

Soient $\widetilde{r}$ et $\widetilde{s}$ deux nombres graduels. Leur comparaison peut être basée sur les approches suivantes :
- Un ordre partiel entre $\widetilde{r}$ et $\widetilde{s}$ est naturellement défini comme suit :
  $\tilde{r} \geq \tilde{s} \Longleftrightarrow r_\alpha \geq s_\alpha, \forall \alpha \in (0,1]$.
  Il généralise la dominance stochastique des fonctions de répartition à des fonctions définies de $]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ non monotones.
- La comparaison de nombres graduels peut aussi se faire par la comparaison des zones de [0, 1] où $r_\alpha > s_\alpha$ et celles où $r_\alpha < s_\alpha$:

$$\tilde{r} >^P \tilde{s} \Longleftrightarrow \int_0^1 1_{r_\alpha \geq s_\alpha} d\alpha > \int_0^1 1_{r_\alpha \leq s_\alpha} d\alpha. \tag{3.1}$$

- Une autre méthode d'évaluation consiste à utiliser les surfaces entre les nombres graduels : $\tilde{r} >^S \tilde{s} \Longleftrightarrow \int_0^1 \max(0, r_\alpha - s_\alpha) d\alpha > \int_0^1 \max(0, s_\alpha - r_\alpha) d\alpha$.
  Il est naturel de résumer un nombre graduel $\tilde{r}$ par la valeur $m(\tilde{r}) = \int_0^1 r_\alpha d\alpha$. Cette évaluation généralise la valeur moyenne de la variable aléatoire aux nombres graduels.
  On voit alors que $\tilde{r} >^S \tilde{s} \Longleftrightarrow m(\tilde{r}) > m(\tilde{s})$.

3.2.4 Comparaison d'intervalles flous vus comme intervalles aléatoires consonants

Pour comparer deux intervalles flous $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ vus comme intervalles aléatoires respectifs $[\underline{a}^{\xi}, \overline{a}^{\xi}]$ et $[\underline{b}^{\xi}, \overline{b}^{\xi}]$, où ξ et ζ sont des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$, Chanas et Nowakowski proposent de combiner probabilité et l'ordre des intervalles, c'est en quelque sorte la préférence statistique entre ces deux intervalles aléatoires comme suit :

1. $\mu_1(\widetilde{a}, \widetilde{b})$=P$(\underline{a}^{\xi} > \overline{b}^{\zeta})$
2. $\mu_2(\widetilde{a}, \widetilde{b})$=P$(\underline{a}^{\xi} > \underline{b}^{\zeta})$
3. $\mu_3(\widetilde{a}, \widetilde{b})$=P$(\overline{a}^{\xi} > \overline{b}^{\zeta})$
4. $\mu_4(\widetilde{a}, \widetilde{b})$=P$(\overline{a}^{\xi} > \underline{b}^{\zeta})$

où $\mu_i, i = 1,2,3,4$ généralisent respectivement $>_i, i = 1,2,3,4$.
Chanas et col considèrent cette même vision dans le cas d'intervalles flous de type L-R. Soient $\widetilde{A} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L,R)$ et $\widetilde{B} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b) \in FN(L,R)$ deux intervalles flous de type L-R vus comme intervalles aléatoires respectifs $[\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a, \overline{a} + R^{-1}(\zeta)\gamma^a]$ et $[\underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^b, \overline{b} + R^{-1}(\zeta)\gamma^b]$ où ξ et ζ sont des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$,
Ils proposent quatre cas de dépendance et deux cas d'indépendance comme suit :
$\mu_k : (FN(L,R))^2 \to [0,1]\,, k = 1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I$ où :
dans le cas de dépendance, en considérant $\xi = \zeta$,
$\mu_k, k = 1D, 2D, 3D, 4D$ se présentent comme suit :

1. $\mu_{1D}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a > \overline{b} + R^{-1}(\xi)\gamma^b)$
2. $\mu_{2D}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^b)$
3. $\mu_{3D}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = P(\overline{a} + R^{-1}(\xi)\gamma^a > \overline{b} + R^{-1}(\xi)\gamma^b)$
4. $\mu_{4D}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = P(\overline{a} + R^{-1}(\xi)\gamma^a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^b)$.

Et dans le cas d'indépendance, en considérant $\xi \neq \zeta$, elles se présentent comme suit :

1. $\mu_{1I}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a > \overline{b} + R^{-1}(\zeta)\gamma^b)$
2. $\mu_{4I}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = P(\overline{a} + R^{-1}(\zeta)\gamma^a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^a)$.

La lettre D indique que les variables aéatoires sous-tendant les intervalles flous sont fonctionellement liées (dépendance : $\xi = \zeta$), et I indique l'indépendance.

Par ailleurs Chanas et col [15] ont établi les résultats suivants :

Lemme 1 *[15] Pour deux intervalles flous quelconques de type L-R, nous avons les conditions suivantes : pour* $l \in \{1D, 1I\}$ $\mu_l(\widetilde{A}, \widetilde{B}) > 0 \Rightarrow \underline{a} > \overline{b}$ *et*
pour $k \in \{4D, 4I\}$ $\mu_k(\widetilde{A}, \widetilde{B}) < 1 \Leftrightarrow \underline{b} > \overline{a}$ *(ou par équivalence* $\mu_k(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 1 \Leftrightarrow \underline{b} \leq \overline{a}$*).*

Proposition 14 *[15] Soient* $\widetilde{A}$ *et* $\widetilde{B}$ *deux intervalles flous de type L-R.*

1. $\mu_{1D}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 1 - \mu_{4D}(\widetilde{B}, \widetilde{A})$

2. $\mu_{1D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) \leq \mu_i(\widetilde{A},\widetilde{B}) \leq \mu_{4D}(\widetilde{A},\widetilde{B})$, $\forall i \in \{2D, 3D\}$
3. $\mu_{1D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) > 0 \Rightarrow \mu_{4D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 1$
4. $\mu_{1I}(\widetilde{A},\widetilde{B}) \leq \mu_{4I}(\widetilde{A},\widetilde{B})$
5. $\mu_{1I}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 1 - \mu_{4I}(\widetilde{B},\widetilde{A})$
6. $\mu_{1I}(\widetilde{A},\widetilde{B}) > 0 \Rightarrow \mu_{4I}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 1$

Les fonctions d'appartenance μ_{2D} et μ_{3D} vérifient les propriétés suivantes [15] :

$$\mu_{2D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \begin{cases} L(\frac{a-b}{\delta^a-\delta^b}) & pour \quad \delta^a < \delta^b \quad et \quad \underline{a} < \underline{b} \\ 1 & pour \quad \delta^a \leq \delta^b \quad et \quad \underline{a} \geq \underline{b} \\ 1 - L(\frac{a-b}{\delta^a-\delta^b}) & pour \quad \delta^a > \delta^b \quad et \quad \underline{a} \geq \underline{b} \\ 0 & pour \quad \delta^a \geq \delta^b \quad et \quad \underline{a} < \underline{b} \end{cases}$$

$$\mu_{3D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \begin{cases} R(\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\gamma^a-\gamma^b}) & for \quad \gamma^a > \gamma^b \quad et \quad \overline{a} \leq \overline{b} \\ 1 & pour \quad \gamma^a \geq \gamma^b \quad et \quad \overline{a} > \overline{b} \\ 1 - R(\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\gamma^a-\gamma^b}) & pour \quad \gamma^a < \gamma^b \quad et \quad \overline{a} > \overline{b} \\ 0 & pour \quad \gamma^a \leq \gamma^b \quad et \quad \overline{a} \leq \overline{b} \end{cases}$$

Lemme 2 *Soient $\widetilde{A} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L,R)$ et $\widetilde{B} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b) \in FN(L,R)$ deux intervalles flous de type L-R*
- *Si $\delta^a \neq \delta^b$ ou $\underline{a} \neq \underline{b}$ alors $\mu_{2D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) + \mu_{2D}(\tilde{B},\widetilde{A}) = 1$.*
- *Si $\gamma^a \neq \gamma^b$ ou $\overline{a} \neq \overline{b}$ alors $\mu_{3D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) + \mu_{3D}(\tilde{B},\widetilde{A}) = 1$.*

Lemme 3 *Soient $\widetilde{A} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L,R)$ et $\widetilde{B} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b) \in FN(L,R)$ deux intervalles flous de type L-R avec L et R strictement décroissantes et continues, les conditions suivantes sont satisfaites :*
- *Si $\underline{a} > \underline{b}$ mais $\underline{a} - \delta^a < \underline{b} + \delta^b$ alors $\mu_{2D}(\tilde{a},\tilde{b}) \geq \beta$ si et seulement si $\underline{a} - \underline{b} - L^{-1}(1-\beta)(\delta^a - \delta^b) \geq 0$;*
- *Si $\overline{a} < \overline{b}$ mais $\overline{a} - \gamma^a > \overline{b} + \gamma^b$ alors $\mu_{3D}(\tilde{a},\tilde{b}) \geq \beta$ si et seulement si $\overline{a} - \overline{b} + R^{-1}(\beta)(\gamma^a - \gamma^b) \geq 0$;*
- *$\underline{a} - \underline{b} - L^{-1}(\frac{1}{2})(\delta^a - \delta^b) \geq 0 \Leftrightarrow \mu_{2D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq \frac{1}{2}$,*
- *$\overline{a} - \overline{b} + R^{-1}(\frac{1}{2})(\gamma^a - \gamma^b) \geq 0 \Leftrightarrow \mu_{3D}(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq \frac{1}{2}$,*

Preuve.
- Nous avons $\forall \beta \in (0,1]$: $\mu_{2D}(\tilde{a},\tilde{b}) \geq \beta \iff 1 - L(\frac{a-b}{\delta^a-\delta^b}) \geq \beta \iff L(\frac{a-b}{\delta^a-\delta^b}) \leq 1 - \beta$ L esr strictement décroissant, donc L^{-1} est strictement décroissante, alors nous obtenons $\frac{a-b}{\delta^a-\delta^b} \geq L^{-1}(1-\beta)$, alors $\underline{a} - \underline{b} - L^{-1}(1-\beta)(\delta^a - \delta^b) \geq 0$.
- De la même manière $\mu_{3D}(\tilde{a},\tilde{b}) \geq \beta \iff R(\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\gamma^a-\gamma^b}) \geq \beta$ et puisque R est strictement décroissante, donc R^{-1} est strictement décroissante, alors nous obtenons $\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\gamma^a-\gamma^b} \leq R^{-1}(\beta)$, alors $\overline{a} - \overline{b} + R^{-1}(\beta)(\gamma^a - \gamma^b) \geq 0$.

Les deux deux derniers items sont les conséquences des deux premiers.

3.2.5 Indices de comparaison de quantités floues

Plusieurs chercheurs ont proposé des substituts scalaires pour comparer les quantités floues, c'est en quelque sorte une substitution des nombres réels aux intervalles flous pour induire un ordre total. Parmi eux, nous considérons les quatre indices suivants [60] :
Soient $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ des quantités floues et $\widetilde{a}_i^{\alpha}$ l'$\alpha - coupe$ de $\widetilde{a}_i$ définie par $\widetilde{a}_i^{\alpha} = \{x/a_i(x) \geq \alpha\}$ où $a_i(x)$ est la fonction d'appartenance de $\widetilde{a}_i$ et avec $\underline{a}_i^{\alpha} = inf \widetilde{a}_i^{\alpha}$ et $\overline{a}_i^{\alpha} = sup \widetilde{a}_i^{\alpha}$.

- Indices de Yager [62, 63, 64] :
  $Y_2(\widetilde{a}_i) = \int_0^1 M(\underline{a}_i^{\alpha})d\alpha$ where$M(\underline{a}_i^{\alpha})$ est la valeur moyenne de $\widetilde{a}_i^{\alpha}$.
  Si $\widetilde{a}_i$ est convexe alors $M(\underline{a}_i^{\alpha}) = \frac{1}{2}(\underline{a}_i^{\alpha} + \overline{a}_i^{\alpha})$.
- Indices de Campos et Munoz [11] :
  $CM_1^{\lambda}(\widetilde{a}_i) = \int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)}(\lambda \underline{a}_i^{\alpha} + (1-\lambda)\overline{a}_i^{\alpha})d\alpha$ où $\lambda \in [0, 1]$.
  Si $\widetilde{a}_i$ est convexe alors $Y_2(\widetilde{a}_i) = CM_1^{\frac{1}{2}}(\widetilde{a}_i)$.
- indices de Liou et Wang [47] :
  $LW^{\lambda}(\widetilde{a}_i) = \lambda \int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)} r_i^{-1}(\alpha)d\alpha + (1-\lambda)\int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)} l_i^{-1}(\alpha)d\alpha$, avec $\lambda \in [0, 1]$.
  où $\widetilde{a}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ sont des nombres flous continus, l_i^{-1} et r_i^{-1} sont les fonctions inverses des fonctions respectives l_i et r_i qui sont strictement monotones.
  Si l_i est strictement croissante et r_i est strictement décroissante, nous avons $r_i^{-1}(\alpha) = \overline{a}_i^{\alpha}$ et $l_i^{-1}(\alpha) = \underline{a}_i^{\alpha}$. Alors $CM_1^{\lambda}(\widetilde{a}_i) = LW^{\lambda}(\widetilde{a}_i)$.
- Indices de Fortemps et Roubens[35] :
  $FR(\widetilde{a}_i) = \frac{1}{2hgt(\widetilde{a}_i)} \int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)}(\underline{a}_i^{\alpha} + \overline{a}_i^{\alpha})d\alpha$

Remarque 4 *[60]*
- *Si $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ sont des nombres flous, alors pour les indices Y_2 et FR, nous remplaçons $hgt(\widetilde{a}_i)$ par l. Alors $FR = Y_2 = CM_1^{\frac{1}{2}}$.*
- *Si $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ sont des nombres flous continus avec l_i un écart à gauche strictement croissant et r_i un écart à droite strictement décroissant, nous avons alors $FR = Y_2 = CM_1^{\frac{1}{2}} = LW^{\frac{1}{2}}$.*

Le lecteur peut aisément vérifier la linéarité des indices de comparaison des quantités floues comme suit :

Remarque 5 *Soient $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ des nombres flous, nous avons $\forall i, j \in (1, 2, ..., n)$:*
- *$F(\widetilde{a}_i + \widetilde{a}_j) = F(\widetilde{a}_i) + F(\widetilde{a}_j)$.*
- *$F(\gamma \widetilde{a}_i) = \gamma F(\widetilde{a}_i)$, γ est un nombre réel,*
  où $F \in \left\{FR, Y_2, CM_1^{\frac{1}{2}}\right\}$, et $F = LW^{\frac{1}{2}}$ si de plus $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ sont continus.

La comparaison de deux nombres flous en utilisant les indices de comparaison de quantités floues a été définie dans [60] comme suit :

Définition 9 *[60] Soient* $\widetilde{a}$ *et* $\widetilde{b}$ *deux nombres flous.*

1. $\widetilde{a} \succ \widetilde{b}$ *par* $F \Leftrightarrow F(\widetilde{a}) > F(\widetilde{b})$

2. $\widetilde{a} \succeq \widetilde{b}$ *par* $F \Leftrightarrow F(\widetilde{a}) \geq F(\widetilde{b})$

3. $\widetilde{a} \cong \widetilde{b}$ *par* $F \Leftrightarrow F(\widetilde{a}) = F(\widetilde{b})$

Où $\widetilde{a} \succ \widetilde{b}, \widetilde{a} \succeq \widetilde{b}$ *et* $\widetilde{a} \cong \widetilde{b}$ *signifient respectivement que* $\widetilde{a}$ *est au plus rang que* $\widetilde{b}$*, au moins au même rang que* $\widetilde{b}$ *et au même rang que* $\widetilde{b}$ *.*

Proposition 15 *[60] Soit* $F_n(R) = \{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n\}$ *un ensemble de nombers flous. Alors* Y_2, FR, CL *et* $CM^{1/2}$ *donnent le même classement sur* $F_n(R)$*.*

Preuve. Le lecteur peut vérifier aisément que pour $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{a}_j \in F_n(R)$, on a :
$Y_2(\widetilde{a}_i) \leq Y_2(\widetilde{a}_j) \Longleftrightarrow FR(\widetilde{a}_i) \leq FR(\widetilde{a}_j) \Longleftrightarrow CL(\widetilde{a}_i) \leq CL(\widetilde{a}_j) \Longleftrightarrow CM^{1/2}(\widetilde{a}_i) \leq CM^{1/2}(\widetilde{a}_j)$.

Chapitre 4

Combinaison du flou et de l'aléa

En programmation mathématique, il y a des situations où les deux principales incertitudes que nous pouvons rencontrer, à savoir le flou et l'aléa peuvent se trouver combinés comme suit : on peut avoir la flexibilité de l'objectif et/ou des contraintes avec la présence de variables aléatoires, la co-existence d'ntervalles flous et de variables aléatoires, ou la présence de variables aléatoires dont les valeurs sont mal connues, imprécises, exprimées linguistiquement, donc pouvant être représentées par des intervalles flous. D'où l'introduction du concept de variables aléatoires floues, en premier lieu par Kwakernaak [44] comme suit :

4.1 Variables aléatoires floues

Définition 10 *[44]*
Soit (Ω, F, P) *un espace de probabilité .*
Une variable aléatoire floue $\widetilde{X}$ *est une application de* (Ω, F, P) *à valeurs dans l'ensemble des intervalles flous* $F(\mathbb{R})$ *comme suit :*

$$\widetilde{X} : \Omega \to F(\mathbb{R})$$
$$\omega \to \widetilde{X}(\omega)$$

On note l'$\alpha -$ *coupe de* $\widetilde{X}$ *par* $\widetilde{X}^{\alpha}(\omega) = [\underline{X}^{\alpha}(\omega), \overline{X}^{\alpha}(\omega)]$ *où*
$\underline{X}^{\alpha}(\omega) = inf\,\{x/X(\omega)(x) \geq \alpha\}\,, \overline{X}^{\alpha}(\omega) = sup\,\{x/X(\omega)(x) \geq \alpha\}$
et $X(\omega)$ *est la fonction d'appartenance de* $\widetilde{X}$.

Exemple 1 *[44]*
L'exemple suivant du à Kwakernaak [44] montre bien une combinaison du flou et de l'aléa :
'On interroge des individus sur la caractérisation de l'été en Europe"'.
La réponse est : 'chaud', 'trés chaud'.
Elle est :

1. *aléatoire car tout dépend du lieu (pays) et des étés précédents.*
2. *exprimée linguistiquement, donc peut être représentée par des intervalles flous.*

La réponse peut être représentée par une variable aléatoire dont les valeurs sont des intervalles flous, donc par une variable aléatoire floue.

Dans ce qui suit nous allons définir les différentes sortes de variables aléatoires floues à savoir les variables aléatoires floues discrètes, normales au sens de Shapiro [56], discrètes de type L-R et normales de type L-R.

4.1.1 Variables aléatoires floues disrètes

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r\}$ et $p(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ...r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_k = 1$, une distribution de probabilité discrète.
Une variable aléatoire floue $\widetilde{X}$ est dite discrète si à chaque réalisation aléatoire $\omega_k \in \Omega$, la valeur $\widetilde{X}(\omega_k)$ est un intervalle flou comme suit :
$P(\widetilde{X}(\omega_k) = \widetilde{a}_k) = p_k, k = 1, 2, ...r$, où $\widetilde{a}_k, k = 1, 2, ...r$ sont des intervalless flous.

Exemple 2 *Soit* (Ω, F, P) *un espace probabilisé où :*
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ *un espace discret fini,* P_ω *la distribution de probabilité suivante :*

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; \quad P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

On considère la variable aléatoire floue discrète $\widetilde{X}$ *dans le cas où* $\widetilde{X}(\omega_1)$ *et* $\widetilde{X}(\omega_2)$ *sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance peuvent être discrètes ou continues comme suit :*

- $Im\widetilde{X}(\omega) = \{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2\}$ *où* $\widetilde{a}_1$ *et ,*$\widetilde{a}_2$ *sont des nombres flous dont les fonctions d'appartenance respectives* $\mu_{\widetilde{a}_1}$ *et* $\mu_{\widetilde{a}_2}$ *sont discrètes telles que* $\mu_{\widetilde{a}_1}(1) = \mu_{\widetilde{a}_2}(1) = 0.2$, $\mu_{\widetilde{a}_1}(3) = \mu_{\widetilde{a}_2}(4) = 0.9$, $\mu_{\widetilde{a}_1}(5) = \mu_{\widetilde{a}_2}(6) = 0.6$. *et* $P(\widetilde{X}(\omega_1) = \widetilde{a}_1) = 0.25$ *et* $P(\widetilde{X}(\omega_2) = \widetilde{a}_2) = 0.75$.
  On obtient les variables aléatoires réelles discrètes X_1, X_2, X_3 *dont les distributions de probabilité ainsi que leur de degré de compatibilité avec* $\widetilde{X}$ *sont comme suit :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} P\{X_1(\omega_1) = 1\} = 0.25 & P\{X_1(\omega_2) = 2\} = 0.75 & X(\omega)(X_1) = 0.2 \\ \\ P\{X_2(\omega_1) = 3\} = 0.25 & P\{X_2(\omega_2) = 4\} = 0.75 & X(\omega)(X_2) = 0.9 \\ \\ P\{X_3(\omega_1) = 5\} = 0.25 & P\{X_3(\omega_2) = 6\} = 0.75 & X(\omega)(X_3) = 0.6 \end{array} \right\}$$

- $Im\widetilde{X}(\omega) = \left\{\widetilde{4}, \widetilde{5}\right\}$ *où* $\widetilde{4}$ *et* $\widetilde{5}$ *sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance respectives* *sont continues et définies comme suit :*

$$\mu_{\widetilde{4}}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \leq 3 \\ x-3 & si & x \in]3,4] \\ 1 & si & x \in]4,5] \\ -x+6 & si & x \in]5,6] \\ 0 & si & x > 6 \end{array} \right\}$$

$$\mu_{\widetilde{5}}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \leq 4 \\ x-4 & si & x \in]4,5] \\ 1 & si & x \in]5,6] \\ -x+7 & si & x \in]6,7] \\ 0 & si & x > 7 \end{array} \right\}$$

Et l'on a $P(\widetilde{X}(\omega_1) = \widetilde{4}) = 0.25$ *et* $P(\widetilde{X}(\omega_2) = \widetilde{5}) = 0.75$.
Il existe une infinité de variables aléatoires réelles X_k *telles que* $X(\omega)(X_k) = \alpha_k \in (0,1]$.
On peut extraire certaines parmi elles en considérant par exemple $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.4$ *et* $\alpha_3 = 0.8$.
On obtient les variables aléatoires réelles suivantes avec leurs distributions de probabilité :

$$\left\{ \begin{array}{lll} P\left\{\underline{X}_1(\omega_1) = 3.2\right\} = 0.25 & P\left\{\underline{X}_1(\omega_2) = 4.2\right\} = 0.75 & X(\omega)(\underline{X}_1) = 0.2 \\ P\left\{\overline{X}_1(\omega_1) = 5.8\right\} = 0.25 & P\left\{\overline{X}_1(\omega_2) = 6.8\right\} = 0.75 & X(\omega)(\overline{X}_1) = 0.2 \\ P\left\{\underline{X}_2(\omega_1) = 3.4\right\} = 0.25 & P\left\{\underline{X}_2(\omega_2) = 4.4\right\} = 0.75 & X(\omega)(\underline{X}_2) = 0.4 \\ P\left\{\overline{X}_2(\omega_1) = 5.6\right\} = 0.25 & P\left\{\overline{X}_2(\omega_2) = 6.6\right\} = 0.75 & X(\omega)(\overline{X}_2) = 0.4 \\ P\left\{\underline{X}_3(\omega_1) = 3.8\right\} = 0.25 & P\left\{\underline{X}_3(\omega_2) = 4.8\right\} = 0.75 & X(\omega)(\underline{X}_3) = 0.8 \\ P\left\{\overline{X}_3(\omega_1) = 5.2\right\} = 0.25 & P\left\{\overline{X}_3(\omega_2) = 6.2\right\} = 0.75 & X(\omega)(\overline{X}_3) = 0.8 \end{array} \right\}$$

4.1.2 Variables aléatoires floues normales

En nous basant sur la conception de Kwakernaak [44], à savoir qu'une variable aléatoire floue est une vague perception d'une variable aléatoire réelle, nous considérons une variable aléatoire, originale, réelle X normalement distribuée d'espérance μ et de variance σ^2. En pratique, l'espérance μ de

X est mal connue, c'est à peu prés μ, donc représentée par l'intervalle flou $\widetilde{\mu}$, alors nous avons une variable aléatoire floue $\widetilde{X}$ normalement distributée d'espérance floue $\widetilde{\mu}$ et de variance réelle σ^2 telle que considérée dans Shapiro [56] et telle que $\forall\alpha \in (0,1]$, $\underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \overline{\mu}^\alpha$, où $\underline{\mu}^\alpha$ et $\overline{\mu}^\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $\widetilde{\mu}^\alpha = [\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha]$.
Nous déduisons que $\underline{X}^\alpha$ et $\overline{X}^\alpha$ sont des variables aléatoires normales réelles d'espérances respectives $\underline{\mu}^\alpha$ et $\overline{\mu}^\alpha$ et de même variance σ^2, où $\underline{X}^\alpha$ et $\overline{X}^\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $\widetilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{X}^\alpha(\omega), \overline{X}^\alpha(\omega)]$
Puisque $\underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \overline{\mu}^\alpha$, donc $\forall t \in R$, $F_{\underline{X}^\alpha}(t) \leq F_X(t) \leq F_{\overline{X}^\alpha}(t)$, où $F_{\underline{X}^\alpha}$, F_X et $F_{\overline{X}^\alpha}$ sont les fonctions de répartition de $\underline{X}^\alpha$, X et $\overline{X}^\alpha$ respectivement.
Pour plus de détails voir Shapiro [56].

4.2 Variables aléatoires floues de type L-R

Soit $FN(L,R)$ un ensemble d'intervalles flous de type L-R vus comme des intervalles aléatoires [15](i.e. $\widetilde{A} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L,R) \Leftrightarrow \widetilde{A} = [\underline{a} - L^{-1}(Y)\delta^a, \overline{a} + R^{-1}(Z)\gamma^a]$, où Y et Z sont des variables aléatoires uniformément distribuées sur l'intervalle $[0,1]$, Les fonctions de références L et R sont non-négatives, définies sur $[0,\infty)$ non-décroissantes telles que $L(0) = R(0) = 1$, et δ^a, γ^a sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

Nous remplaçons $F(\mathbb{R})$ par $FN(L,R)$ dans la définition 5, alors $\widetilde{X}$ est appelée variable aléatoire floue de type L-R et notée $\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$, où $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont des variables aléatoires réelles et δ^x, γ^x sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.
Autrement dit $\widetilde{X}(\omega) = [\underline{x}(\omega) - L^{-1}(Y)\delta^x, \overline{x}(\omega) + R^{-1}(Z)\gamma^x]$.
l'α-coupe de $\widetilde{X}(\omega)$ est : $\widetilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{x}(\omega) - L^{-1}(\alpha)\delta^x, \overline{x}(\omega) + R^{-1}(\alpha)\gamma^x]$.

4.2.1 Variables aléatoires floues normales de type L-R

$\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$ est une variable aléatoire floue normale de type L-R d'espérance mathématique floue $\widetilde{\mu} = (\underline{\mu}, \overline{\mu}, \delta^\mu, \gamma^\mu)$ qui est un intervalle flou de type L-R et de variance réelle σ^2, si $\underline{x}(\omega)$ et $\overline{x}(\omega)$ (avec $\underline{x} \leq \overline{x}$) sont des variables aléatoires normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$ et de même variance σ^2 et δ^x, γ^x sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

4.2.2 Variables aléatoires floues disrètes de type L-R

$\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$ est une variable aléatoire floue discrète de type L-R si $\underline{x}(\omega)$ et $\overline{x}(\omega)$ ($\underline{x} \leq \overline{x}$) sont des variables aléatoires dicrètes et δ^x, γ^x sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

Exemple 3 *Soient* (Ω, F, P) *un espace de probabilité où :*
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ *un espace discret fini,* P_ω *la distribution de probabilité suivante :*

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; \quad P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

Et une variable aléatoire floue discrète de type L-R, $\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$ *telle que :* $P(\widetilde{X}(\omega_1) = \widetilde{a}) = 0.25$ *et* $P(\widetilde{X}(\omega_2) = \widetilde{b}) = 0.75$ *où* $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R}$ *et* $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b)_{L-R}$ *(avec* $\delta^x = \delta^a = \delta^b = \delta$ *et* $\gamma^x = \gamma^a = \gamma^b = \gamma$*) sont des intervalles flous du type L-R dont les fonctions d'appartenance respectives* $\mu_{\widetilde{a}}$ *et* $\mu_{\widetilde{b}}$ *sont définies par :*

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{pour } x \in [\underline{a}, \overline{a}], \\ \\ L(\frac{\underline{a}-x}{\delta}) & \textit{pour } x \leq \underline{a}, \\ \\ R(\frac{x-\overline{a}}{\gamma}) & \textit{pour } x \geq \overline{a}. \end{array} \right\}.$$

$$\mu_{\widetilde{b}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{pour } x \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right], \\ \\ L(\frac{\underline{b}-x}{\delta}) & \textit{pour } x \leq \underline{b}, \\ \\ R(\frac{x-\overline{b}}{\gamma}) & \textit{pour } x \geq \overline{b}. \end{array} \right\}.$$

4.3 Variables aléatoires graduelles

Etant donné qu'un intervalle flou peut être vu comme un intervalle de nombres graduels et que toute réalisation d'une variable aléatoire floue est un intervalle flou, donc un intervalle de nombres graduels. Par conséquent une variable aléatoire floue peut être vue comme un intervalle de variables aléatoires dont les valeurs sont des nombres graduels. Nous les appelons variables aléatoires graduelles et nous les définissons comme suit :

Définition 11 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\widetilde{A}$ une variable aléatoire floue. Une selection floue de $\widetilde{A}$ est une variable aléatoire graduelle $\tilde{t} \in \widetilde{A}$ définie par :*

$$\tilde{t} : \Omega \longrightarrow GN(\mathbb{R})$$

$$\omega \longrightarrow \tilde{t}(\omega)$$

où $GN(\mathbb{R})$ est un ensemble de nombres graduels.

Remarque 6

1. *Nous avons vu, au chapitre 3, que par définition si $\tilde{t}$ est un nombre graduel, alors $\forall \alpha \in (0,1]$, $\tilde{t}(\alpha) = t_\alpha$ est un nombre réel. Donc nous pouvons conclure que si $\tilde{t}$ est une variable aléatoire graduelle, alors $\forall \omega \in \Omega$, $\tilde{t}(\omega)$ est un nombre graduel par conséquent $\forall \omega \in \Omega$, $\forall \alpha \in (0,1]$, $\tilde{t}(\omega)(\alpha) = t_\alpha(\omega)$ est un nombre réel. Autrement dit si $\tilde{t}$ est une variable aléatoire graduelle, alors $\forall \alpha \in (0,1]$, $\tilde{t}(\alpha) = t_\alpha$ est une variable aléatoire réelle.*
2. *Soient $\widetilde{A}$ une variable aléatoire floue et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$ une variable aléatoire graduelle, selection floue, alors $\forall \omega \in \Omega$, $\widetilde{A}(\omega)$ est un intervalle flou et $\tilde{t}(\omega)$ un nombre graduel. En utilisant la représentation de l'intervalle flou établie dans [34] et reprise au chapitre 3, nous considérons que l'intervalle flou $\widetilde{A}(\omega)$ peut être vu comme un intervalle de nombres graduels qui sont des éléments pris dans chaque α-coupe de $\widetilde{A}(\omega)$ comme suit [34] :*
   $\forall \omega \in \Omega$, $\widetilde{A}(\omega) = \{\tilde{t}(\omega) : \underline{a}_\alpha(\omega) \leq t_\alpha(\omega) \leq \overline{a}_\alpha(\omega), \forall \alpha \in (0,1]\} = \{\tilde{t}(\omega) : \tilde{t}(\omega) \in \widetilde{A}(\omega)\}$, *où $\underline{a}_\alpha(\omega)$ et $\overline{a}_\alpha(\omega)$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'α-coupe de $\widetilde{A}(\omega)$.*
   Donc une variable aléatoire floue $\widetilde{A}$ peut être vue comme un intervalle de variables aléatoires graduelles qui sont des variables aléatoires prises dans chaque α-coupe de $\widetilde{A}$ comme suit :
   $\widetilde{A} = \{\tilde{t} : \underline{a}_\alpha \leq t_\alpha \leq \overline{a}_\alpha, \forall \alpha \in (0,1]\} = \{\tilde{t} : \tilde{t} \in \widetilde{A}\}$, *où $\underline{a}_\alpha$ et $\overline{a}_\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'α-coupe de $\widetilde{A}$.*

Nous concluons qu'une variable aléatoire floue peut être vue comme :

1. un ensemble flou de variables aléatoires réelles (une distribution de possibilité sur les variables aléatoires).
2. un intervalle de variables aléatoires graduelles.

Nous prendrons en considération ces deux visions au chapitre 5, dans la comparaison de variables aléatoires floues.
Pour les variables aléatoires floues particulières, de type L-R, nous avons considéré les écarts à gauche et à droite constants, donc des nombres réels positifs. Ce qui a été fait aussi par Jun. Li et col. [46]. Par contre Katagiri et col. [42] les ont considérés aléatoires.

Chapitre 5

Comparaison de variables aléatoires floues

Considérons les définitions de la dominance stochastique et la préférence statistique des variables aléatoires réelles. Nous pouvons nous retrouver face à des situations où ces dernières sont des variables aléatoires floues, autrement dit leurs valeurs sont des intervalles flous. Dans ce cas nous aurons à calculer la probabilité de réalisation d'un évènement aléatoire flou, autrement dit la probabilité de la comparaison d'intervalles flous et de nombres réels pour la dominance stochastique et la probabilité de la comparaison d'intervalles flous pour la préférence statistique. Nous avons donc recours aux approches concernant la comparaison d'intervalles flous, d'où la combinaison de probabilité et ces dernières. Ce sont en quelque sorte des extensions de ces deux concepts aux variables aléatoires floues sous différentes formes selon ces approches qui peuvent être :

1. en fonction de la vision de ces intervalles flous :
   - possibilité ou nécessité.
   - comparaison de nombres graduels
   - les relations valuées entre les intervalles flous de type L-R définies par Chanas *et col.*
2. des défuzzifications en utilisant :
   - les α-coupes des intervalles flous.
   - les indices de comparaison des quantités floues.

Donc dans ce qui suit pour les extensions de la dominance stochastique et de la préférence statistique des variables aléatoires floues, nous aurons à combiner probabilité et méthodes de comparaison d'intervalles flous.

5.1 Extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues en utilisant leurs α-coupes

Dans ce cas, nous considérons la combinaison de probabilité et l'approche qui consiste à comparer les α-coupes des intervalles flous qui sont les valeurs des variables aléatoires floues, et les nombres réels. Donc c'est la probabilité de comparaison entre les α-coupes des variables aléatoires floues et les nombres réels comme suit :

Définition 12 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
On dit que $\widetilde{A}$ *est* (i, j) *stochastiquement dominée par* $\widetilde{B}$, *on note* $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$ *si* $\forall \alpha \in (0, 1]$:
$P\left\{\omega : \widetilde{A}^{\alpha}(\omega) >_i x\right\} \leq P\left\{\omega : \widetilde{B}^{\alpha}(\omega) >_j x\right\} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$.
où $\widetilde{A}^{\alpha}$ *et* $\widetilde{B}^{\alpha}$ *sont les* α*-coupes de* $\widetilde{A}$ *et* $\widetilde{B}$ *respectivement.*

Remarque 7 *On sait que si* $\widetilde{A}$ *est une variable aléatoire floue alors son* α*-coupe* $\widetilde{A}^{\alpha}$ *est un intervalle aléatoire, par conséquent la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs* α*-coupes est équivalente à la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :*
$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\} : \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1]\, \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\alpha}$.

Donc il est bien évident que les propriétés de la dominance stochatique des intervalles aléatoires restent valides pour la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes comme suit :

5.1.1 Propriètés

Nous avons donc : $\forall i \in \{1, 2\}$ et $\forall j \in \{3, 4\} : \leq^{s.d}_{(j,i)}$ est la plus forte, $\leq^{s.d}_{(i.j)}$ la plus faible , $\leq^{s.d}_{(j.j)}$ et $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ sont les intermédiaires.
D'où les implications suivantes :

Proposition 16 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues.* $\forall i \in \{1, 2\}$ *et* $\forall j \in \{3, 4\}$ *on a :*

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$.

Preuve. Evidente, il suffit d'utiliser la remarque 7, i.e. $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1]\, \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\alpha}$ et d'appliquer, $\forall \alpha \in (0, 1)$, la proposition 3 du chapitre 2,

aux intervalles aléatoires $\widetilde{A}^{\alpha}$ et $\widetilde{B}^{\alpha}$.

Tenant compte de la remarque 7, il est bien évident que pour la transitivité, nous retrouvons les mêmes conditions que celle de la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

5.1.2 Transitivité

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{V}_{af}$, l'ensembles des variables aléatoires floues. Nous considérons deux cas, l'un où i=j et l'autre où $i \neq j$ comme suit :

1. cas où i=j
   $\forall i \in \{1,2,3,4\}$ la relation $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ est transitive sur $\mathcal{V}_{af}$ comme suit :
   Proposition 17 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$.*
   Alors : $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, on a $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{C}$.

   Preuve. Evidente.
2. cas où $i \neq j$:
   nous définissons une autre forme de transitivité comme suit :
   Définition 13 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$ et $l, k \in \{1,2,3,4\}$.*
   On dit que la relation $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ est (l,k)-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$, si $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$, on a :
   $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,l)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(k,j)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{C}$.
   Nous distinguons deux cas, l'un où $k = l$ et l'autre où $k \neq l$ comme suit :
   - Cas où $k = l$:
     dans ce cas, $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$ la relation $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ est (l,l)-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$, $\forall l \in \{1,2,3,4\}$ comme suit :
     Proposition 18 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$.*
     Alors $\forall i, j, l \in \{1,2,3,4\}$, on a $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,l)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(l,j)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{C}$.

     Preuve. Il suffit d'utiliser la remarque 7 et d'appliquer, $\forall \alpha \in (0,1)$, la proposition 5 du chapitre 2, aux intervalles aléatoires $\widetilde{A}^{\alpha}$ et $\widetilde{B}^{\alpha}$.
   - Cas où $k \neq l$:
     dans ce cas, $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$ la relation $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ est (l,k)-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$, $\forall l \in \{1,2\}$ et $\forall k \in \{3,4\}$ comme suit :
     Proposition 19 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$.*
     $\forall l \in \{1,2\}$, $\forall k \in \{3,4\}$ et $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$, on a $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,l)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(k,j)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{C}$.

     Preuve. Il suffit d'utiliser la remarque 7 et d'appliquer, $\forall \alpha \in (0,1)$, la proposition 6 du chapitre 2, aux intervalles aléatoires $\widetilde{A}^{\alpha}$ et $\widetilde{B}^{\alpha}$.

Remarque 8 *1. Dans le cas où i=j :*

- $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af}$ *pour les mêmes conditions que celles des propositions 18 et 19.*
- *Si de plus* $l = k = i$*, alors :* $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ *est* (i,i)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af} \Longleftrightarrow \leq^{s.d}_{(i,i)}$ *est transitive sur* $\mathcal{V}_{af}$.

2. *Soient* $j \in \{1,2,3,4\}$, $l = k$ *avec* $((l,k) \in \{1,2,3,4\})$ *ou* $l \neq k$ *(avec* $l \in \{1,2\}$ *et* $k \in \{3,4\}$*), le lecteur peut montrer aisément que :*
   - *la* (l,k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(i,j)}$, $i \in \{3,4\}$ *est plus forte que la* (l,k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(m,j)}$, $m \in \{1,2\}$ *sur* $\mathcal{V}_{af}$ *i.e.*
     $\leq^{s.d}_{(i,j)}, i \in \{3,4\}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af} \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(m,k)}, m \in \{1,2\}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af}$
   - *la* (l,k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(j,i)}$, $i \in \{1,2\}$ *est plus forte que la la* (l,k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(j,n)}$, $n \in \{3,4\}$ *sur* $\mathcal{V}_{af}$ *i.e.*
     $\leq^{s.d}_{(j,i)}, i \in \{1,2\}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af} \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(j,n)}, n \in \{3,4\}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af}$
   - *Par conséquent la* (l,k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(i,j)}, i \in \{3,4\}, j \in \{1,2\}$ *est plus forte que la la* (l,k)*-transitivité de* $\leq^{s.d}_{(m,n)}, m \in \{1,2\}, n \in \{3,4\}$ *sur* $\mathcal{V}_{af}$ *i.e.*
     $\leq^{s.d}_{(i,j)}, i \in \{3,4\}, j \in \{1,2\}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af} \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(m,n)}, m \in \{1,2\}, n \in \{3,4\}$ *est* (l,k)*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af}$

5.1.3 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires

Nous déduisons de la remarque 7 et de la proposition 7, les expressions suivantes de la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes en termes de dominance stochastique des variables aléatoires réelles.

Proposition 20 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$, $\widetilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ *leurs* α*-coupes respectives avec* $\alpha \in (0,1]$.
$\forall i \in \{1,2\}$ *et* $\forall j \in \{3,4\}$*, on a les équivalences suivantes :*

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1]$, $\underline{a}^\alpha \leq_{s.d} \overline{b}^\alpha$
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1]$, $\underline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha$
3. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1]$, $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha$
4. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1]$, $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \overline{b}^\alpha$

Preuve. Il suffit d'utiliser la remarque 7 et d'appliquer, $\forall \alpha \in (0,1)$, la proposition 7 du chapitre 2, aux intervalles aléatoires $\widetilde{A}^\alpha$ et $\widetilde{B}^\alpha$.

5.2 Extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues en utilisant possibilté et nécessité

Dans ce cas, nous utilisons la combinaison de probabilité et possibilité, et, probabilité et nécessité, pour définir la dominance stochastique des variables aléatoires floues. C'est une généralisation de la définition de la dominance stochastique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues, compte tenu du fait que possibilité et nécessité généralisent respectivement les relations $>_4$ et $>_1$ des intervalles réels aux intervalles flous.
Dans ce qui suit, les abréviations $\alpha - pos$ et $\beta - nec$ représentent respectivement α-possiblement et β-nécessairement. Nous définissons, sous quatre formes, la dominance stochastique des variables aléatoires floues en utilisant possibilité et nécessité comme suit :

Définition 14 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0,1]$.*
Dans ce qui suit, les abréviations $\alpha - pos$ et $\beta - nec$ représentent respectivement α-possiblement et β-nécessairement.
On dit que :

1. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - pos, \beta - nec)$ stochastiquement dominée par $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
   On note $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha - pos, \beta - nec)} \widetilde{B}$
2. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - pos, \beta - pos)$ stochastiquement dominée par $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
   On note $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha - pos, \beta - pos)} \widetilde{B}$
3. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - nec, \beta - nec)$ stochastiquement dominée par $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
   On note $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha - nec, \beta - nec)} \widetilde{B}$
4. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - nec, \beta - pos)$ stochastiquement dominée par $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
   On note $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha - nec, \beta - pos)} \widetilde{B}$

5.2.1 Propriétés

Etant donné que la valeur d'une variable aléatoire floue est un intervalle flou, alors en utilisant les propriétés de possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 13 du chapitre 3, à savoir que $\forall \omega \in \Omega$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \leq pos(\widetilde{A}(\omega) > x)$, nous établissons que la forme $\leq^{s.d}_{(\alpha - pos, \beta - nec)}$ est la plus forte, $\preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)}$, la plus faible et $\preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)}$ et $\preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)}$ sont les intermédiaires. D'où les implications suivantes :

Proposition 21 *Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0,1]$.*
On a alors :

1. $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.
2. $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.

Preuve. Etant donné que $\forall \omega \in \Omega$, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous, alors en vertu des propriétés des possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 13 du chapitre 3, nous avons $\forall x \in \mathbb{R}$, $nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \leq pos(\widetilde{A}(\omega) > x)$ ce qui donne $\forall \alpha \in]0,1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha \Longrightarrow pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha$. D'où
$\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \subset \left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\}$ par conséquent nous obtenons l'inégalité suivante : $\forall \alpha \in]0,1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\}$ qui nous permet de montrer aisément les deux items de la proposition comme suit :

1. – $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$
   i.e. $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B}$.
   – $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$
   i.e. $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.

   Nous concluons que :
   $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.
2. – $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$,
   i.e. $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B}$.
   – $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$,
   i.e. $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.

Nous concluons que :
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.

Nous utilisons aussi les propriétés de possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 13 du chapitre 3, à savoir que pour ω donné, $\forall x \in \mathbb{R}$, $nec(\widetilde{B}(\omega) > x) > 0 \Longrightarrow pos(\widetilde{B}(\omega) > x) = 1$, pour établir le résultat suivant :

Proposition 22 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
On a alors :

1. $\forall q \in \{pos, nec\}$ *et* $\forall \alpha, \beta \in]0,1]$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,1-pos)} \widetilde{B}$.
2. $\forall r \in \{pos, nec\}$ *et* $\forall \alpha, \beta \in]0,1]$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1-pos,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-r)} \widetilde{B}$.

Preuve.

1. Nous avons $\alpha, \beta \in]0,1]$ et $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-nec)} \widetilde{B}$, i.e.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$.
Etant donné que $\beta \in]0,1]$, donc $\beta > 0$. Il s'ensuit que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta \Longrightarrow nec(\widetilde{B}(\omega) > x) > 0$. Et en vertu des propriétés des possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 13 du chapitre 3, nous avons $nec(\widetilde{B}(\omega) > x) > 0 \Longrightarrow$ $pos(\widetilde{B}(\omega) > x) = 1$. Alors par transitivité, nous obtenons que $\forall \beta \in]0,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta \Longrightarrow pos(\widetilde{B}(\omega) > x) = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) = 1\right\}$.
Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) = 1\right\}$,
i.e. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,1-pos)} \widetilde{B}$.
2. Nous avons $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1-pos,\beta-r)} \widetilde{B}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) = 1\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$.
Etant donné que $\forall \alpha \in]0,1], P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) = 1\right\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (voir preuve de item 1)
Il s'ensuit que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) = 1\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$,
i.e. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1-pos,\beta-r)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-r)} \widetilde{B}$.

Pour $q, r \in \{pos, nec\}$, $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)}$ devient forte selon que α décroît et/ou β croît comme suit :

Proposition 23 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues. Alors :*

1. *$\forall q, r \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma \in]0,1]$ tels que $\gamma \geq \alpha$, on a :*
   $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B}$.

2. *$\forall q, r \in \{pos, nec\}$ et $\forall \gamma, \beta, \delta \in]0,1]$ tels que $\delta \leq \beta$, on a :*
   $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.

3. *$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1]$ tels que $\gamma \geq \alpha$ et $\delta \leq \beta$, on a :*
   $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.

Preuve. Nous avons $q, r \in \{pos, nec\}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous.

1. Etant donné que $\gamma \geq \alpha$, nous avons alors $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma \Longrightarrow q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha$. Donc
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   Il s'ensuit que $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$.
   Autrement dit que : $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B}$

2. Etant donné que $\delta \leq \beta$, de la même manière que pour item 1, nous avons $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \delta\right\}$.
   Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \delta\right\}$.
   Autrement dit $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.

3. Pour $\gamma \geq \alpha$, nous avons montré à l'item 1 que pour tout $q, r \in \{pos, nec\}$ on a : $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B}$.
   Pour $\delta \leq \beta$, nous avons montré à l'item 2 que pour tout $q \in \{pos, nec\}$, $r \in \{pos, nec\}$ on a :
   $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.
   Par transitivité de l'implication, nous obtenons :
   $\widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \preceq^{s.d}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.

5.2.2 Transitivité

$\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha \in]0,1]$, la relation $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)}$ est transitive sur lensemble $\mathcal{V}_{af}$ des variables aléatoires floues comme suit :

Proposition 24 *Soient* $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$.
Alors $\forall q \in \{pos, nec\}$ *et* $\forall \alpha \in]0,1]$ *on a :*
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)} \widetilde{B}$ *et* $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)} \widetilde{C}$.

Preuve. Evidente.

Nous définissons une autre forme de transitivité comme suit :

Définition 15 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$, $q, r, t, s \in \{pos, nec\}$ *et* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1]$.
On dit que la relation $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)}$ *est* $(\beta - r, \gamma - s)$*-transitive sur* $\mathcal{V}_{af}$*, si :*
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B}$ *et* $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(\gamma-s,\delta-t)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)} \widetilde{C}$.

La relation $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur l'ensemble $\mathcal{V}_{af}$ pour $\gamma \leq \beta$, comme suit :

Proposition 25 *Soient* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *et* $\widetilde{C}$ *trois variables aléatoires floues.*
$\forall q, r, t \in \{pos, nec\}$ *et* $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1]$ *tels que* $\gamma \leq \beta$, *on a :*
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B}$ *et* $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(\gamma-r,\delta-t)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)} \widetilde{C}$.

Preuve. Nous avons $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(\gamma-r,\delta-t)} \widetilde{C}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$ et
$P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : t(\widetilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\right\}$.
Etant donné que $\gamma \leq \beta$, alors $P\left\{\omega, r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \leq P\left\{\omega, r(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\right\}$.
Par conséquent, nous obtenons $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : t(\widetilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\right\}$,
i.e. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)} \widetilde{C}$.

La relation $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)}$ est $(\beta - nec, \gamma - pos)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$ pour $\gamma \leq \beta$, comme suit :

Proposition 26 *Soient $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \in \mathcal{V}_{af}$.*
Alors $\forall q, t \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1]$ tels que $\gamma \leq \beta$, on a :
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\beta-nec)} \widetilde{B}$ *et* $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(\gamma-pos,\delta-t)} \widetilde{C} \Longrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)} \widetilde{C}$.

Preuve. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-p,\beta-nec)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{B} \leq^{s.d}_{(\gamma-pos,\delta-t)} \widetilde{C}$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$ et
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : t(\widetilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\right\}$.
Etant donné que $\gamma \leq \beta$, alors $P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\right\}$ et étant donné que $nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \leq pos(\widetilde{B}(\omega) > x)$, alors
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\right\}$.
Par conséquent, nous obtenons $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : t(\widetilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\right\}$,
i.e. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-t)} \widetilde{C}$.

Remarque 9
1. *Il est bien évident que :*
   - *$\forall q, r \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma \in]0,1] : \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$ pour $\gamma \leq \beta$,*
   - *$\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma \in]0,1] : \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)}$ est $(\beta - nec, \gamma - pos)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$ pour $\gamma \leq \beta$,*
   - *$\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha \in]0,1] : \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)}$ est $(\alpha - q, \alpha - q)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af} \Longleftrightarrow \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\alpha-q)}$ est transitive sur $\mathcal{V}_{af}$.*
2. *Soient $q, r, t \in \{pos, nec\}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1]$ avec $\gamma \leq \beta$, le lecteur peut montrer aisément que :*
   - *la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité de $\leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\delta-t)}$ est plus forte que la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité de $\leq^{s,d}_{(\alpha-pos,\delta-t)}$ sur $\mathcal{V}_{af}$ i.e.*
     $\leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\delta-t)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af} \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\delta-t)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$
   - *la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité de $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-pos)}$ est plus forte que la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité de $\leq^{s,d}_{(\alpha-q,\delta-nec)}$ sur $\mathcal{V}_{af}$ i.e.*
     $\leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-pos)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af} \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(\alpha-q,\delta-nec)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$.
   - *Par conséquent la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité de $\leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\delta-pos)}$ est plus forte que la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité de $\leq^{s,d}_{(\alpha-pos,\delta-nec)}$ sur $\mathcal{V}_{af}$ i.e.*
     $\leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\delta-pos)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af} \Longrightarrow \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\delta-nec)}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$-transitive sur $\mathcal{V}_{af}$.

   ces implications restent valides si nous remplaçons la $(\beta - r, \gamma - r)$-transitivité par la $(\beta - nec, \gamma - pos)$-transitivité.

Nous exprimons la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de dominance stochastique :

1. des variables aléatoires réelles
2. des intervalles aléatoires
3. des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes

comme suit :

5.2.3 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires réelles

En utilisant les propriétés des possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 12 du chapitre 3, nous exprimons la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de dominance stochastique des variables aléatoires réelles comme suit :

Proposition 27 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues. On a alors $\forall \alpha, \beta \in (0,1)$:*

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$.
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$.
3. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$.
4. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$.

Preuve. Soient $\widetilde{A}^{\alpha} = [\underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha}]$, $\widetilde{A}^{1-\alpha} = [\underline{a}^{1-\alpha}, \overline{a}^{1-\alpha}]$, $\widetilde{B}^{\beta} = [\underline{b}^{\beta}, \overline{b}^{\beta}]$ et $\widetilde{B}^{1-\beta} = [\underline{b}^{1-\beta}, \overline{b}^{1-\beta}]$ et les coupes de niveau de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$.
En utilisant la définition 14 et la proposition 12, nous obtenons ce qui suit :

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$ $\forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}^{\alpha}(\omega) > x\right\} \leq P\left\{\omega : \underline{b}^{1-\beta}(\omega) > x\right\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow$ $\overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$.
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$ $\forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}^{\alpha}(\omega) > x\right\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}^{\beta}(\omega) > x\right\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow$ $\overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$.
3. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$ $\forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow P\left\{\omega : \underline{a}^{1-\alpha}(\omega) > x\right\} \leq P\left\{\omega : \underline{b}^{1-\beta}(\omega) > x\right\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow$ $\underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$.

4. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\right\}$ $\forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow P\left\{\omega : \underline{a}^{1-\alpha}(\omega) > x\right\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}^{\beta}(\omega) > x\right\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[\Longleftrightarrow$ $\underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$.

5.2.4 Expressions en termes de dominance stochastique des intervalles aléatoires

En utilisant la proposition 7 du chapitre 2 portant sur les expressions de la dominance stochastique des intervalles aléatoires en termes de celle des variables aléatoires, nous déduisons de la proposition 27, les expressions de la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

Corollaire 1 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
Alors $\forall \alpha, \beta \in (0,1)$, $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$ on a :

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^{1-\beta}$.
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B}^{\beta}$.
3. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{1-\alpha} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B}^{1-\beta}$.
4. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A}^{1-\alpha} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\beta}$.

Preuve. Soient $\widetilde{A}^{\alpha} = [\underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha}]$, $\widetilde{A}^{1-\alpha} = [\underline{a}^{1-\alpha}, \overline{a}^{1-\alpha}]$, $\widetilde{B}^{\beta} = [\underline{b}^{\beta}, \overline{b}^{\beta}]$ et $\widetilde{B}^{1-\beta} = [\underline{b}^{1-\beta}, \overline{b}^{1-\beta}]$ les coupes de niveau de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$.
En vertu de la proposition 7, $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$ nous avons :

1. $\widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^{1-\beta} \Longleftrightarrow \overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$,
2. $\widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B}^{\beta} \Longleftrightarrow \overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$,
3. $\widetilde{A}^{1-\alpha} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B}^{1-\beta} \Longleftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$,
4. $\widetilde{A}^{1-\alpha} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\beta} \Longleftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$.

Alors il suffit de remplacer dans la proposition 27 :

1. $\overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$ par $\widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^{1-\beta}$.
2. $\overline{a}^{\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$ par $\widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B}^{\beta}$.
3. $\underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$ par $\widetilde{A}^{1-\alpha} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B}^{1-\beta}$.
4. $\underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \overline{b}^{\beta}$ par $\widetilde{A}^{1-\alpha} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\beta}$.

5.2.5 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes

En utilisant la remarque 7 (chapitre 5), nous déduisons du corollaire 1, les expressions de la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes comme suit :

Corollaire 2 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
$\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$ on a :

1. $\forall \alpha \in (0,1)\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}$
2. $\forall \alpha \in (0,1)\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B}$
3. $\forall \alpha \in (0,1)\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{((1-\alpha)-nec,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B}$
4. $\forall \alpha \in (0,1)\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$

Preuve. En remplaçant dans le corollaire 1, β par $1-\alpha$ pour item 1, β par α pour item 2, α par $1-\alpha$ et β par $1-\alpha$ pour item 3 et α par $1-\alpha$ et β par α pour item 4, nous obtenons $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$:

1. $\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,((1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^{\alpha}$.
2. $\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(j,j)} \widetilde{B}^{\alpha}$.
3. $\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{((1-\alpha)-nec,((1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(i,i)} \widetilde{B}^{\alpha}$.
4. $\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\alpha}$.

En utilisant la remarque 7, nous obtenons $\forall l,k \in \{i,j\}$ avec $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{3,4\}$:
$\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(l,k)} \widetilde{B}^{\alpha} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{l,k)} \widetilde{B}$. Ensuite il suffit de remplacer $\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^{\alpha} \leq^{s.d}_{(l,k)} \widetilde{B}^{\alpha}$ par $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{l,k)} \widetilde{B}$ avec $l,k \in \{i,j\}$.

5.3 Extension de la dominance stochastique des variables aléatoires floues en utilisant les variables aléatoires graduelles

Nous avons défini au chapitre 4, section 4.3, les variables aléatoires graduelles et nous avons déduit qu'une variable aléatoire floue peut être vue comme un intervalle de variables aléatoires graduelles. Nous définissons, dans ce qui suit, la dominance stochastique entre deux variables aléatoires graduelles prises dans deux variables aléatoires floues. Ensuite nous établissons un lieu entre cette définition et celle de la dominance stochastique entre ces deux variables aléatoires floues en utilisant d'une part leurs α-coupes et d'autre part possibilité, nécessité.

5.3.1 Dominance stochastique des variables aléatoires graduelles

En nous basant sur la définition de la dominance stochastique du premier ordre des variables aléatoires réelles et la comparaison de nombres graduels, nous définissons la dominance stochastique des variables aléatoires graduelles comme suit :

Définition 16 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On dit que $\tilde{t}$ est stochastiquement dominée par $\tilde{s}$, on note $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$, si $\forall \alpha \in (0,1]$
$P\{\omega : t_\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > x\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[$

Autrement dit : la variable aléatoire graduelle $\tilde{t}$ est stochastiquement dominée par la variable aléatoire graduelle $\tilde{s}$ est équivalent à $\forall \alpha \in]0,1]$ la variable aléatoire réelle t_α est stochastiquement dominée par la variable aléatoire réelle s_α.

Remarque 10 *Nous avons :*

1. *$\forall \alpha \in (0,1], t_\alpha$ et s_α sont des variables aléatoires éelles.*
2. *$\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1] t_\alpha \leq_{s.d} s_\alpha$.*

Nous établissons les liens entre la dominance stochastique des variables aléatoires graduelles et la dominance stochastique :

1. des variables aléatoires réelles
2. des intervalles aléatoires
3. des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes
4. des variables aléatoires floues utilisant possibilité, nécessité

comme suit :

5.3.1.1 Liens avec la dominance stochastique des variables aléatoires réelles

Considérons deux variables aléatoires graduelles quelconques $\tilde{t}$ et $\tilde{s}$ appartenant respectivement aux variables aléatoires floues $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$. En tenant compte de la remarque 6, à savoir qu'une variable aléatoire floue $\widetilde{A}$ peut être vue comme un intervalle de variables aléatoires graduelles comme suit : $\widetilde{A} = \{\tilde{t} : \underline{a}_\alpha \leq t_\alpha \leq \overline{a}_\alpha, \forall \alpha \in (0,1]\} = \{\tilde{t} : \tilde{t} \in \widetilde{A}\}$, où $\underline{a}_\alpha$ et $\overline{a}_\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'α-coupe de $\widetilde{A}$, nous établissons que la dominance stochastique entre les variables aléatoires graduelles $\tilde{t}$ et $\tilde{s}$ est en relation avec la dominance stochastique entre les bornes de $\widetilde{A}^\alpha$ et celles de $\widetilde{B}^\alpha$, où $\widetilde{A}^\alpha$ et $\widetilde{B}^\alpha$ sont respectivement les α-coupes de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, comme suit :

Proposition 28 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues, $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$, $\widetilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ leurs α-coupes respectives et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. *si $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ et $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$, $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$, alors $\forall \alpha \in (0,1]$, $\underline{a}^\alpha \leq_{s.d} \overline{b}^\alpha$.*
2. *si $\forall \alpha \in (0,1]$, $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha$, alors $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ et $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$.*

Preuve.

1. Nous avons $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ et $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$ i.e. $\forall \alpha \in (0,1], P\{\omega : t_\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > x\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[$. Or on sait que $\forall \omega$ et $\forall \alpha \in (0,1), t_\alpha(\omega) \in \widetilde{A}^\alpha(\omega) = [\underline{a}^\alpha(\omega), \overline{a}^\alpha(\omega)]$ et $s_\alpha(\omega) \in \widetilde{B}^\alpha(\omega) = [\underline{b}^\alpha(\omega), \overline{b}^\alpha(\omega)]$.
   Donc $\forall \omega$ et $\forall \alpha \in (0,1)$, $t_\alpha(\omega) \geq \underline{a}^\alpha(\omega)$ et $\overline{b}^\alpha(\omega) \geq s_\alpha(\omega)$
   nous obtenons alors que $\forall x \in R$, et $\forall \alpha \in (0,1)$, $P\{\omega : \underline{a}^\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : t_\alpha(\omega) > x\}$ et $P\{\omega : s_\alpha(\omega) > x\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}^\alpha(\omega) > x\right\}$.
   Alors il s'ensuit que
   $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s} \Longrightarrow \forall \alpha \in (0,1), P\{\omega : \underline{a}^\alpha(\omega) > x\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}^\alpha(\omega) > x\right\}, \forall x \in R.$
   Autrement dit : $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s} \Longrightarrow \forall \alpha \in (0,1]$, $\underline{a}^\alpha \leq_{s.d} \overline{b}^\alpha$.
2. nous avons $\forall \alpha \in (0,1]$, $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha$, i.e.
   $\forall \alpha \in (0,1), P\{\omega : \overline{a}^\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}^\alpha(\omega) > x\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[$. Etant donné que $\forall \alpha \in (0,1)$, $\overline{a}^\alpha(\omega) \geq t_\alpha(\omega)$ et $s_\alpha(\omega) \geq \underline{b}^\alpha(\omega)$ donc $\forall x \in]-\infty, +\infty[$ et $\forall \alpha \in (0,1)$, nous avons :
   $P\{\omega : t_\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \overline{a}^\alpha(\omega) > x\}$ et $P\{\omega : \underline{b}^\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > x\}$.
   il s'ensuitt alors que :
   $\forall \alpha \in (0,1]$, $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha \Longrightarrow \forall \alpha \in (0,1]$, $P\{\omega : t_\alpha(\omega) > x\} \leq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > x\}$, $\forall x \in]-\infty, +\infty[$.
   Autrement dit $\forall \alpha \in (0,1]$, $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha \Longrightarrow \tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$.

5.3.1.2 Liens avec la dominance stochastique des intervalles aléatoires

En utilisant la proposition 7 du chapitre 2 portant sur les expressions de la dominance stochastique des intervalles aléatoires en termes de dominance stochastique de variables aléatoires, nous déduisons de la proposition 28, les liens entre la dominance stochastique des variables aléatoires graduelles et la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

Corollaire 3 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. *si* $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$ *on a* $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$*, alors* $\forall i \in \{1, 2\}$, $\forall j \in \{3, 4\}$ *et* $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^\alpha$
2. *si* $\forall i \in \{1, 2\}$, $\forall j \in \{3, 4\}$ *et* $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^\alpha$*, alors* $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$.

Preuve. Soient $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$ et $\widetilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ les α-coupes de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ respectivement.
En vertu de la proposition 7 du chapitre 2, nous avons $\forall i \in \{1, 2\}$ et $\forall j \in \{3, 4\}$, $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^\alpha \iff \underline{a}^\alpha \leq_{s.d} \overline{b}^\alpha$ et $\forall i \in \{1, 2\}$ et $\forall j \in \{3, 4\}$, $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^\alpha \iff \overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha$. Alors il suffit de remplacer dans la proposition 27, $\underline{a}^\alpha \leq_{s.d} \overline{b}^\alpha$ et $\overline{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^\alpha$ par $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^\alpha$ et $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^\alpha$ respectivement.

5.3.1.3 Liens avec la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes

En utilisant la remarque 7 (chapitre 5), nous déduisons du corollaire 3, les liens entre la dominance stochastique des variables aléatoires graduelles et la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes comme suit :

Corollaire 4 *Soient* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ *deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. *si* $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$, $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$*, alors* $\forall i \in \{1, 2\}$ *et* $\forall j \in \{3, 4\}$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$
2. *si* $\forall i \in \{1, 2\}$ *et* $\forall j \in \{3, 4\}$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}$*, alors* $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$

Preuve. Il suffit alors de remplacer dans le corollaire 3 : $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}^\alpha$ par $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$ et $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\widetilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}^\alpha$ par $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}$.

5.3.1.4 Liens avec la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité

En utilisant le corollaire 2 portant sur les expressions de la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité, nécessité en termes de dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes, nous déduisons du corollaire 4, les liens entre la dominance stochastique des variables aléatoires graduelles et la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité comme suit :

Corollaire 5 *Soient* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ *deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. *si* $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$, $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}$, *alors* $\forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \leq^{s.d}_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B}$
2. *si* $\forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B}$, *alors* $\tilde{t} \leq_{s.d} \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$

Preuve. En considérant le corollaire 2, nous avons : $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \leq^{s.d}_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B}$ et $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B}$. Donc il suffit de remplacer dans le corollaire 4, $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$ et $\forall i \in \{1,2\}$ et $\forall j \in \{3,4\}$, $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B}$ par respectivement $\forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \leq^{s.d}_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B}$ et $\forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B}$.

5.4 Extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues en utilisant les indices pour ordonner les quantités floues

Soit $InO = \{Y_2, FR, CL, CM^{1/2}\}$ l'ensemble des indices pour ordonner les quantités floues et $F(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles flous.

En nous basant sur la définition de la dominance stochastique classique, nous définissons la dominance stochastique des variables aléatoires floues en utilisant les indices pour ordonner les quantités floues, et, pour donner un caractère général à cette définition, nous utilisons deux indices comme suit :

Définition 17 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* $F, G \in InO$.
On dit que $\widetilde{A}$ *est* (F,G) *stochastiquement dominée par* $\widetilde{B}$ *si* $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P\left\{\omega : F(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} \leq P\left\{\omega : G(\widetilde{B}(\omega)) > x\right\}$.
On note : $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,G)} \widetilde{B}$.

Remarque 11 *Etant donné que pour tout* $F, G \in InO$, $F(\widetilde{A})$ *et* $G(\widetilde{B})$ *sont des variables aléatoires réelles, alors la variable aléatoire floue* $\widetilde{A}$ *est* (F,G) *stochastiquement dominée par la variable aléatoire floue* $\widetilde{B}$ *est équivalent à : la variable aléatoire réelle* $F(\widetilde{A})$ *est stochastiquement dominée par la variable aléatoire réelle* $G(\widetilde{B})$.

Proposition 29 *Soient* $\widetilde{A}$ *et* $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues.*
On a alors :

1. *Pour tout* $F, G \in InO$
   $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,F)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(G,G)} \widetilde{B}$.
2. *Pour tout* $F, G, F', G' \in InO$
   $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F',G')} \widetilde{B}$
3. *Pour tout* $F, G, F', G' \in InO$
   $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow F(\widetilde{A}) \leq_{s.d} F(\widetilde{B}) \Longleftrightarrow G(\widetilde{A}) \leq_{s.d} G(\widetilde{B})$

Preuve. Nous avons d'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $F \in InO$, $F(x) = x$ et d'autre part pour tout $\omega \in \Omega$, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des nombres flous, alors en vertu de la proposition 15, nous avons $Y_2(\widetilde{A}(\omega)) > x \Longleftrightarrow FR(\widetilde{A}(\omega)) > x \Longleftrightarrow CL(\widetilde{A}(\omega)) > x \Longleftrightarrow CM^{1/2}(\widetilde{A}(\omega)) > x)$. Il s'ensuit que
$\left\{\omega : Y_2(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = \left\{\omega : FR(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = \left\{\omega : CL(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = \left\{\omega : CM^{1/2}(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\}$.
Par conséquent
$P\left\{\omega : Y_2(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = P\left\{\omega : FR(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = P\left\{\omega : CL(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = P\left\{\omega : CM^{1/2}(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\}$
Nous concluons alors que pour tout $F, G, F', G' \in InO$
$P\left\{\omega : F(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = P\left\{\omega : G(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = P\left\{\omega : F'(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\} = P\left\{\omega : G'(\widetilde{A}(\omega)) > x\right\}$.
Ainsi il est clair que pour tout $F, G, F', G' \in InO$
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F,F)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(G,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(F',G')} \widetilde{B} \Longleftrightarrow F(\widetilde{A}) \leq_{s.d} F(\widetilde{B}) \Longleftrightarrow G(\widetilde{A}) \leq_{s.d} G(\widetilde{B})$

5.5 Extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues de type L-R

Dans ce cas, nous considérons la combinaison de probabilité et les relations valuées entre les intervalles flous de type L-R définies par Chanas *et col.* [15, 12] et reprises à la section 3.2.1 comme étant la généralisation des relations d'ordre des intervalles de nombres réels.
Cette combinaison est en quelque sorte une généralisation de la dominance stochastique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues de type L-R. Nous prolongeons alors la définition de la dominance stochastique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues de type L-R comme suit :

Définition 18 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R, et $i, j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$. On dit que $\widetilde{A}$ est (i, j) stochastiquement dominée par $\widetilde{B}$, on note $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B}$, si et seulement si* $\forall \alpha \in [0, 1)$: $P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}, \forall x \in \mathbb{R}$.

En nous basant sur cette définition et les propriétés des intervalles flous de type L-R établies dans [12, 15], reprises à la proposition 14 et aux lemmes 1, 2 et 3 du chapitre 3, nous proposons dans ce qui suit les propriétés de la dominance stochastique des variables aléatoires floues de type L-R.

Proposition 30 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R, et $i \in \{2D, 3D\}$. On alors $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:*

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,1D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,4D)} \widetilde{B}$.
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(4D,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1D,i)} \widetilde{B}$.

Preuve.

1. Nous avons pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{B}(\omega) \in FN(L, R)$. Alors en vertu de la proposition 14 du chapitre 3, nous avons pour $i \in \{2D, 3D\}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $\mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), x) \leq \mu_i(\widetilde{B}(\omega), x) \leq \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x)$.
   D'où pour $i \in \{2D, 3D\}$, nous avons $\forall \alpha \in [0, 1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $\mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Rightarrow \mu_i(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Rightarrow \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Longrightarrow$
   $\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \subset \left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \subset \left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$. (*)
   Par conséquent, pour $i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0, 1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$.
   Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
   $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,1D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,4D)} \widetilde{B}$.
2. En remplaçant $\widetilde{B}(\omega)$ par $\widetilde{A}(\omega)$ dans l'inégalité (*), nous obtenons pour $i \in \{2D, 3D\}$, que $\forall \alpha \in [0, 1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\}$.
   Par conséquent, pour $i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0, 1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$.
   Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
   $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(4D,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1D,j)} \widetilde{B}$.

Corollaire 6 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R On a alors $\forall k \in (1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I)$:*

1. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(4D,k)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1D,k)} \widetilde{B}$.
2. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(k,1D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(k,4D)} \widetilde{B}$.

3. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(4I,k)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1I,k)} \widetilde{B}$.
4. $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(k,1I)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(k,4I)} \widetilde{B}$.

Preuve.

1. Les items 1 et 2 sont les conséquences directes des item 1 et 2 respectivement de la proposition 30.

2. Pour montrer les items 3 et 4 à savoir :
   – $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(4I,k)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1I,k)} \widetilde{B}$.
   – $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(k,1I)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(k,4I)} \widetilde{B}$.
   Il suffit d'appliquer la définition 18 et utiliser la proposition 14 du chapitre 3 comme suit :
   Nous avons pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{B}(\omega) \in FN(L,R)$. Alors en vertu de la proposition 14, nous avons : $\forall x \in \mathbb{R} : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), x)) \leq \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), x)$. D'où $\forall \alpha \in [0,1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $\mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Rightarrow \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Longrightarrow \left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \subset \left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$. (**)
   Par conséquent pour tout $j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0,1)$ et $\forall x \in \mathbb{R} : P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$.
   Autrement dit que : $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\} : \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,1I)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(j,4I)} \widetilde{B}$.
   En remplaçant $\widetilde{B}(\omega)$ par $\widetilde{A}(\omega)$ dans l'inégalité (**) établie ci-dessus, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0,1)$ et $\forall x \in \mathbb{R} : P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\}$.
   Par conséquent pour tout $j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, $\forall \alpha \in [0,1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$.
   Autrement dit que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\} : \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(4I,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq^{s.d}_{(1I,j)} \widetilde{B}$.

Proposition 31 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R telles que :*
$\widetilde{A}(\omega) = (\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega), \delta^a, \gamma^a)$, $\widetilde{B}(\omega) = (\underline{b}(\omega), \overline{b}(\omega), \delta^b, \gamma^b)$.
Alors $\forall i \in \{4D, 4I\}$ et $\forall j \in \{1D, 1I\}$, on a : $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longrightarrow \overline{a} \leq^{s.d} \underline{b}$.

Preuve. Nous avons d'une part $i \in \{4D, 4I\}$, et $j \in \{1D, 1I\}$ et
$\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\}$, $\forall \alpha \in [0,1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.
Et d'autre part pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous de type *L-R*, donc :

1. pour $\omega \in \Omega$ donné, et pour $\alpha \in [0,1[$, nous avons $\mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Longrightarrow \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > 0$ avec $j \in \{1D, 1I\}$, alors en vertu du lemme 1, nous obtenons $\mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > 0 \Longrightarrow \underline{b}(\omega) > x$ ce qui implique que $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\right\}$

2. pour $\omega \in \Omega$ donné, et pour $\alpha \in [0,1[$, donc $\alpha < 1$ nous avons $\mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) = 1 \Longrightarrow \mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) > \alpha$, $\forall \alpha \in [0,1[$ ce qui implique que $P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) = 1\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) > \alpha\right\}$.
   Par ailleurs, nous avons, en vertu du lemme 1 pour $i \in \{4D, 4I\}$, $\mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) = 1 \Longleftrightarrow \overline{a}(\omega) > x$ ce qui implique que $P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) = 1\right\} = P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\right\}$

Nous concluons, pour $i \in \{4D, 4I\}$ et $j \in \{1D, 1I\}$, que $\forall \alpha \in [0,1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega),x) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega),x) > \alpha\right\} \Longrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}(\omega) > x\right\} \leq P\left\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\right\}$.
Autrement dit que pour $i \in \{4D, 4I\}$ et $j \in \{1D, 1I\}$: $\widetilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longrightarrow \overline{a} \leq^{s.d} \underline{b}$.

5.6 Extension de la préférence statistique aux variables aléatoires floues en utilisant leurs α-coupes

Dans ce cas, nous considérons la combinaison de probabilité et l'approche qui consiste à comparer les α-coupes des intervalles flous qui sont les valeurs des variables aléatoires floues. Donc c'est la probabilité de comparaison entre les α-coupes des variables aléatoires floues comme suit :

Définition 19 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $i,j \in \{1,2,3,4\}$.*
On dit que $\widetilde{A}$ est (i,j) statistiquement préférable à $\widetilde{B}$, on note $\widetilde{A} \geq^{p}_{(i,j)} \widetilde{B}$ si :
$\forall \alpha \in (0,1]$, $P\left\{\omega : \widetilde{A}^{\alpha}(\omega) >_i \widetilde{B}^{\alpha}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \widetilde{B}^{\alpha}(\omega) >_j \widetilde{A}^{\alpha}(\omega)\right\}$,
où $\widetilde{A}^{\alpha}$ et $\widetilde{B}^{\alpha}$ sont les α-coupes de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ respectivement.

Remarque 12 *$\widetilde{A}^{\alpha}$ et $\widetilde{B}^{\alpha}$ sont des intervalles aléatoires, alors nous avons l'équivalence entre la préférence statistique des variables aléatoires floues et la la préférence statistique des intervalles aléatoires comme suit : $\forall i,j \in \{1,2,3,4\}$: $\widetilde{A} \geq^{p}_{(i,j)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1]\ \widetilde{A}^{\alpha} \geq^{p}_{(i,j)} \widetilde{B}^{\alpha}$*

Donc il est bien évident que nous retrouvons pour la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes, les propriétés de la préférence statistique des intervalles aléatoires comme suit :

5.6.1 Propriétés

On a d'une part $\geq^{p}_{(1,.)}$ est la plus forte, $\geq^{p}_{(4,.)}$ est la plus faible et $\geq^{p}_{(i,.)}$, $i \in \{2,3\}$ sont les intermédiaires. Et d'autre part $\geq^{p}_{(.,4)}$ est la plus forte, $\geq^{p}_{(.,1)}$ est la plus faible et $\geq^{p}_{(.,i)}$, $i \in \{2,3\}$ sont les intermediaires. D'où les implications suivantes :

Proposition 32 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues.* $\forall j \in \{1,2,3,4\}$ *on a :*

1. $\widetilde{A} \geq^p_{(1,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4,j)} \widetilde{B}$ *pour tout* $i \in \{2,3\}$.
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(j,4)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,1)} \widetilde{B}$ *pour tout* $i \in \{2,3\}$.

Preuve. Voir Remarque 7 du chapitre 5 et proposition 9 du chapitre 2.

5.6.2 Expressions en termes de préférence statistique des variables aléatoires

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$, $\widetilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ leurs α-coupess respectives avec $\alpha \in (0,1]$.

Nous avons d'une part les expressions de la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes en termes de préférence statistique des variables aléatoires comme suit :

Proposition 33 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues. On a alors :*

1. $\widetilde{A} \geq^p_{(2,2)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1],\ \underline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(3,3)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha$
3. $\widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1],\ \underline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha$
4. $\widetilde{A} \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$.

Preuve. Eviente, il suffit d'utiliser la remarque 12 du chapitre 5 et la proposition 10 du chapitre 2.

Et d'autre part, nous avons les liens entre la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes et la préférence statistique des variables aléatoires réelles comme suit :

5.6.3 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires

Proposition 34 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité,* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* $\widetilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$, $\widetilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ *leurs* α*-coupes respectives avec* $\alpha \in (0,1]$.
On a alors :

1. $\widetilde{A} \geq^p_{(1,1)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall \alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(1,2)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall \alpha \in (0,1],\ \underline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$

3. $\widetilde{A} \geq^p_{(1,3)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha$
4. $\widetilde{A} \geq^p_{(2,4)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \underline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$
5. $\widetilde{A} \geq^p_{(3,4)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha$
6. $\forall j = 1,3,\ \widetilde{A} \geq^p_{(2,j)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$
7. $\forall j = 1,2,\ \widetilde{A} \geq^p_{(3,j)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$
8. $\forall j = 2,3,4, \widetilde{A} \geq^p_{(4,j)} \widetilde{B} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$

Preuve. Eviente, il suffit d'utiliser la remarque 12 du chapitre 5 et la proposition 11 du chapitre 2.

5.7 Extension de la préférence statistique aux variables aléatoires floues en utilisant possibilité et nécessité

Dans ce cas, pour la comparaison d'intervalles flous, nous avons l'approche possibiliste. Donc nous utilisons la combinaison de probabilité et possibilité, et, probabilité et nécessité, pour définir la préférence statistique des variables aléatoires floues. C'est une généralisation de la définition de la préférence statistique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues, compte tenu du fait que possibilité et nécessité généralisent les relations respectives $>_4$ et $>_1$ des intervalles réels aux intervalles flous.
Dans ce qui suit, les abréviations $\alpha - pos$ et $\beta - nec$ représentent respectivement α-possiblement et β-nécessairement. Nous définissons, sous quatre formes, la préférence statistique des variables aléatoires floues en utilisant possibilité et nécessité comme suit :

Définition 20 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0,1]$.*
On dit que :

1. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - pos, \beta - nec)$ statistiquemnt préférable à $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$
   on note : $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B}$.
2. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - nec, \beta - nec)$ statistiquemnt préférable à $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
   on note : $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B}$.
3. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - pos, \beta - pos)$ statistiquemnt préférable à $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$
   on note : $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B}$.

4. *$\widetilde{A}$ est $(\alpha - nec, \beta - pos)$ statistiquemnt préférable à $\widetilde{B}$ si :*
   $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$
   on note : $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$.

5.7.1 Propriétés

Etant donné que la valeur d'une variable aléatoire floue est un intervalle flou, alors en utilisant les propriétés des possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 13 du chapitre 3, à savoir que pour ω donné, $nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \leq pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega))$, nous établissons que la forme $\succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)}$ est la plus forte, $\succeq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-nec)}$ la plus faible, $\succeq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-pos)}$ et $\succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-nec)}$ sont les intermédiaires. D'où les implications suivantes :

Proposition 35 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0,1]$.*
On a alors :

1. $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B}$.

2. $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B}$.

Preuve. Nous avons donc pour $\omega \in \Omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \leq pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega))$, d'où $\forall \alpha \in]0,1]$;
$nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha \Longrightarrow pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha$. par la suite
$\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \subset \left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\}$.
De même $\forall \beta \in]0,1]$ nous avons : $P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
Nous utilisons ces deux inégalités pour montrer cette proposition comme suit : nous avons $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B}$ i.e. $P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$
Alors il s'ensuit que :
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega)) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq$
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$,
d'où nous déduisons d'une part que :
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
Autrement dit que :
$\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B}$.

Et d'autre part que :
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
Autrement dit que :
$\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-nec)} \widetilde{B}$

Pour $q \in \{pos, nec\}$ et $r \in \{pos, nec\}$, $\geq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)}$ devient forte selon que α croît et/ou β décroît comme suit :

Proposition 36 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0,1]$.*
On a alors :

1. $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^{p}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B}$,
   Pour $q, r \in \{pos, nec\}$ et $\gamma \in]0,1]$ tels que $\gamma \leq \alpha$.

2. $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-q,\delta-r)} \widetilde{B}$,
   Pour $q, r \in \{pos, nec\}$ et $\delta \in]0,1]$ tels que $\delta \geq \beta$.

3. $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^{p}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$,
   Pour $q, r \in \{pos, nec\}$ et $\gamma \in]0,1], \delta \in]0,1]$ tels que $\gamma \geq \alpha$ et $\delta \leq \beta$.

Preuve. Nous avons $q, r \in \{pos, nec\}$ et pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous.

1. Puisque nous avons $\gamma \leq \alpha$, alors pour $\omega \in \Omega$:
   $q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha \Longrightarrow q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \gamma$. Par la suite
   $\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \subset \left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \gamma\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \gamma\right\}$.
   Il s'ensuit que :
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \gamma\right\} \geq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
   Autrement dit que : $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^{p}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B}$

2. Puisque $\delta \geq \beta$, De la même manière que pour item 1, nous avons :
   $P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \delta\right\} \leq P\left\{\omega, r(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
   Par conséquent

$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : r(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \delta\right\}$.
Autrement dit que :$\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.
Pour $q \in \{pos, nec\}$, $r \in \{pos, nec\}$ et $\delta \in [0,1]$ tels que $\delta \geq \beta$.

3. Pour $\gamma \leq \alpha$, nous avons à l'item 1 que :
$\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B}$
et pour $\delta \geq \beta$, nous avons à l'item 2 que :
$\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\gamma-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.
Alors par transitivité de l'implication, si $\gamma \leq \alpha$ et $\delta \geq \beta$ nous avons
$\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,\beta-r)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\gamma-q,\delta-r)} \widetilde{B}$.

Nous utilisons aussi les propriétés des possibilité et nécessité [30] rappelées à la proposition 13 du chapitre 3, à savoir que pour ω donné, $nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) > 0 \Longrightarrow pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) = 1$, pour établir les résultats suivants :

Proposition 37 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
Alors $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ et $\forall q \in \{pos, nec\}$, on a :

1. $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-q)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(1-pos,\beta-q)} \widetilde{B}$.

2. $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,1-pos)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,\beta-nec)} \widetilde{B}$

Preuve.

1. Pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous, donc $nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) > 0 \Longrightarrow$ $pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) = 1$ et nous avons $\forall \alpha \in]0,1]$:
$nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha \Longrightarrow nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) > 0$. Alors par transitivité, nous obtenons
$nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha \Longrightarrow pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) = 1$. Il s'ensuit que
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) = 1\right\}$
Par suite nous avons $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-q)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow$
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : q(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) > \beta\right\} \Longrightarrow P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) = 1\right\} \geq$
$P\left\{\omega : q(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) > \beta\right\} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(1-pos,\beta-q)} \widetilde{B}$.
Autrement dit $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-q)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(1-pos,\beta-q)} \widetilde{B}$, pour $q \in \{pos, nec\}$ et $\alpha, \beta \in [0,1]$
2. Nous avons pour $\alpha \in]0,1]$ et $q \in \{pos, nec\}$, $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,1-pos)} \widetilde{B}$ i.e.
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) = 1\right\}$.
Nous avons montré (item 1) que $\forall \beta \in]0,1]$,
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\} \leq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) = 1\right\}$.

Par conséquent nous obtenons :
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) = 1\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : q(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$.
Autrement dit : $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,1-pos)} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-q,\beta-nec)} \widetilde{B}$, pour $\alpha, \beta \in]0,1]$ et $q \in \{pos, nec\}$.

Dans ce qui suit, nous exprimons la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité, nécessité en termes de préférence statistique :

1. des variables aléatoires réelles ;
2. des intervalles aléatoires ;
3. des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes.

Et nous établissons ses liens avec ces mêmes préférences statistiques.

5.7.2 Expressions en termes de préférence statistique des variables aléatoires rélles

Nous exprimons deux formes, la plus forte et la plus faible avec $\beta = 1-\alpha$, de la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de de préférence statistique des variables aléatoires réelles comme suit :

Proposition 38 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
Alors $\forall\alpha \in]0,1]$, on a :

1. $\widetilde{A} \succeq^{p}_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \underline{a}^{\alpha} \geq^{p} \overline{b}^{\alpha}$.
2. $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \overline{a}^{\alpha} \geq^{p} \underline{b}^{\alpha}$.

Preuve.

1. $\forall\alpha \in]0,1]$, nous avons $\widetilde{A} \succeq^{p}_{((1-\alpha)-nec,(\alpha-pos)} \widetilde{B}$i.e.
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq 1-\alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \alpha\right\}$.
En utilisant la proposition 12 du chapitre 3, nous obtenons que :
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq 1-\alpha\right\} = P\left\{\omega : \underline{a}^{\alpha}(\omega) > \overline{b}^{\alpha}(\omega)\right\}$ et
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \alpha\right\} = P\left\{\omega : \overline{b}^{\alpha}(\omega) > \underline{a}^{\alpha}(\omega)\right\}$.
Alors nous obtenons
$\widetilde{A} \succeq^{p}_{((1-\alpha)-nec,(\alpha)-pos)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \underline{a}^{\alpha}(\omega) > \overline{b}^{\alpha}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}^{\alpha}(\omega) > \underline{a}^{\alpha}(\omega)\right\}$.
Nous concluons que $\widetilde{A} \succeq^{p}_{((1-\alpha)-nec,(\alpha)-pos)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \underline{a}^{\alpha} \geq^{p} \overline{b}^{\alpha}$.
2. Nous avons $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B}$ i.e.
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq 1-\alpha\right\}$.

En utilisant la proposition 12 du chapitre 3, nous obtenons que :
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} = P\left\{\omega : \overline{a}^{\alpha}(\omega) > \underline{b}^{\alpha}(\omega)\right\}$ et
$P\left\{\omega : nec(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq 1-\alpha\right\} = P\left\{\omega : \underline{b}^{\alpha}(\omega) > \overline{a}^{\alpha}(\omega)\right\}$
Alors nous obtenons
$\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \overline{a}^{\alpha}(\omega) > \underline{b}^{\alpha}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \underline{b}^{\alpha}(\omega) > \overline{a}^{\alpha}(\omega)\right\}.$
Nous concluons que $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \overline{a}^{\alpha} \geq^{p} \underline{b}^{\alpha}$.

5.7.3 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires rélles

Nous établissons les liens entre les deux formes intermédiaires de la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité et la préférence statistique des variables aléatoires rélles comme suit :

Proposition 39 *Soient* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *deux variables aléatoires floues et* α, $\beta \in]0,1]$.
On a alors :

1. $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Longrightarrow \overline{a}^{\alpha} \geq^{p} \underline{b}^{\alpha}$.
2. $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Longrightarrow \overline{a}^{1-\beta} \geq^{p} \underline{b}^{1-\beta}$.

Soient $\widetilde{A}^{\alpha} = [\underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha}]$, $\widetilde{A}^{1-\alpha} = [\underline{a}^{1-\alpha}, \overline{a}^{1-\alpha}]$, $\widetilde{B}^{\beta} = [\underline{b}^{\beta}, \overline{b}^{\beta}]$ et $\widetilde{B}^{1-\beta} = [\underline{b}^{1-\beta}, \overline{b}^{1-\beta}]$ et les coupes de niveau de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$.
Nous avons $\widetilde{A} \geq^{p}_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B}$ i.e.
$P\left\{\omega : pos(\widetilde{A}(\omega) > \widetilde{B}(\omega)) \geq \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : pos(\widetilde{B}(\omega) > \widetilde{A}(\omega)) \geq \beta\right\}$, qui s'écrit, en utilisant la proposition 12 du chapitre 3, comme suit : $P\left\{\omega : \overline{a}^{\alpha}(\omega) > \underline{b}^{\alpha}(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}^{\beta}(\omega) > \underline{a}^{\beta}(\omega)\right\}$.

5.7.4 Expressions en termes de préférence statistique des intervalles aléatoires

En utilisant la proposition 10 du chapitre 2, portant sur les expressions de la préférence statistique des intervalles aléatoires en termes de préférence statistique de variables aléatoires, nous déduisons de la proposition 38, les expressions de deux formes, la plus forte, et, la plus faible, de la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de préférence statistique des intervalles aléatoires comme suit :

Corollaire 7 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
$\forall \alpha \in (0,1)$ *on a :*

1. $\widetilde{A} \geq^p_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha$.
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}^\alpha$.

Preuve. Il suffit de remplacer dans la proposition 38 $\underline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha$ et $\overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$ par $\widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha$ et $\widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}^\alpha$ respectivement.

5.7.5 Liens avec la préférence statistique des intervalles aléatoires

En utilisant la proposition 11 du chapitre 2, portant sur les liens existant entre la préférence statistique des intervalles aléatoires et celle de leurs bornes, nous déduisons de la proposition 39, les liens entre les formes intermédiaires de la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité et celle des intervalles aléatoires comme suit :

Corollaire 8 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0,1]$.*
On a alors pour tout $\alpha, \beta \in]0,1]$:

1. $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A^\alpha} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha$.
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A}^{1-\beta} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^{1-\beta}$.

Preuve. Il suffit de remplacer dans la proposition 39 $\overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$ et $\overline{a}^{1-\beta} \geq^p \underline{b}^{1-\beta}$ par $\widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha$ et $\widetilde{A}^{1-\beta} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^{1-\beta}$ respectivement.

5.7.6 Expressions en termes de préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant les α-coupes

En tenant compte de la remarque 12 portant sur liens entre la préférence statistique des intervalles aléatoires et la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes, nous déduisons du corollaire 8 les expressions de la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant les α-coupes comme suit :

Corollaire 9 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
On a alors :

1. $\forall \alpha \in (0,1]$, $\widetilde{A} \geq^p_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}$.
2. $\forall \alpha \in (0,1]$, $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Leftrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}$.

Preuve. Evidente, il suffit d'utiliser le corollaire 7 et la remarque 12.

5.7.7 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant les α-coupes

Corollaire 10 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
On a :

1. $\forall \alpha \in (0,1]$, $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,\beta-pos)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}$.
2. $\forall \beta \in (0,1]$, $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-nec,\beta-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}$.

Preuve. Evidente, il suffit d'utiliser le corollaire 8 et la remarque 12.

5.8 Extension de la préférence statistique aux variables aléatoires floues en utilisant les variables aléatoires graduelles

En tenant compte du fait qu'une variable aléatoire floue peut être vue comme un intervalle de variables aléatoires graduelles, nous définissons, dans ce qui suit, la préférence statistique entre deux variables aléatoires graduelles qui sont des sélections de deux variables aléatoires floues. Ensuite nous établissons un lien entre cette définition et celle de la préférence statistique entre ces deux dernières, en utilisant d'une part leurs α-coupes et d'autre part possibilité, nécessité.

5.8.1 Préférence statistique des variables aléatoires graduelles

En nous basant sur la définition de la préférence statistique des variables aléatoires et la comparaison de nombres graduels, nous définissons la préférence statistique des variables aléatoires graduelles comme suit :

Définition 21 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On dit que $\tilde{t}$ est statistiquement préférable à $\tilde{s}$, on note $\tilde{t} \geq^p \tilde{s}$, si $\forall \alpha \in (0,1]$:
$P\{\omega : t_\alpha(\omega) > s_\alpha(\omega)\} \geq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > t_\alpha(\omega)\}$.

Nous exprimons maintenant la préférence statistique des variables aléatoires graduelles en termes de préférence statistique :

1. des variables aléatoires réelles
2. des intervalles aléatoires
3. des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes
4. des variables aléatoires floues utilisant possibilité, nécessité

comme suit :

5.8.2 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires réelles

Considérons deux variables aléatoires graduelles quelconques $\tilde{t}$ et $\tilde{s}$ appartenant respectivement aux variables aléatoires floues $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$. En tenant compte de la remarque 6, à savoir qu'une variable aléatoire floue $\widetilde{A}$ peut être vue comme un intervalle de variables aléatoires graduelles comme suit : $\widetilde{A} = \{\tilde{t} : \underline{a}_\alpha \leq t_\alpha \leq \overline{a}_\alpha, \forall \alpha \in (0,1]\} = \{\tilde{t} : \tilde{t} \in \widetilde{A}\}$, où $\underline{a}_\alpha$ et $\overline{a}_\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'α-coupe de $\widetilde{A}$, nous établissons que la préférence statistique entre les variables aléatoires graduelles $\tilde{t}$ et $\tilde{s}$ est en relation avec préférence statistique entre bornes de $\widetilde{A}^\alpha$ et celles de $\widetilde{B}^\alpha$, où $\widetilde{A}^\alpha$ et $\widetilde{B}^\alpha$ sont respectivement les α-coupes de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, comme suit :

Proposition 40 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}, \forall \tilde{s} \in \widetilde{B}, \tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Rightarrow \forall \alpha \in (0,1), \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$.
2. $\forall \alpha \in (0,1), \underline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha \Rightarrow \tilde{t} \geq^p \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$.

Preuve.

1. Nous avons :
   $\tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in (0,1], P\{\}\, \omega : t_\alpha(\omega) > s_\alpha(\omega) \geq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > t_\alpha(\omega)\}$,
   où $\forall \alpha \in (0,1]$, et $\forall \omega \in \Omega$,
   $t_\alpha(\omega) \in \widetilde{A}^\alpha(\omega) = [\underline{a}^\alpha(\omega), \overline{a}^\alpha(\omega)]$ et $s_\alpha(\omega) \in \widetilde{B}^\alpha(\omega) = [\underline{b}^\alpha(\omega), \overline{b}^\alpha(\omega)]$
   Donc nous avons $\overline{a}^\alpha(\omega) \geq t_\alpha(\omega)$ et $s_\alpha(\omega) \geq \underline{b}^\alpha(\omega)$ alors $\forall \alpha \in (0,1]$
   P$\{\omega : t_\alpha(\omega) > s_\alpha(\omega)\} \leq P\{\omega : \overline{a}^\alpha(\omega) > \underline{b}^\alpha(\omega)\}$.
   Et nous avons $s_\alpha(\omega) \geq \underline{b}^\alpha(\omega$ et $\overline{a}^\alpha(\omega) \geq t_\alpha(\omega)$ alors

$P\{\omega : \underline{b}^\alpha(\omega) > \overline{a}^\alpha(\omega)\} \leq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > t_\alpha(\omega)\}$
Il s'ensuit que :
$\tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ P\{\omega : \overline{a}^\alpha(\omega) > \underline{b}^\alpha(\omega)\} \geq P\{\omega : \underline{b}^\alpha(\omega) > \overline{a}^\alpha(\omega)\}$.
Autrement dit $\tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Longrightarrow \forall\alpha \in (0,1],\ \overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$.

2. Nous avons
$\forall\alpha \in (0,1), P\left\{\omega : \underline{a}^\alpha(\omega) > \overline{b}^\alpha(\omega)\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}^\alpha(\omega) > \underline{a}^\alpha(\omega)\right\}$.
Par ailleurs, nous avons $\forall\alpha \in (0,1]$,
$t_\alpha(\omega) \geq \underline{a}^\alpha(\omega)$ et $\overline{b}^\alpha(\omega) \geq s_\alpha(\omega)$, alors $\forall\alpha \in (0,1]$
$P\left\{\omega : \underline{a}^\alpha(\omega) > \overline{b}^\alpha(\omega)\right\} \leq P\{\omega : t_\alpha(\omega) > s_\alpha(\omega)\}$.
Et nous avons $\overline{b}^\alpha(\omega) \geq s_\alpha(\omega)$ et $t_\alpha(\omega) \geq \underline{a}^\alpha(\omega)$, alors
$P\{\omega : s_\alpha(\omega) > t_\alpha(\omega)\} \leq P\left\{\omega : \overline{b}^\alpha(\omega) > \underline{a}^\alpha(\omega)\right\}$.
Il s'ensuit que $\forall\alpha \in (0,1]$,
$\underline{a}^\alpha >^p \overline{b}^\alpha \Longrightarrow P\{\omega : t_\alpha(\omega) > s_\alpha(\omega)\} \geq P\{\omega : s_\alpha(\omega) > t_\alpha(\omega)\}$.
Autrement dit $\forall\alpha \in (0,1],\ \underline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha \Longrightarrow \tilde{t} \geq^p \tilde{s}$.

5.8.3 Liens avec la préférence statistique des intervalles aléatoires

En tenant compte de la proposition 10 du chapitre 2 portant sur les expressions de la préférence statistique des intervalles aléatoires en termes de préférence statistique des variables aléatoires, nous déduisons de la proposition 40, les liens entre la préférence statistique des variables aléatoires graduelles et la préférence statistique des intervalles aléatoires comme suit :

Corollaire 11 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. $\forall\tilde{t} \in \widetilde{A}, \forall\tilde{s} \in \widetilde{B}, \tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Rightarrow \forall\alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}^\alpha$.
2. $\forall\alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha \Rightarrow \tilde{t} \geq^p \tilde{s}, \forall\tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall\tilde{s} \in \widetilde{B}$.

Preuve. Il suffit de rmeplacer dans la proposition 40 $\overline{a}^\alpha \geq^p \underline{b}^\alpha$ et $\underline{a}^\alpha \geq^p \overline{b}^\alpha$ par respctivement $\widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}^\alpha$ et $\widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha$.

5.8.4 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes

En tenant compte de la remarque 12 portant sur les les expressions de la préférence statistique des intervalles aléatoires en termes de préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes, nous déduisons du corollaire 11 les liens entre la préférence statistique des variables aléatoires graduelles et la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant leurs α-coupes comme suit :

Corollaire 12 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues. $\tilde{t} \in \widetilde{A}$ et $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}, \forall \tilde{s} \in \widetilde{B}, \tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}$.
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B} \Rightarrow \tilde{t} \geq^p \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$.

Preuve. Il suffit de remplacer dans le corollaire 11 :
$\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}^\alpha$ et $\forall \alpha \in (0,1),\ \widetilde{A}^\alpha \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}^\alpha$ par respectivement $\widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{A} \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}$.

5.8.5 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possiblité et nécessité

En utilisant les corollaires 9 et 10 portant sur les relations entre la préférence statistique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité et celle des variables aléatoires floues utilisant leurs coupes de niveau, nous déduisons du corollaire 12 des relations entre la préférence statistique des variables aléatoires graduelles et celle des variables aléatoires floues utilisant possibilité, nécessité comme suit :

Corollaire 13 *Soient $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues et $\tilde{t} \in \widetilde{A}$, $\tilde{s} \in \widetilde{B}$ deux variables aléatoires graduelles.*
On a alors :

1. $\forall \tilde{t} \in \widetilde{A}, \forall \tilde{s} \in \widetilde{B}, \tilde{t} \geq^p \tilde{s} \Rightarrow \forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \geq^p_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B}$
2. $\forall \alpha \in (0,1), \widetilde{A} \geq^p_{\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B} \Rightarrow \tilde{t} \geq^p \tilde{s}, \forall \tilde{t} \in \widetilde{A}$ *et* $\forall \tilde{s} \in \widetilde{B}$

Preuve. Il suffit de remplacer dans le corollaire 12 $\widetilde{A} \geq^p_{(1,4)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{A} \geq^p_{(4,1)} \widetilde{B}$ par $\forall \alpha \in (0,1],\ \widetilde{A} \geq^p_{((1-\alpha)-nec,\alpha-pos)} \widetilde{B}$ et $\widetilde{A} \geq^p_{(\alpha-pos,(1-\alpha)-nec)} \widetilde{B}$ respectivement.

5.9 Extension de la préférence statistique aux variables aléatoires floues en utilisant les indices de comparaison de quantités floues

Soient $InO = \left\{Y_2, FR, CL, CM^{1/2}\right\}$, l'ensemble des indices de comparaison de quantités floues et $F(R)$ l'ensemble des intervalles flous.

En nous basant sur la définition de la préférence statistique des variables aléatoires, nous définissons la préférence statistiquence des variables aléatoires floues en utilisant les indices de comparaison de quantités floues, et, pour donner un caractère général à cette définition, nous utilisons deux indices comme suit :

Définition 22 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues,et $F, G \in InO$*
On dit que $\widetilde{A}$ est (F, G) statistiquement préférable à $\widetilde{B}$ si :
$P\left\{\omega : F(\widetilde{A}(\omega)) > F(\widetilde{B}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : G(\widetilde{B}(\omega)) > G(\widetilde{A}(\omega))\right\}.$
On note : $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(F,G)} \widetilde{B}$.

Remarque 13 $\forall F, G \in InO$ *:*
si $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont des variables aléatoires floues alors $F(\widetilde{A})$ et $G(\widetilde{B})$ sont des variables aléatoires réelles,

Nous montrons dans ce qui suit qu'il n'est pas nécéssaire de considérer deux indices. Vu leurs propriétés établies dans [60] et reprises eà la proposition 13 du chapitre 3, un seul suffit.

Proposition 41 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues.*
On a alors :

1. $\forall F, G, F', G' \in InO$
   $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(F',G')} \widetilde{B}$
2. $\forall F, G \in InO$:
   $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(F,F)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow \widetilde{A} \succeq^{p}_{(G,G)} \widetilde{B}.$
3. $\forall F, G \in InO$:
   $\widetilde{A} \succeq^{p}_{(F,G)} \widetilde{B} \Longleftrightarrow F(\widetilde{A}) \geq^{p} F(\widetilde{B}) \Longleftrightarrow G(\widetilde{A}) \geq^{p} G(\widetilde{B})$

Preuve. Pour tout $\omega \in \Omega, \widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des nombres flous, alors en vertu de la proposition 13, nous avons $Y_2(\widetilde{A}(\omega)) > Y_2(\widetilde{B}(\omega)) \Longleftrightarrow FR(\widetilde{A}(\omega)) > FR(\widetilde{B}(\omega)) \Longleftrightarrow CL(\widetilde{A}(\omega)) > CL(\widetilde{B}(\omega)) \Longleftrightarrow CM^{1/2}(\widetilde{A}(\omega)) > CM^{1/2}(\widetilde{B}(\omega))$. Il s'ensuit que
$\left\{\omega : Y_2(\widetilde{A}(\omega)) > Y_2(\widetilde{B}(\omega))\right\} = \left\{\omega : FR(\widetilde{A}(\omega)) > FR(\widetilde{B}(\omega))\right\} =$
$\left\{\omega : CL(\widetilde{A}(\omega)) > CL(\widetilde{B}(\omega))\right\} = \left\{\omega : CM^{1/2}(\widetilde{A}(\omega)) > CM^{1/2}(\widetilde{B}(\omega))\right\}$. Par conséquent
$P\left\{\omega : Y_2(\widetilde{A}(\omega)) > Y_2(\widetilde{B}(\omega))\right\} = P\left\{\omega : FR(\widetilde{A}(\omega)) > FR(\widetilde{B}(\omega))\right\} =$
$P\left\{\omega : CL(\widetilde{A}(\omega)) > CL(\widetilde{B}(\omega))\right\} = P\left\{\omega : CM^{1/2}(\widetilde{A}(\omega)) > CM^{1/2}(\widetilde{B}(\omega))\right\}$

Nous concluons alors que pour tout $F, G, F', G' \in InO$
$P\left\{\omega : F(\widetilde{A}(\omega)) > F(\widetilde{B}(\omega))\right\} = P\left\{\omega : G(\widetilde{A}(\omega)) > G(\widetilde{B}(\omega))\right\} =$
$P\left\{\omega : F'(\widetilde{A}(\omega)) > F'(\widetilde{B}(\omega))\right\} = P\left\{\omega : G'(\widetilde{A}(\omega)) > G'(\widetilde{B}(\omega))\right\}.$
Ainsi il est clair que pour tout $F, G, F', G' \in InO$
$\widetilde{A} \geq^p_{(F,G)} \widetilde{B} \iff \widetilde{A} \geq^p_{(F,F)} \widetilde{B} \iff \widetilde{A} \geq^p_{(G,G)} \widetilde{B} \iff \widetilde{A} \geq^p_{(F',G')} \widetilde{B} \iff$
$F(\widetilde{A}) \geq^p F(\widetilde{B}) \iff G(\widetilde{A}) \geq^p G(\widetilde{B})$.

5.10 Extension de la préférence statistique aux variables aléatoires floues de type L-R

Dans ce cas, nous considérons la combinaison de probabilité et les relations valuées entre les intervalles flous de type L-R définies par Chanas *et col.* [15, 12] et reprises à la section 3.2.1 comme étant la généralisation des relations d'ordre des intervalles.
Cette combinaison est en quelque sorte une généralisation de la préférence statistique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues de type L-R qui peut avoir deux formes différentes. Nous proposons alors, dans ce qui suit deux définitions de la préférence statistique entre les variables aléatoires floues de type L-R, l'une coincide avec la dominance stochastique entre ces indices qui sont des variables aléatoires rélles à valeurs dans l'intervalle $(0, 1]$, l'autre avec la préférence statistique entre eux. Nous montrons que l'une raffine l'autre.

5.10.1 Approche par dominance stochastique des indices de comparaisons d'intervalles flous

En passant des intervalles flous aux variables aléatoires floues, nous devons calculer la variable aléatoire $\mu_i(\widetilde{A}, \widetilde{B})(\omega) = \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$. Nous pouvons alors comparer ces variables aléatoires, par exemple comme suit :

Définition 23 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité où Ω est un ensemble , $\mathcal{F}$ une algèbre de sous ensembles measurables et P une mesure de probabilité.*

Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R, $\widetilde{A}$ est $(i, j)-sd$ statistiquement préférable à $\widetilde{B}$ si $P(\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha) \geq P(\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.
On note $\widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \widetilde{B}$,

Nous remarquons que cette définition applique la dominance stochastique aux variables aléatoires $\mu_i(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ et $\mu_j(\widetilde{B}, \widetilde{A})$.

En nous basant sur la définition et les propriétés des intervalles flous de type L-R, nous établissons dans ce qui suit quelques propriétés de la préférence statistique des variables aléatoires floues de type L-R. La force relative des relations d'ordre $\geq_i$ est préservée par les relations $>^p_{(i,j)-sd}$:

Proposition 42 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R et $i \in \{2D, 3D\}$. alors $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ on a :*

1. $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)-sd} \widetilde{B}$.
2. $\widetilde{A} \geq^p_{(j,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,1D)-sd} \widetilde{B}$.

Preuve.

1. Nous avons pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{A}(\omega)$, $\widetilde{B}(\omega) \in FN(L,R)$. Alors, en vertu de la proposition 14 du chapitre 3, nous avons pour $i \in \{2D, 3D\}$,
$\mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) \leq \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) \leq \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$.
D'où pour $i \in \{2D, 3D\}$, nous avons $\forall \alpha \in [0,1)$;
$\mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha \Rightarrow \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha \Rightarrow \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), x) > \alpha \Longrightarrow$
$\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \subset \left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \subset \left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\}$.(***)
Par conséquent, pour $i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0,1)$:
$P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$.
Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
$\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)-sd} \widetilde{B}$.

2. Nous avons, en remplaçant dans l'inégalité (***) ci-dessus, $\widetilde{A}(\omega)$ par $\widetilde{B}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ par $\widetilde{A}(\omega)$, l'inégalité suivante :
$P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$.
Par conséquent, pour $i \in \{2D, 3D\}$ et $j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0,1)$:
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$.
Autrement dit que $\widetilde{A} >^p_{(j,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} >^p_{(j,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} >^p_{(j,1D)-sd} \widetilde{B}$.

1. Cas de la dépendance :

Corollaire 14 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R. alors $\forall i \in \{2D, 3D\}$ on a :*
- $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1D)-sd} \widetilde{B}$, *pour $i \in \{2D, 3D\}$.*
- $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,i)-sd} \widetilde{B}$, *pour $i \in \{2D, 3D\}$.*
- $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)-sd} \widetilde{B}$ *pour $j \in \{1D, 1I, 2D, 3D, 4D, 4I\}$.*
- $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4D)sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1D)-sd} \widetilde{B}$ *pour $i \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$.*

Preuve. En vertu de la proposition 42, nous avons $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
- $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)-sd} \widetilde{B}$.
- $\widetilde{A} \geq^p_{(j,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,1D)-sd} \widetilde{B}$.

Donc en particulier pour $j = i \in \{2D, 3D\}$, nous avons :
- $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,i)-sd} \widetilde{B}$.
- $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1D)-sd} \widetilde{B}$.

Par conséquent, nous obtenons :
- d'une part : $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B}$ et $\widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1D)-sd} \widetilde{B}$, d'où : $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1D)-sd} \widetilde{B}$
- et d'autre part : $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B}$ et $\widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,i)-sd} \widetilde{B}$, d'où : $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4D)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,i)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,i)-sd} \widetilde{B}$

Les deux autres items : $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)-sd} \widetilde{B}$ pour $j \in \{1D, 1I, 2D, 3D, 4D, 4I\}$ et $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4D)sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1D)-sd} \widetilde{B}$ pour $i \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ sont les conséquences directes de la proposition 42.

2. Cas de l'indépendance :

Proposition 43 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R. Aors on les deux assertions suivantes :*
- $\widetilde{A} \geq^p_{(1I,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4I,j)-sd} \widetilde{B}$ *pour $j \in \{1D, 1I, 2D, 3D, 4D, 4I\}$.*
- $\widetilde{A} \geq^p_{(i,4I)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,1I)-sd} \widetilde{B}$ *pour $i \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition 23 et utiliser la proposition 14 du chapitre 3 comme suit : pour tout ω donné, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous. Alors en vertu de la proposition 14, nous avons : $\forall \omega \in \Omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))) \leq \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$. D'où $\forall \alpha \in [0, 1)$ et $\forall \omega \in \Omega :, \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha \Rightarrow \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha \Longrightarrow$
$\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \subset \left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\}$(IN).
Par conséquent pour tout $j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, nous obtenons que $\forall \alpha \in [0, 1)$:
$P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$.
Autrement dit que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$: $\widetilde{A} \geq^p_{(1I,j)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4I,j)-sd} \widetilde{B}$.
En permuttant $\widetilde{B}(\omega)$ et $\widetilde{A}(\omega)$ dans l'inégalité (IN) établie ci-dessus, nous obtenons que $\forall \alpha \in$

$[0,1)$: $P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$.
Par conséquent pour tout $j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$, $\forall \alpha \in [0,1)$:
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$.
Autrement dit que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$: $\widetilde{A} \geq^p_{(j,4I)-sd} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,1I)-sd} \widetilde{B}$.

Par ailleurs si $[\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega)]$ est le noyau de $\widetilde{A}$ nous pouvons relier la dominance stochastique au sens de $\geq^p_{(i,j)-sd}$ à la préférence statistique entre les intervalles noyaux.

5.10.2 Liens avec la préférence statistique des variables aléatoires réelles

Proposition 44 *Soient $\widetilde{A}(\omega) = (\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega), \delta^a, \gamma^a)$ et $\widetilde{B}(\omega) = (\underline{b}(\omega), \overline{b}(\omega), \delta^b, \gamma^b)$ deux variables aléatoires floues de type $L-R$.*
Alors $\forall i \in \{1D, 1I\}$ et $\forall j \in \{4D, 4I\}$, on a :
$\widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \overline{b}$.

Preuve. Nous avons par définition :
$\widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P(\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha) \geq P(\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha)$, $\forall \alpha \in [0,1]$.
Par ailleurs, nous avons :
Pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous de type L-R.
Et $\forall \alpha \in [0,1[$, $\mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha \Longrightarrow \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 0 \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 0\right\}$. Alors, en vertu du lemme 1, nous avons d'une part :
$\forall \omega \in \Omega$ et $i \in \{1D, 1I\}$, $\mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 0 \Longrightarrow \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)$. Il s'ensuit que
$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 0\right\} \leq P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega)\right\}$.
Et d'autre part, nous avons :
$\forall \omega \in \Omega, \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) = 1 \Longrightarrow \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha, \forall \alpha \in [0,1[$ ce qui implique que
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) = 1\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega) > \alpha\right\}$ et en vertu du lemme 1, nous avons
$\forall \omega \in \Omega$ et $j \in \{4D, 4I\}$, $\mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) = 1 \Longleftrightarrow$
$\overline{b}(\omega) \geq \underline{a}(\omega) \Longrightarrow P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) = 1\right\} = P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) \geq \underline{a}(\omega)\right\}$
Nous concluons que : $\forall \alpha \in [0,1[$
$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \underline{a}(\omega) > \overline{b}(\omega\right\} \geq P\left\{\omega : \overline{b}(\omega) > \underline{a}(\omega)\right\}$
Autrement dit nous avons pour $i \in \{1I, 1D\}$ et $j \in \{4I, 4D\}$, $\widetilde{A} \geq^p_{(i,j)-sd} \Longrightarrow \underline{a} \geq^p \overline{b}$

5.10.3 Approche par préférence statistique entre indices de comparaison d'intervalles flous

Par ailleurs, nous proposons une autre définition de la préférence statistique des variables aléatoires floues de type L-R comme suit :

Définition 24 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues : $\widetilde{A}$ est (i,j) statistiquement préférable à $\widetilde{B}$ si :*
$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}.$
On note $\widetilde{A} \succeq^p_{(i,j)} \widetilde{B}$

Nous remarquons que cette définition applique la préférence statistique aux variables aléatoires $\mu_i(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ et $\mu_j(\widetilde{B}, \widetilde{A})$.

Proposition 45 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R.*
Alors $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ on a :

1. $\widetilde{A} \succeq^p_{(1D,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(i,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(4D,j)} \widetilde{B}$.
2. $\widetilde{A} \succeq^p_{(j,4D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(j,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(j,1D)} \widetilde{B}$.

Preuve.

1. Nous avons pour $\omega \in \Omega$ donné, $\widetilde{A}(\omega)$, $\widetilde{B}(\omega) \in FN(L,R)$. Alors en vertu de la proposition 14 du chapitre 3, nous avons pour $i \in \{2D, 3D\}$,
   $\mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) \leq \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) \leq \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$.
   D'où pour $i \in \{2D, 3D\}$, nous avons :
   - d'une part $\mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Rightarrow \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Rightarrow \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Longrightarrow$
     $\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \subset \left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \subset$
     $\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \Longrightarrow$
     $P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq$
     $P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$. (1)
   - Et d'autre part $\mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Rightarrow \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Rightarrow \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Longrightarrow$
     $\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \subset \left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \subset$
     $\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \Longrightarrow$
     $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq$

$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$. (2)

En utilisant les inégalités(1) et (2) établies ci-dessus, nous pouvons montrer aisément la proposition comme suit :

- $P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$
  (voir inégalité (1))
  et $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$
  (voir inégalité (2) et remplacer $\widetilde{A}(\omega)$ par $\widetilde{B}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ par $\widetilde{A}(\omega)$).
  nous permettent d'avoir :
  $$P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$$
  $$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}.$$
  Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ on a $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,j)} \widetilde{B}$.
- $P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$
  et
  $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$
  nous permettent d'avoir :
  $$P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$$
  $$P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}.$$
  Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ on a $\widetilde{A} \geq^p_{(i,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)} \widetilde{B}$.

Nous concluons alors que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
$\widetilde{A} \geq^p_{(1D,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(i,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,j)} \widetilde{B}$.

2. En utilisant les inégalités (1) et (2) établies ci-dessus, nous pouvons montrer aisément la proposition comme suit :
   - $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$
     (voir inégalité (1))
     et $P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$
     (voir inégalité (2) et remplacer $\widetilde{A}(\omega)$ par $\widetilde{B}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ par $\widetilde{A}(\omega)$).
     nous permettent d'avoir :
     $$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$$
     $$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}.$$
     Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ on a $\widetilde{A} \geq^p_{(j,4D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,i)} \widetilde{B}$.
   - $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$

et
$P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$
nous permettent d'avoir :
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_i(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$

$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$.
Autrement dit que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$ on a $\widetilde{A} \succeq^p_{(j,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(j,1D)} \widetilde{B}$.
Nous concluons alors que $\forall i \in \{2D, 3D\}$ et $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
$\widetilde{A} \succeq^p_{(j,4D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(j,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(j,1D)} \widetilde{B}$.

1. Cas de la dépendance :

   Corollaire 15 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R. $\forall i \in \{2D, 3D\}$, on a :*

   - $\widetilde{A} \succeq^p_{(1D,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(i,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(i,1D)} \widetilde{B}$.
   - $\widetilde{A} \succeq^p_{(i,4D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(i,i)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(4D,i)} \widetilde{B}$.
   - $\widetilde{A} \succeq^p_{(1D,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(4D,j)} \widetilde{B}$ *pour* $j \in \{1D, 1I, 2D, 3D, 4D, 4I\}$.
   - $\widetilde{A} \succeq^p_{(i,4D)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(i,1D)} \widetilde{B}$ *pour* $i \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$.

   Preuve.*Il suffit de remplacer dans la preuve du corollaire 14 : proposition 42 par proposition 45 et $\succeq^p_{(.,.)-sd}$ par $\succeq^p_{(.,.)}$*

2. Cas de l'indépendance :

   Proposition 46 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux variables aléatoires floues de type L-R.*
   On a :
   - $\widetilde{A} \succeq^p_{(1I,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(4I,j)} \widetilde{B}$ *pour* $j \in \{1D, 1I, 2D, 3D, 4D, 4I\}$.
   - $\widetilde{A} \succeq^p_{(i,4I))} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \succeq^p_{(i,1I)} \widetilde{B}$ *pour* $i \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$.

   Preuve. Il suffit d'appliquer la définition 24 et utiliser la proposition 14 du chapitre 3 comme suit : pour tout ω donné, $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous. Alors en vertu de la proposition 14, nous avons : $\forall \omega \in \Omega :\ \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))) \leq \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$. D'où $\forall \omega \in \Omega$, nous avons :
   d'une part :
   $\mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Rightarrow \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) \Longrightarrow$
   $\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \subset \left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\}$(IN1).
   Et nous avons d'autre part : $\mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) \Rightarrow \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) \Longrightarrow$

   $\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \subset \left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$
   $P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \leq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$(IN2).

Par conséquent, en utilisant les inégalités (IN1) et (IN2), nous obtenons que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
$P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{1I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$

$P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4I}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$.
Autrement dit que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$: $\widetilde{A} \geq^p_{(1I,j)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4I,j)} \widetilde{B}$.
En utilisant les inégalités (IN1) et (IN2) avec la permutation entre $\widetilde{B}(\omega)$ et $\widetilde{A}(\omega)$, nous obtenons que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$:
$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{4I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\} \Longrightarrow$

$P\left\{\omega : \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{1I}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_j(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$.
Autrement dit que $\forall j \in \{1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I\}$: $\widetilde{A} \geq^p_{(j,4I)} \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(j,1I)} \widetilde{B}$.

La définition de l'extension de la préférence statistique entre variables aléatoires aux variables aléatoires floues de type *L-R* basée sur la dominance stochastique est plus forte que l'application de la préférence statistique aux degrés de dominance issus de la préférence statistique entre intervalles aléatoires. D'où les résultats suivants :

Proposition 47 *Soient*
$\widetilde{A}(\omega) = (\underline{a}(\omega), \overline{a}(\omega), \alpha_A(\omega), \beta_A(\omega))$ *et* $\widetilde{B}(\omega) = (\underline{b}(\omega), \overline{b}(\omega), \alpha_B(\omega), \beta_B(\omega)$ *deux variables aléatoires floues de type L-R.*
On a alors les assertions suivantes :

1. *si* $\forall \omega \in \Omega$, $\underline{a}(\omega) \neq \underline{b}(\omega)$ *ou* $\alpha_A(\omega) \neq \alpha_B(\omega)$, *alors* $\widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)} \widetilde{B}$
2. *si* $\forall \omega \in \Omega$, $\overline{a}(\omega) \neq \overline{b}(\omega)$ *ou* $\beta_A(\omega) \neq \beta_B(\omega)$,*alors* $\widetilde{A} \geq^p_{(3D,3D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(3D,3D)} \widetilde{B}$
3. $\widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)} \widetilde{B}$
4. $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,4D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1D,4D)} \widetilde{B}$
5. $\widetilde{A} \geq^p_{(4I,1I)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4I,1I)} \widetilde{B}$
6. $\widetilde{A} \geq^p_{(1I,4I)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1I,4I)} \widetilde{B}$

Preuve.

1. Nous avons :
$\widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)-sd} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P(\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$, $\forall \alpha \in [0, 1[$.
Donc en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$, nous avons $\widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \frac{1}{2}\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \frac{1}{2}\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : 2\mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1\right\} \geq P\left\{\omega : 2\mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > 1\right\}$
Etant donné que pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons : $\underline{a}(\omega) \neq \underline{b}(\omega)$ ou $\alpha_A(\omega) \neq \alpha_B(\omega)$ et $\widetilde{A}(\omega)$, $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous de type $L-R$, alors en vertu du lemme 2 du chapitre 3, nous avons

$\mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) + \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) = 1$.
Alors $2\mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1 \Longleftrightarrow \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1 - \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$
i.e. $2\mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1 \Longleftrightarrow \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))$.
De même, nous avons aussi :
$2\mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > 1 \Longleftrightarrow \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$.
Nous concluons que $\widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{2D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$.
Autrement dit que $\widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(2D,2D)} \widetilde{B}$.

2. Pour montrer que $\forall\omega \in \Omega$, $\overline{a}(\omega) \neq \overline{b}(\omega)$ ou $\beta_A(\omega) \neq \beta_B(\omega)$,alors $\widetilde{A} \geq^p_{(3D,3D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(3D,3D)} \widetilde{B}$ (item 2), il suffit de remplacer dans la précédente démonstration, $2D, \alpha_A(\omega), \alpha_B(\omega), \underline{a}(\omega)$ et $\overline{a}(\omega)$ par respectivement $3D, \beta_A(\omega), \beta_B(\omega), \underline{b}(\omega)$ et $\overline{b}(\omega)$
3. Nous avons :
$\widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)-sd} \widetilde{B} \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \alpha\right\} \geq P(\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \alpha\right\}$, $\forall\alpha \in [0, 1[$.
Donc en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$, nous avons $\widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \frac{1}{2}\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \frac{1}{2}\right\} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : 2\mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1\right\} \geq P\left\{\omega : 2\mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > 1\right\}$
Etant donné que pour tout $\omega \in \Omega$, $\widetilde{A}(\omega)$, $\widetilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous de type $L-R$, alors en vertu de la proposition 14 du chapitre 3, nous avons : $\mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) + \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) = 1$.
Alors $2\mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1 \Longleftrightarrow \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1 - \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$
i.e. $2\mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > 1 \Longleftrightarrow \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))$.
De même, nous avons aussi :
$2\mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > 1 \Longleftrightarrow \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))$.
Nous concluons que $\widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow$
$P\left\{\omega : \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega)) > \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega))\right\} \geq P\left\{\omega : \mu_{1D}(\widetilde{B}(\omega), \widetilde{A}(\omega)) > \mu_{4D}(\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega))\right\}$.
Autrement dit que $\widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4D,1D)} \widetilde{B}$.
4. Pour montrer que $\widetilde{A} \geq^p_{(1D,4D)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1D,4D)} \widetilde{B}$, il suffit de remplacer dans la démonstration de l'tem 3, $4D$ par $1D$ et $1D$ par $4D$.
5. Pour montrer que $\widetilde{A} \geq^p_{(4I,1I)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(4I,1I)} \widetilde{B}$, il suffit de remplacer dans la démonstration de l'tem 3, $4D$ par $4I$ et $1D$ par $1I$.
6. Pour montrer que $\widetilde{A} \geq^p_{(1I,4I)-sd} \widetilde{B} \Longrightarrow \widetilde{A} \geq^p_{(1I,4I)} \widetilde{B}$, il suffit de remplacer dans la démonstration de l'tem 3, $4D$ par $1I$ et $1D$ par $4I$.

Nous avons proposé des extension de la dominance stochastique et de la préférence statistique aux variables aléatoires floues :
– de type L-R
– en utilisant possibilité et nécessité ou les variables aléatoires graduelles,
selon que les intervalles flous, valeurs de ces dernières soient vus respectivement comme intervalles aléatoires consonnants, comme distributions de possibilités ordinales ou comme intervallles de nombres graduels.

- par défuzzification en utilisant :
  - leurs α-coupes
  - les indices de comparaison de quantités floues

Chapitre 6

Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Chance constrained programming a été introduite en premier par Charnes et Cooper [16], en programmation linéaire stochastique, ensuite elle a trouvé d'autres applications telles qu'en programmation linéaire floue où elle a été introduite par Dubois [25]. Dans ce qui suit, nous rappelons ces deux variantes de chance constrained programming. Ensuite, nous proposons de les généraliser conjointement aux variables aléatoires floues, en Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients.

6.1 Chance constrained programming en programmation linéaire stochastique

Chance constrained programming en programmation linéaire stochastique due à Charnes et Cooper [16] a pour but de transformer les contraintes stochastiques en des contraintes déterministes équivalentes en considérant la probabilité de leurs réalisations, simultanément ou séparément, au moins égale à un seuil ou à des seuils choisi(s) par le décideur.
Etant donné que la méthode Chance constrained programming [16] focalise sur les contraintes, nous considérons alors un programme linéaire stochastique dont l'objectif est déterministe comme suit :

$$(P_S^3) \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

avec $c = (c_1, ..., c_n)$ où c_i sont des nombres réels et a_{ij} et b_i pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) et $x_j, j = 1, ...n$ sont des nombres réels positifs

Il y a essentiellement deux versions différentes de "Chance constrained programming " qui consistent à remplacer :
- l'ensemble des contraintes par la probabilité (jointe) de leurs réalisations simultanées au moins égale à un seuil convenablement choisi par le décideur, pour la première version
- chaque contrainte par la probabilité de sa réalisation au moins égale à un seuil choisi par le décideur, pour la seconde version.

comme suit :
- Première version :

$$(P_d^3)_1 \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega),\ i = 1, 2, ..., m\right\} \geq \alpha, \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

- Deuxième version :

$$(P_d^3)_2 \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq \alpha_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

La deuxième version est plus avantageuse que la première car le décideur peut choisir pour chaque contrainte $A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)$ suivant les données du problème, le seuil α_i tel que $P(\omega : A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i$.

Soient :
- $X(\alpha) = \left\{x \geq 0/P(\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega),\ i = 1, ...m) \geq \alpha\right\}$, l'ensemble des solutions admissibles pour $(P_d^3)_1$

- $X_i(\alpha_i) = \left\{x \geq 0/P(\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\right\}$, l'ensemble des solutions admissibles pour $(P_d^3)_2$.

La question qui se pose : les ensembles $X(\alpha)$ et $X_i(\alpha_i)$ sont-ils convexes ? car ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant([39] :

Exemple 4 *[39]*

Soit $X(\omega) = (x_1(\omega), x_2(\omega))$ *un vecteur aléatoire tel que* $P\{\omega : (x_1(\omega_1), x_2(\omega_1)) = (3,1)\} = \frac{1}{3}$ *et* $P\{\omega : (x_1(\omega_2), x_2(\omega_2)) = (-3,-2)\} = \frac{2}{3}$.
Nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lll} x \leq \frac{1}{3} & \textit{pour} \quad 3x \leq 1 & -3x \leq -2 \\ \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} & \textit{pour} \quad 3x \nleq 1 & -3x \nleq -2 \\ x \geq \frac{2}{3} & \textit{pour} \quad 3x \nleq 1 & -3x \leq -2 \end{array}\right\}$$

d'où :

$$P\{\omega : A(\omega)x \leq b(\omega)\} = \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{3} & si & x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & si & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & si & x \geq \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

$$X(\alpha) est \left\{\begin{array}{ll} \textit{disjoint donc convexe pour} & 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \textit{convexe pour} & \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \textit{vide pour} & \alpha > \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

Nous allons voir par la suite que $X(\alpha)$ (resp. $X_i(\alpha_i)$) peut être convexe si les variables aléatoires sont normales ou discrètes et sous certaines conditions concernant les valeurs de α (resp. α_i).
Seuls le cas où α (resp. α_i.) est égal à 0 ou 1 ou le cas où A (resp. A_i)esr déterministe et b (resp. b_i) est aléatoire nous assure la convexité de $X(\alpha)$ (resp. $X_i(\alpha_i)$) quelque soit la distribution de probabilité des variables aléatoires b (resp. b_i).

Théorème 1 *[39]*

- $X(0)$ *et* $X(1)$ *sont convexes*
- $X_i(0)$ *et* $X_i(1)$ *sont convexes*

Théorème 2 *[39]*
Si les a_{ij} *sont déterministes et les* b_i *stochastiques.*
alors :

- $X(\alpha)$ *est convexe pour toute distribution de probabilité de* b
- $X_i(\alpha_i)$ *est convexe pour toute distribution de probabilité de* b_i.

Preuve.
$P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow 1 - P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow 1 - F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \geq$

α_i, $i = 1, ...m$.
$1 - F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \geq \alpha_i \Leftrightarrow F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \leq 1 - \alpha_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$.
$X_i(\alpha_i) = \left\{ x \geq 0 / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i) \right\}$, $i = 1, 2, ..., m$

Théorème 3 *[39]*
Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r\}$, et la distribution de probabilité discrète et finie $p(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ...r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_k = 1$.
Alors :
- *pour $\alpha > 1 - min_{k \in (1,2,...r)} p_k$ l'ensemble $X(\alpha)$ est convexe*
- *pour $\alpha_i > 1 - min_{k \in (1,2,...r)} p_k$ l'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe.*

Théorème 4 *[39]*
Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ les composantes de la matrice $A(m \times n)$ et du vecteur $b(m \times 1)$ respectivement.
Si a_{i1}, a_{i2}, $...a_{in}$, b_i sont (n+1) variables aléatoires normales d'espérances mathématiques μ_{i1}, μ_{i2}, $...\mu_{in}$, λ_i et de variances σ_{i1}^2, σ_{i2}^2, $...\sigma_{in}^2, \delta_i^2$ respectivement.
Alors :
- *pour $\alpha > \frac{1}{2}$, l'ensemble $X(\alpha)$ est convexe*
- *pour $\alpha_i > \frac{1}{2}$, l'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe.*

Preuve.
Montrons que $X_i(\alpha_i)$ est convexe.
Posons $y_i(x, \omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)), i = 1, ...m$ est une combinaison linéaire de $n+1$ variables aléatoires normales. Donc $y_i(x, \omega)$ est une variable aléatoire normale de moyenne $E(y_i(x, \omega)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}x_j - \lambda_j$ et de variance $V(y_i(x, \omega)) = z^t S_i z$ où $z = (x_1, x_2, ..., x_n, -1)^t$ et $S_i((n+1) \times (n+1))$ est la matrice de covariance suivante :

$$\mathbf{S_i} = \begin{pmatrix} V(a_{i1}) & Cov(a_{i1}, a_{i2}) & \ldots & Cov(a_{i1}, a_{in}) & Cov(a_{i1}, b_i) \\ Cov(a_{i2}, a_{i1}) & V(a_{i2}) & Cov(a_{i2}, a_{i3}) & \ldots & Cov(a_{i2}, b_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(a_{in}, a_{i1}) & Cov(a_{in}, a_{i2}) & \ldots & V(a_{in}) & Cov(a_{in}, b_i) \\ Cov(b_i, a_{i1}) & Cov(b_i, a_{i2}) & \ldots & Cov(b_i, a_{in}) & V(b_i) \end{pmatrix}$$

où V et Cov représentent respectivement variance et Covariance.
Posons :
$m_{y_i}(x) = E(y_i(x, \omega))$, $\sigma_{y_i}^2(x) = V(y_i(x, \omega))$ et $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x, \omega))}$.
Nous avons :
$P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) = P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \leq 0) = P(\omega : \frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)})$.
Donc :
$P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow P(\omega : \frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i$.

$\frac{y_i(x,\omega)-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite et soit ψ sa fonction de distributiion qui est strictement croissante et bijective de l'ensemble des nombres réels R dans]0,1[.
Donc $P(\omega : \frac{y_i(x,\omega)-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) = \psi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)})$. Par conséquent :
$P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow \psi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i \Leftrightarrow \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \geq \psi^{-1}(\alpha_i) \Leftrightarrow \psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0$
$X_i(\alpha_i) = \left\{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0\right\}$.
La matrice S_i est définie positive donc $\sigma^2_{y_i}(x) = V(y_i(x,\omega))$ et $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$ sont convexes en x et $m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega))$ est linéaire affine en x. Alors $X_i(\alpha_i)$ est convexe si $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$ i.e. $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$ car $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_i \geq \psi(0) = \frac{1}{2}$.

Remarque 14 *A partir de la preuve du théorème 4, on voit qu'on peut représenter aisément* $X_i(\alpha_i) = \left\{x/P(\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\right\}$ *par :*

- $X_i(\alpha_i) = \left\{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0\right\}$ *où* ψ^{-1} *est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.*
  Pour cela, il suffit de poser $y_i(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)) \leq 0$, *et calculer :*
  $m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega))$, $\sigma^2_{y_i}(x) = V(y_i(x,\omega))$ *et* $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$, *avec* $V(y_i(x,\omega)) = z^t S_i z$ *où* $z = (x_1, x_2, ..., x_n, -1)^t$ *et* $S_i((n+1)\times(n+1))$ *est la matrice de covariance de* $y_i(x,\omega)$.
- $X_i(\alpha_i) = \left\{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\sigma^2_{ij}x^2_j + \delta^2_i} + m_{y_i}(x) \leq 0\right\}$ *si de plus* a_{i1}, a_{i2}, $...a_{in}$, b_i *sont indépendantes, alors* $Cov(a_{ij}, a_{ik}) = 0, \forall j \neq k, 1 \leq j, 1 \leq k \leq n$ *et* $Cov(a_{ij}, b_i) = 0, \forall j = 1, ..., n$; *donc* $\sigma^2_{y_i}(x) = \sigma^2_{ij}x^2_j + \delta^2_i$ *et* $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{\sigma^2_{ij}x^2_j + \delta^2_i}$.

6.2 Chance constrained programming en programmation linéaire floue

Dubois [25] a montré que Chance-constrained programming peut être appliqué aux contraintes en présence d'intervalles flous. Il propose de remplacer probabilité par :

1. possibilité
2. nécessité.

Son application en programmation linéaire floue a pour but de transformer les contraintes floues en des contraintes déterministes équivalentes en considérant la possibilité ou la necessité de leurs réalisations séparément, au moins égale à des seuils choisis par le décideur.
Dans [25], compte tenu des relations existantes entre possibilité et nécessité à savoir que nécessité d'un ensemble flou est inférieure à sa possibilté, Il a été déduit que les contraintes résultant du deuxième cas sont plus fortes que celles résultant du premier, d'où la distinction entre les deux comme suit :

1. Contraintes faibles :

$$(P_p^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

2. Contraintes fortes :

$$(P_n^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

Néanmoins, pour les deux autres possibilité et nécessité notées pos_3 et nec_2, les contraintes suivantes sont intermédiaires :

3. Contraintes intermédiaires :

   – en utilisant pos_3

$$(P_{p_3}^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ pos_3(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

   – en utilisant nec_2

$$(P_{n_2}^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ nec_2(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

En vertu des propriétés de pos, nec, pos_3 et nec_2 qui consistent à transformer les inégalités entre ensembles flous en inégalités entre nombres réels [25], les contraintes ci-dessus énumérées peuvent s'écrire sous formes linéaires déterministes comme suit :

1. Cas de contraintes faibles :

$$(P_p^c)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\alpha_i}, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

2. Cas de contraintes fortes :

$$(P_n^c)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \underline{b}_i^{1-\alpha_i}, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

3. Cas de contraintes intermédiaires :
   - en utilisant pos_3

$$(P_{p3}^c)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\alpha_i}, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

   - en utilisant nec_2

$$(P_{n2}^c)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \underline{b}_i^{1-\alpha_i}, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

6.3 Chance constrained programming en programmation linéaire floue stochastique

Nous pouvons nous retrouver face à des situations où les coefficients des contraintes sont des variables aléatoires floues. Dans le but de les transformer en des contraintes déterministes, dans l'esprit de la deuxième version de chance constrained programming due à Charnes et Cooper, nous considérons la probabilité de réalisation de chacune d'elles au moins égale à un seuil qui peut différer d'une contrainte à une autre. Or chaque réalisation est une comparaison entre deux intervalles flous. Nous avons donc recours aux méthodes de comparaison d'intervalles flous. D'où la combinaison de probabilité et ces dernières qui peuvent être les approches possibilistes. C'est en quelque sorte une généralisation conjointe aux variables aléatoires floues des deux variantes de chance constrained programming en "'chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients"'.
Nous avons trois versions selon le choix de la méthode de comparaison d'intervalles flous comme suit : (i) en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et necessité (version 1) ; (ii) en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues (version 2) ; et (iii) en combinant chance-constrained programming et comparaisons d'intervalles aléatoires (un intervalle flou peut être vu comme un intervalle aléatoire) (version 3).

Considérons le progamme linéaire flou stochastique suivant :

$$(P_{FS}^3)\left\{\begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i=1,...m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où $\phi(x)$ est un objectif déterministe ,$\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ sont des variables aléatoires floues. Et $\sum_{j=1}^n$, $\odot$ et $\preceq$ représentent la généralisation au moyen du principe d'extension de l'addition, la multiplication et l'inégalité de nombres réels aux intervalles flous.

(P_{FS}^3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{PS}^3)'\left\{\begin{array}{l} \max cx \\ \widetilde{A}(\omega) \odot x \preceq \widetilde{b}(\omega) \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont les composantes de la matrice $\widetilde{A}(\omega)(m \times n)$ et du vecteur $\widetilde{b}(\omega)(n \times 1)$ respectivement.

On a par définition, $\forall \omega \in \Omega$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des des intervalles flous. Soient $\forall \omega \in \Omega$, $\pi_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}$ et $\pi_{\widetilde{b}_i(\omega)}$ les distributions de possibilité de $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ respectivement.
(Par définition $\forall \omega \in \Omega$, $\pi_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)} = \mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}$ et $\pi_{\widetilde{b}_i(\omega)} = \mu_{\widetilde{b}_i(\omega)}$ [66])

Les contraintes du problème flou stochastique (P_{FS}^3) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{b}_i(\omega) \succeq \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j, \\ \\ x_j \geq 0, j=1,...n \end{array}\right\}$$

$\sum_{j=1}^n$ et $\odot$ représentent respectivement, pour $\omega \in \Omega$ donné, l'addition des intervalles flous de type $L-R$ et leur multiplication par un nombre réel (voir annexe A).
Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de type $L-R$, alors

$$\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = (\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(\omega) x_j, \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}(\omega) x_j, \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^a x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^a x_j).$$

Pour simplifier les expressions, nous considérons la matrice $A(m \times n)$ et le vecteur $b(m \times 1)$ dont les composantes sont respectivement a_{ij} et b_i.
Dans la suite de ce travail, dire que A (resp. b) est déterministe, flou, stochastique ou flou stochastique signifie que a_{ij} (resp. b_i) sont respectivement déterministes, des intervalles flous, des variables aléatoires réelles ou des variables aléatoires floues.

Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients prend la forme suivante :

$$P(\rho(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i$$

où $\rho(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ évalue le degré de confiance pour lequel le coefficient restreint par $\widetilde{a}$ est plus grand que le coefficient restreint par $\widetilde{b}$.

6.4 Différentes versions de Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Nous avons trois versions, selon le choix de ρ qui peut représenter :
- les degrés de préférence possibiliste (combinaison de probabilité et possibilité) ou les degrés de préférence nécessaire (combinaison de probabilité et nécessité)
- les indices de dominance stochastique des intervalles aléatoires dus à Chanas et col. [15] (combinaison de probabilité et indices de comparaison d'intervalles aléatoires)
- les indices scalaires de comparaison d'intervalles flous (combinaison de probabilité et indices scalaires de comparaison de quantitiés floues)

comme suit :

6.4.1 Combinaison de probabilité et possibilité

$$(P_p^3)\left\{\begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array}\right\}$$

où P et pos représentent respectivement probabilité et possibilité. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ de (P_p^3) est appelée *pro-pos admissible*. L'ensemble des solutions pro-pos admissibles de (P_p^3) est noté $X_p^i(p_i, \beta_i)$.

Proposition 48 *$X_p^i(p_i, \beta_i)$ peut s'écrire comme suit :*

1. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues, alors :*
   $X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 : P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ...m$
   où $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure $\widetilde{b}_i^{\beta_i}(\omega)$.
2. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de type $L - R$, alors :*
   $X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a)x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ...m.$

Preuve. Il suffit d'utiliser les propriétés de possibilité données dans [25] et reprises dans la proposition 12 du chapitre 3.

Remarque 15 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement :*
- *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors :*
  $P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ *se réduit à* $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.
- *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors* $P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ *se réduit à* $pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \beta_i$.

6.4.2 Combinaison de probabilité et nécessité

$$(P_n^3) \left\{ \begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

où P et nec représentent respectivement probabilité et nécessité. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ de (P_n^3) est appelée *pro-nec admissible*. L'ensemble des solutions pro-nec admissibles de (P_n^3) est noté $X_n^i(p_i, \beta_i)$.

Proposition 49 *$X_n^i(p_i, \beta_i)$ peut s'écrire comme suit :*

1. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues, alors :*
   $X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 : P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)x_j \leq \underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ...m$,
   où $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ et $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$.
2. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de type $L - R$, alors :*
   $X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a)x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_i^b) \geq p_i\right\}$
   $i = 1, ...m$.

La preuve est triviale, Il suffit d'utiliser les propriétés de nécessité données dans [25] et reprises dans la proposition 12 du chapitre 3.

Remarque 16 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement :*
- *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.*
- *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \beta_i$.*

6.4.3 Combinaison de probabilité et indices scalaires de comparaison de quantitiés floues

$$(P_F^3)\left\{\begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array}\right\}$$

où P représent la probabilité et $F(\widetilde{a})$ est un scalaire, substitut de $\widetilde{a}$. Il est évident que $F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))$ et $F(\widetilde{b}_i(\omega))$ sont des variables aléatoires réelles. Le problème est bel et bien un standard chance-constrained programming. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ du problème (P_F^3) est appelée *pro-F admissible*. On note $X_F^i(p_i)$, l'ensemble des solutions pro-F admissibles du problème (P_F^3) .

Remarque 17 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement :*

– *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.*

– *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i$ se réduit à $\sum_{j=1}^n F(\widetilde{a}_{ij})x_j \leq F(\widetilde{b}_i)$.*

6.4.4 Combinaison de chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires

$$(P^3_{\mu_k}) \left\{ \begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_k(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ...m; k = 1D, 2D, 3D, 4D, 1I, 4I. \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ du problème $(P^3_{\mu_k})$ est appelée *pro-μ_k admissible.* On note $X^i_{\mu_k}(p_i, \beta_i)$, l'ensemble des solutions pro-μ_k admissibles du problème $(P^3_{\mu_k})$. Pour les cas où $k = 2D, 3D$, compte tenu du lemme 2 du chapitre 3, nous devons prendre $\beta_i \geq \frac{1}{2}$ pour que les inégalités aient un sens.

En tenant compte de la définition de $X_{\mu_k}(p_i, \beta_i)$ et du lemme 3 du chapitre 3, les ensembles de solutions admissibles $X^i_{\mu_k}(p_i, \beta_i)$, $k = 2D, 3D$ peuvent s'écrire comme suit :

Proposition 50 *Soient $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ et $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ des variables aléatoires floues de type L-R.*
Nous avons alors :

1. $X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_{ij}^a)x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_i^b) \geq p_i\right\}$.
2. $X^i_{\mu_{3D}}(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_{ij}^a)x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b) \geq p_i\right\}$.

Preuve. Nous avons par définition :

– $X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i) = \left\{x = (x_1, x_2, ...x_n) \geq 0 / P(\omega : \mu_{2D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i\right\}$

– $X^i_{\mu_{3D}}(p_i, \beta_i) = \left\{x = (x_1, x_2, ...x_n) \geq 0 / P(\omega : \mu_{3D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \geq p_i\right\}$

Pour $\omega \in \Omega$ donné $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ et $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ sont des intervalles flous de type L-R.
Il en est de même pour $\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = (\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^a x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^a x_j)$.
Alors en vetu du lemme 11 du chapitre 2, nous avons :

– $\mu_{2D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_{ij}^{a})x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_i^{b}$
– $\mu_{3D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_{ij}^{a})x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^{b}$

D'où :
– $P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} =$
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_{ij}^{a})x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_i^{b}\right\}$
– $P\left\{\omega : \mu_{3D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} =$
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_{ij}^{a})x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^{b}\right\}$

Remarque 18 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement :*
– *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{\omega : \mu_k(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.*
– *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{\omega : \mu_k(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $\mu_k(\widetilde{b}_i, \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \odot x_j) \geq \beta_i$.*

6.5 Convexité des ensembles de solutions admissibles

Sous certaines conditions, les ensembles de solutions admissibles peuvent être convexes pour toutes distributions de probabilité des variables aléatoires floues comme suit :

Théorème 5 *on a :*
Si $p_i = 0$ ou $p_i = 1$ alors :
– *$X_F^i(p_i)$ est convexe*
– *$\forall \beta_i \in (0, 1]$, $X_p^i(p_i, \beta_i)$, $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.*
– *$X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 1.

En tenant compte des conditions de convexité des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de chance-constrained programming [39] en programmation linéaire stochastique et en nous basant sur les propositions 48, 49, et 50, nous distinguons le cas où A est déterministe ou flou et les autres où A est stochastique ou flou stochastique comme suit :

6.5.1 Cas où A est déterministe ou flou

Nous considérons le cas le plus général : A est flou et b est flou stochastique dont les composantes sont des variables aléatoires floues en général ou des variables aléatoires floues particulières, de type L-R.

En nous basant sur les propositions 48, 49, et 50, les expressions des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de "chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients" et le théorème 2, nous établissons le résultat suivant :

Théorème 6 *Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ les composantes de la matrice $\widetilde{A}(m \times n)$ et du vecteur $b(\omega)(m \times 1)$ respectivement.*

1. *Si $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues.*
   Alors pour toute distribution de probabilité de $\widetilde{b}_i(\omega)$, on a : $\forall \beta_i \in (0,1]$ et $\forall p_i \in [0,1]$, $\quad X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes
2. *Si $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous de type L-R et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R.*
   Alors pour toute distribution de probabilité de $\widetilde{b}_i(\omega)$ et $\forall p_i \in [0,1]$, on a :
   - *$X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in (0,1]$.*
   - *$X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$.*

Preuve.

1. Puisque $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous, donc on remplace $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ par $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}$ dans $X_p^i(p_i, \beta_i)$, il s'ensuit que $\forall \beta_i \in (0,1]$ et $\forall p_i \in [0,1]$:
   $x \in X_p^i(p_i, \beta_i) \Longleftrightarrow P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i \Leftrightarrow$
   $1 - P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega) x_j \geq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i \Leftrightarrow 1 - \Psi_{\overline{b}_i^{\beta_i}}(\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j) \geq p_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \Psi_{\overline{b}_i^{\beta_i}}^{-1}(1-p_i)$ où $\Psi_{\overline{b}_i^{\beta_i}}$ est la fonction de répartition de $\overline{b}_i^{\beta_i}$.
   En remplaçant $P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i$ par
   $\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \Psi_{\overline{b}_i^{\beta_i}}^{-1}(1-p_i)$ dans $X_p^i(p_i, \beta_i)$,on voit facilement que $\forall \beta_i \in (0,1]$ et $\forall p_i \in [0,1]$:
   $X_p^i(p_i, \beta_i)$ est convexe pour toute distribution de probabilité de $\overline{b}_i^{\beta_i}$.
   La preuve est la même pour les autres ensembles de solutions admissibles, il suffit de remplacer dans cette preuve :
   - $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ par $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}$ et $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ respectivement,pour $X_n^i(p_i, \beta_i)$.
   - $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ par $F(\widetilde{a}_{ij})$ et $F(\widetilde{b}_i(\omega))$ respectivement, pour $X_F^i(p_i)$.
2. $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous de type L-R, donc on remplace $\underline{a}_{ij}(\omega)$ par $\underline{a}_{ij}$ dans $X_p^i(p_i, \beta_i)$, donc $x \in X_p^i(p_i, \beta_i) \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a) x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b\right\} \geq p_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a) x_j) - R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b \leq \Psi_{\overline{b}_i}^{-1}(1-p_i)$ où $\Psi_{\overline{b}_i}$ est la fonction de répartition de $\overline{b}_i$. La preuve est la même pour les autres ensembles de solutions admissibles, il suffit de remplacer :

– $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$ et $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i$ par $\overline{a}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^a_{ij}$ et $\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i$ respectivement pour $X^i_n(p_i, \beta_i)$.

– $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$ et $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i$ par $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^a_{ij}$ et $\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i$, respectivement pour $X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i)$.

– $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$ par $\overline{a}_{ij} + R^{-1}(\beta_i)\gamma^a_{ij}$, pour $X^i_{\mu_{3D}}(p_i, \beta_i)$.

Nous avons montré que : $\forall p_i \in [0,1]$, $X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i)$ et $X^i_{\mu_{3D}}(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in (0,1]$, donc en particulier $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$.

6.5.2 Cas où A est stochastique ou flou stochastique

Nous considérons le cas le plus général : A et b sont flous stochastiques dont les composantes sont des variables aléatoires floues, en général, ou particulières, de type L-R.

En nous basant sur les propositions 48, 49 et 50, les expressions des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de "chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients" et les théorème 3 et 4, nous distinguons le cas général (au sens de Shapiro) de variables aléatoires floues normales (resp.le cas particulier, de type L-R) et le cas général de variables aléatoires floues discrètes (resp.le cas particulier, de type L-R) et nous établissons les résultats suivants :

Les composantes de A et b sont des variables aléatoires floues

1. Cas des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro

   Théorème 7 *Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ les composantes de la matrice $A(m \times n)$ et du vecteur $b(m \times 1)$ respectivement.*
   Si $\widetilde{a}_{i1}, \widetilde{a}_{i2}, ...\widetilde{a}_{in}, \widetilde{b}_i$ sont (n+1) variables aléatoires floues normales d'espérances mathématiques respectives $\widetilde{\mu}_{i1}, \widetilde{\mu}_{i2}, ...\widetilde{\mu}_{in}, \widetilde{\lambda}_i$ qui sont des intervalles flous et de variances respectives $\sigma^2_{i1}, \sigma^2_{i2}, ...\sigma^2_{in}, \nu^2_i$.
   Alors $\forall \beta_i \in (0,1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, $X^i_p(p_i, \beta_i)$ et $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes.
   Preuve.

   On a à la section 4.1.2 du chapitre 4 :
   – $\underline{a}^{\beta_i}_{i1}, \underline{a}^{\beta_i}_{i2}, ...\underline{a}^{\beta_i}_{in}, \overline{b}^{\beta_i}_i$ sont (n+1) variables aléatoires rélles normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}^{\beta_i}_{i1}, \underline{\mu}^{\beta_i}_{i2}, ...\underline{\mu}^{\beta_i}_{in}, \overline{\lambda}^{\beta_i}_i$ et de variances respectives $\sigma^2_{i1}, \sigma^2_{i2}, ...\sigma^2_{in}, \nu^2_i$
   – $\overline{a}^{1-\beta_i}_{i1}, \overline{a}^{1-\beta_i}_{i2}, ...\overline{a}^{1-\beta_i}_{in}, \underline{b}^{1-\beta_i}_i$ sont (n+1) variables aléatoires rélles normales d'espérances mathématiques respectives $\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{i1}, \overline{\mu}^{1-\beta_i}_{i2}, ...\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{in}, \underline{\lambda}^{1-\beta_i}_i$ et de variances respectives $\sigma^2_{i1}, \sigma^2_{i2}, ...\sigma^2_{in}, \nu^2_i$
   Alors en vertu du théorème 4, on conclut que : $\forall \beta_i \in (0,1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, $X^i_p(p_i, \beta_i)$ et $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes

2. cas des variables aléatoires floues discrètes

Théorème 8 *Soit* (Ω, F, P) *un espace de probabilité avec* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r\}$, *muni d'une distribution de probabilité discrète finie suivante :* $P(\omega_k) = q_k$, $k = 1, 2, ...r$ *et* $\sum_{k=1}^{k=r} q_k = 1$.
Alors pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$ *on a :*
– $X_F^i(p_i)$ *est convexe.*
– $X_p^i(p_i, \beta_i)$, $X_n^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \in [0, 1]$.
Preuve. Etant donné que $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes et que pour $k \in \{1, 2, ...r\}$,
$P(\widetilde{a}_{ij}(\omega_k) = \widetilde{\theta}_{ijk}) = P(\widetilde{b}_i(\omega_k) = \widetilde{\eta}_{ik}) = q_k$, où $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\widetilde{\eta}_{ik}$ sont des intervalles flous.
Alors :
– $F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))$ et $F(\widetilde{b}_i(\omega))$ sont des variables aléatoires réelles discrètes $P(F(\widetilde{a}_{ij}(\omega_k)) = F(\widetilde{\theta}_{ijk})) = q_k$ et $P(F(\widetilde{b}_i(\omega_k)) = F(\widetilde{\eta}_{ik})) = q_k$, où $F(\widetilde{\theta}_{ijk})$ et $F(\widetilde{\eta}_{ik})$ sont des nombres réels.
  Par conséquent, en vertu du théorème 4, on conclut que :
  pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X_F^i(p_i)$ est convexe.
– $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$, $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$, $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ et $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que : $P(\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega_k) = \underline{\theta}_{ijk}^{\beta_i}) = P(\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega_k) = \overline{\eta}_{ik}^{\beta_i}) = P(\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega_k) = \overline{\theta}_{ijk}^{1-\beta_i}) = P(\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega_k) = \underline{\eta}_{ik}^{1-\beta_i}) = q_k$,
  où $\underline{\theta}_{ijk}^{\beta_i}$ et $\overline{\eta}_{ik}^{\beta_i}$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des $\beta_i - coupe$ de $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\widetilde{\eta}_{ik}$.Et $\overline{\theta}_{ijk}^{1-\beta_i}$ et $\underline{\eta}_{ik}^{1-\beta_i}$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des $(1 - \beta_i) - coupes$ de $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\widetilde{\eta}_{ik}$ respectivement.
  Par conséquent, en vertu du théorème 4, on conclut que :
  $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.

Les composantes de A et b sont des variables aléatoires floues de type L-R

1. Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R

Corollaire 16 *Soient* (Ω, F, P) *un espace de probabilité et* $\widetilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ *et* $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ *des variables aléatoires floues normales de type L-R telles que :*
– $\underline{a}_{i1}$, $\underline{a}_{i2}$, $...\underline{a}_{in}$, $\underline{b}_i$ *sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives* $\underline{\mu}_{i1}$, $\underline{\mu}_{i2}$, $...\underline{\mu}_{in}$, $\underline{\lambda}_i$ *et de variances respectives* σ_{i1}^2, σ_{i2}^2, $...\sigma_{in}^2, \delta_i^2$.
– $\overline{a}_{i1}$, $\overline{a}_{i2}$, $...\overline{a}_{in}$, $\overline{b}_i$ *sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives* $\overline{\mu}_{i1}$, $\overline{\mu}_{i2}$, $...\overline{\mu}_{in}$, $\overline{\lambda}_i$ *et de variances respectives* σ_{i1}^2, σ_{i2}^2, $...\sigma_{in}^2, \delta_i^2$.
Alors pour $p_i > \frac{1}{2}$, *on a :*
– $X_p^i(p_i, \beta_i)$, $X_n^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \in (0, 1]$
– $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ *et* $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$.
Preuve. $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, donc, nous reprenons la preuve du théorème 8, avec :

– d'une part que pour chaque $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\overline{b}_i^{\beta_i} = \overline{b}_i + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b$ est une variable aléatoire réelle normale d'espérance mathématique $\overline{\lambda}_i^{\beta_i} = \overline{\lambda}_i + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b$ et de variance δ_i^2 et pour $j = 1, 2, ..., n$:
$\underline{a}_{ij}^{\beta_i} = \underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a$ sont des variable aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}_{ij}^{\beta_i} = \underline{\mu}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a$ et de variances respectives σ_{ij}^2.

– d'autre part que pour chaque $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\underline{b}_i^{1-\beta_i} = \underline{b}_i - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_i^b$ est une variable aléatoire réelle normale d'espérance mathématique $\underline{\lambda}_i^{1-\beta_i} = \underline{\lambda}_i - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_i^b$ et de variance δ_i^2 et pour $j = 1, 2, ..., n$:
$\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i} = \overline{a}_{ij} + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a$ sont des variable aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives $\overline{\mu}_{ij}^{1-\beta_i} = \overline{\mu}_{ij} + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a$ et de variances respectives σ_{ij}^2 .

  Alors nous concluons que $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, les ensembles de solutions admissibles $X_p^i(p_i, \beta_i)$, $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.

– En remplaçant, dans la preuve du théorème 7 , $\overline{b}_i^{\beta_i}$ par $\underline{b}_i^{\beta_i}$, donc $\overline{\lambda}_i^{\beta_i}$ par $\underline{\lambda}_i^{\beta_i}$ d'une part. Et d'autre part $\underline{b}_i^{1-\beta_i}$ par $\overline{b}_i^{1-\beta_i}$, donc $\underline{\lambda}_i^{1-\beta_i}$ par $\overline{\lambda}_i^{1-\beta_i}$ et en tenant compte de la particularité $L - R$ de $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$,
i.e. ($\overline{b}_i^{1-\beta_i} = \overline{b}_i + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma_i^b$, $\overline{\lambda}_i^{1-\beta_i} = \overline{\lambda}_i + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma_i^b$, $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i} = \overline{a}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma_{ij}^a$, $\overline{\mu}_{ij}^{1-\beta_i} = \overline{\mu}_{ij} + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a$, $\underline{b}_i^{\beta_i} = \underline{b}_i - L^{-1}(\beta_i)\delta_i^b$, $\underline{\lambda}_i^{\beta_i} = \underline{\lambda}_i - L^{-1}(\beta_i)\delta_i^b$, $\underline{a}_{ij}^{\beta_i} = \underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a$, $\underline{\mu}_{ij}^{\beta_i} = \underline{\mu}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a$.)
Nous concluons que pour $p_i > \frac{1}{2}$, les ensembles de solutions admissibles $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in (0, 1]$ donc en particulier $\forall \beta_i \in [\frac{1}{2}, 1]$.

2. Cas des variables aléatoires floues discrètes de type *L-R*

Corollaire 17 *Soit* (Ω, F, P) *un espace de probabilité avec* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r\}$*, muni d'une distribution de probabilité discrète* $P(\omega_k) = q_k$*,* $k = 1, 2, ...r$ *et* $\sum_{k=1}^{k=r} q_k = 1$ *et soient* $\widetilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ *et* $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ *des variables aléatoires floues discrètes de type L-R.*
Alorst pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$*, on a :*
– $X_p^i(p_i, \beta_i)$*,* $X_n^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \in (0, 1]$
– $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ *et* $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \geq \frac{1}{2}$.

Preuve. Puisque $\widetilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues discrètes de type *L-R*, donc $\underline{a}_{ij}(\omega)$, $\overline{a}_{ij}(\omega)$, $\underline{b}_i(\omega)$ et $\overline{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes, alors, il en de même pour $\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a$, $\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a$,
$\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_i^b$, $\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta_i^b$, $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b$ et $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_i^b$.
Par conséquent, en vertu du théorème 3, nous avons $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, les ensembles de solutions admissibles $X_p^i(p_i, \beta_i)$, $X_n^i(p_i, \beta_i)$, $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes. Nous avons montré que pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, , $X_{\mu_{2D}}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_{3D}}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in (0, 1]$, donc en particulier $\forall \beta_i \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Chapitre 7

Programmation linéaire multiobjectifs floue stochastique

Un programme linéaire multiobjectifs flou stochastique est un programme linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues ou en présence de variables aléatoires réelles et d'intervalles flous, ou les objectifs et/ou des contraintes sont flexibles avec la présence de variables aléatoires réelles.
Trés peu de travaux ont été réalisés quant à la résolution d'un programme en présence de variables aléatoires floues.Qiao et Wang [61] sont les premiers à avoir considéré un programme linéaire dont les coefficients de l'objectif et des contraintes sont des variables aléatoires floues. Ils ont réduit le programme à un programme stochastique standard en considérant les α-coupes des coefficients flous et en définissant deux ensembles de contraintes, en utilisant les bornes supérieures des coupes pour l'un et les bornes inférieures pour l'autre. Une approche semi-infinie a été proposée par Aïche [1] et Luhandjula [48] dans le but de transformer les contraintes floues stochastiques, d'un programme linéaire dont l'objectif est déterministe, en des contraintes stochastiques et utiliser les méthodes chance-constrained programming [16] ou two-stage programming [23] pour la résolution du programme linéaire stochastique résultant.
Katagiri et col.[42] d'une part et Jun. Li et col[46] d'autre part ont considéré le même type de programme linéaire multiobjectifs flou stochastique où les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont aléatoires et les contraintes déterministes pour Katagiri et col. Et les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs de même pour les coefficients des contraintes qui sont aussi des variables aléatoires floues normales de type L-R pour Jun. Li et col. Nous allons, dans ce qui suit, reprendre les méthodes de résolution proposées par les uns et par les autres.
Etant donné que nous avons établi Chance Constrained Programming with fuzzy stochastic coefficients qui focalise sur les contraintes floues stochastiques et consiste à les transformer en des contraintes déterministes, nous allons distinguer deux cas de programmes linéaires multi-objectifs flous stochastiques, l'un où les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires floues et l'autre où ils sont des intervalles flous, des variables aléatoires réelles ou déterministes,

7.1 Les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires floues

Dans ce cas, un programme linéaire multiobjectifs est flou stochastique quelque soit la nature des coefficients de ses contraintes.
Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^1_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l}\max(\widetilde{c}_1(\omega)x,\widetilde{c}_2(\omega)x,...,\widetilde{c}_k(\omega)x)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i=1,2,...,m\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\}\end{array}\right\}$$

où $\widetilde{c}_r(\omega)=(\widetilde{c}_{r1}(\omega),\widetilde{c}_{r2}(\omega),...,\widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P).

Quatre cas de variables aléatoires floues normales seront considérés pour $(P^1_{M.O.F.S})$ comme suit :

1. le cas où les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, dont les écarts à gauche et à droite sont aléatoires, a été considéré par Katagiri et col.[42]. Elles se présentent sous la forme suivante : $\widetilde{c}_{rj}(\omega)=(\overline{d}_{rj}(\omega),\overline{\alpha}_{rj}(\omega),\overline{\beta}_{rj}(\omega))_{L-R}$ où $\overline{d}_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}$, $\overline{\beta}_{rj}$, sont des variables aléatoires normales.
2. le cas où les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R, dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs, a été considéré par Jun. Li et col.[46]. Elles se présentent sous la la forme suivante : $\widetilde{X}(\omega)=(x(\omega),\delta^x,\gamma^x)$ où $x(\omega)$ est une variable aléatoire normale et δ^x,γ^x sont des nombres réels positifs.

   Et les deux cas suivants que nous proposerons :
3. le cas où des variables aléatoires floues $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs, de la forme : $\widetilde{X}(\omega)=(\underline{x}(\omega),\overline{x}(\omega),\delta^x,\gamma^x)$ où $\underline{x}(\omega)$ et $\overline{x}(\omega)$ sont des variables aléatoires normales et δ^x,γ^x sont des nombres réels positifs. .

   et
4. le cas où les variables aléatoires floues $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont normales au sens de Shapiro.

7.1.1 Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont aléatoires

Puisque les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires floues, nous avons alors un programme linéaire multiobjectifs flou stochastique quelque soit la nature des coefficients des contraintes

qui peuvent être des variables aléatoires réelles ou floues, des intervalles flous ou même déterministes.
C'est le cas où ils sont déterministes qui a été considéré par Katagiri et col.[42] comme suit :
Soit le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^2_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \min(\widetilde{c}_1(\omega)\odot x, \widetilde{c}_2(\omega)\odot x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)\odot x) \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / Ax \leq b,\ x \geq 0\} \end{array} \right\}$$

où les contraintes sont déterministes $Ax \leq b \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, ..., m.$ et $\widetilde{c}_r(\omega) = (\widetilde{c}_{r1}(\omega), \widetilde{c}_{r2}(\omega), ..., \widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R telles que pour tout $\omega \in \Omega$, leurs foctions d'appartenance sont définies comme suit :

$$\mu_{\widetilde{c}_{rj}(\omega)}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} L(\frac{\overline{d}_{rj}(\omega)-s}{\overline{\alpha}_{rj}(\omega)}) & (s \leq \overline{d}_{rj}(\omega), \forall\omega) \\ \\ R(\frac{s-\overline{d}_{rj}(\omega)}{\overline{\beta}_{rj}(\omega)}) & (s > \overline{d}_{rj}(\omega), \forall\omega), r = 1, ..., k; j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

où :
$\widetilde{c}_{rj}(\omega) = (\overline{d}_{rj}(\omega), \overline{\alpha}_{rj}(\omega), \overline{\beta}_{rj}(\omega))_{L-R}$ avec $L(t) = max(0, l(t))$ et $R(t) = max(0, r(t))$ sont des fonctions réelles continues de $[0, +\infty)$ dans $[0, 1]$, et $l(t)$, $r(t)$ sont des fonctions strictement croissantes, continues telles que $l(0) = r(0) = 1$.
$\overline{d}_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}$, $\overline{\beta}_{rj}$, sont des variables aléatoires réelles définies par $\overline{d}_{rj}(\omega) = d^1_{rj} + \overline{t}_r(\omega)d^2_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}(\omega) = \alpha^1_{rj} + \overline{t}_r(\omega)\alpha^2_{rj}$ et $,\overline{\beta}_{rj}(\omega)) = \beta^1_{rj} + \overline{t}_r(\omega)\beta^2_{rj}$, où $\overline{t}_r$ est une variable aléatoire normale d'espérance m_r et de variance σ^2_r et d^l_{rj}, α^l_{rj} et β^1_{rj}, $l = 1, 2$ sont des constantes et les écarts $\overline{\alpha}_{rj}(\omega)$ et $\overline{\beta}_{rj}(\omega)$ sont positifs pour tout $\omega \in \Omega$.
Puisque tous les coefficients de chaque fonction objectif sont des variables aléatoires floues de type L-R, alors pour tout $\omega \in \Omega$, les opérations effectuées sur les nombres flous, en utilisant le principe d'extension du à Zadeh, ont donné des nombres flous caractérisés par les fonctions d'appartenance suivantes :

$$\mu_{\widetilde{c}_r(\omega)x}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} L(\frac{\overline{d}_r(\omega)x-y}{\overline{\alpha}_r(\omega)x}) & (y \leq \overline{d}_r(\omega)x, \forall\omega) \\ \\ R(\frac{y-\overline{d}_r(\omega)x}{\overline{\beta}_r(\omega)x}) & (y > \overline{d}_r(\omega)x, \forall\omega), r = 1, ..., k \end{array} \right\}$$

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^2_{M.O.F.S})$

Pour la résolution du problème $(P^2_{M.O.F.S})$ Katagiri et col [42] se sont basés sur la nature imprécise du jugement du décideur qui propose donc que chaque objectif doit atteindre le but flou $\widetilde{G}_r$ défini par "'l'objectif est à peu prés inférieur ou égal à une certaine valeur"' qui peut être caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\widetilde{G}_r}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & y \leq g_r^1 \\ \\ g_r(y) & g_r^1 \leq y \leq g_r^0 \\ \\ 0 & g_r^0 \leq y \end{array} \right\}$$

où g_r est une fonction continue strictement décroissante.
En utilisant le concept de mesure de possibilité, le degré de possibilité que la valeur de l'objectif satisfait le but flou est représenté par $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r)) = sup\left\{min(\mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y), \mu_{\widetilde{G}_r}(y))/y\right\}$, $r = 1, 2, ..., k$ que le décideur préfére maximiser, le problème $(P^2_{M.O.F.S})$ est alors reformulé comme suit :

$$(P^2_{M.O.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\Pi_{\widetilde{C}_1(\omega)x}(\widetilde{G}_1), \Pi_{\widetilde{C}_2(\omega)x}(\widetilde{G}_2), ..., \Pi_{\widetilde{C}_k(\omega)x}(\widetilde{G}_k)) \\ \\ x \in B \end{array} \right\}$$

qui est un programme muliobjectifs stochastique car $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}$ est aléatoire.
Pour sa résolution, la méthode de risque minimal multiple a été utilisée dans [42], il en résulte alors le programme déterministe suivant :

$$(P^2_{M.O.D})_1 \left\{ \begin{array}{l} \max P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\}, \; r = 1, 2, ..., k \\ x \in B \end{array} \right\}$$

Puisque $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r \Longleftrightarrow sup\left\{min(\mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y), \mu_{\widetilde{G}_r}(y))/y\right\} \geq h_i$
$\Longleftrightarrow \exists y : \mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y) \geq h_r, \quad \mu_{\widetilde{G}_r}(y)) \geq h_r,$
$\Longleftrightarrow \exists y : L(\frac{\overline{d}_r(\omega)x - y}{\overline{\alpha}_r(\omega)x}) \geq h_r, \quad R(\frac{y - \overline{d}_r(\omega)x}{\overline{\beta}_r(\omega)x}) \geq h_r, \quad \mu_{\widetilde{G}_r}(y) \geq h_r,$
$\Longleftrightarrow \exists y : \left\{\overline{d}_r(\omega) - L^*(h_r)\overline{\alpha}_r(\omega)\right\} x \leq y \leq \overline{d}_r(\omega) + R^*(h_r)\overline{\beta}_r(\omega)x, \quad y \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r(y}(h_r)$
$\Longleftrightarrow \left\{\overline{d}_r(\omega) - L^*(h_r)\overline{\alpha}_r(\omega)\right\} x \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r),$
où $L^*(h_r)$ et $\mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)$ sont des pseudo fonctions inverses définies par :
$L^*(h_r) = sup\left\{s/L(s) \geq h_r\right\}, \quad \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r) = sup\left\{s/\mu_{\widetilde{G}_r}(s) \geq h_r\right\}.$
Par ailleurs supposons que $(d_r^2 - L^*(0)\overline{\alpha}_r^2)x > 0$, $r = 1, 2, ..., k$, $pourtout x \in D$,
$P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\} = P\left[\left\{\overline{d}_r(\omega) - L^*(h_r)\overline{\alpha}_r(\omega)\right\} x \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)\right] =$
$\mathrm{P}\left[\omega : (d_r^1 + \overline{t}_r(\omega)d_r^2)x - L^*(h_r)(\alpha_r^1 + \overline{t}_r(\omega)\alpha_r^2)x \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)\right] =$
$\mathrm{P}\left[\omega : \overline{t}_r(\omega) \leq \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x}\right] = T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x}) = p_r(x).$
par conséquent $(P^5_{M.O.D})_1$ peut s'écrire comme suit :

$$(P^2_{M.O.D})_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)) \\ \\ x \in B \end{array} \right\}$$

Pour obtenir une solution pareto-optimale du problème $(P^2_{M.O.D})_2$, l'algorithme suivant a été proposé dans [42].

Algorithme intéractif pour obtenir une solution pareto optimale

Etant donné que le programme est multiobjectifs, donc une solution qui optimise simultanément tous les objectifs est rare. Une solution pareto-optimale est à envisager, elle a été définie comme suit :

Définition 25 *[42]*
x^* est appelée solution pareto-optimale si et seulement si il n'existe pas $x \in D$ tel que $p_r(x) \geq p_r(x^*)$, $\forall r \in \{1, 2, ..., k\}$ et $p_j(x) > p_j(x^*)$ pour au moins un $j \in \{1, 2, ..., k\}$.

Définition 26 *[42]*
x^* est appelée solution faiblement pareto-optimale si et seulement si il n'existe pas $x \in D$ tel que $p_j(x) > p_j(x^*)$, $j \in \{1, 2, ..., k\}$.

Pour chaque objectif $p_r(x)$, $r = 1, 2, ..., k$, le décideur choisit une probabilité de référence à atteindre $\overline{p}_r$, $r = 1, 2, ..., k$.

$$(P^2_{M.O.D})_3 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{p}_1 - p_1(x), \overline{p}_2 - p_2(x), ..., \overline{p}_k - p_k(x)) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

qui est équivalent à :

$$(P^2_{M.O.D})_4 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \overline{p}_r - p_r(x) \leq v, \; r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

qui peut se réécrire, en remplaçant $p_r(x)$ par $T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x})$, sous la forme suivante :

$$(P^2_{M.O.D})_5 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x} \geq T_r^*(\overline{p}_r - v), \; r = 1, 2, ..., k. \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

où $T_r^*(s)$ est la pseudo fonction inverse définie par :
$T_r^*(s) = inf\,\{u / T_r(u) \geq s\}$, $r = 1, 2, ..., k$

Algorithme

1. Calculer $minE(\overline{d}_i)x$ et $maxE(\overline{d}_i)x$ sous les contraintes données.

2. Etablir les fonctions d'appartenance du but flou $\widetilde{G}_r$, $r = 1, 2, ..., k$
3. Demander au décideur de choisir les niveaux h_r, $r = 1, 2, ..., k$.
4. Choisir les probabilités de référence p_r, $r = 1, 2, ..., k$.
5. Avec ce Choix de probabilités de référence p_r, $r = 1, 2, ..., k$, résoudre le problème $(P^2_{M.O.D})_5$ pour obtenir la valeur minimale de v.
6. Si le décideur est satisfait des résultats obtenus avec ce choix des probabilités de référence p_r, $r = 1, 2, ..., k$, alors stop. Sinon lui demander un autre choix des probabilités de référence et reprendre le processus à partir de 5.

Exemple 5 *Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :*

$$(P^2_{M.O.F.S})' \left\{ \begin{array}{l} \min(\widetilde{c}_{11}(\omega) \odot x_1 + \widetilde{c}_{12}(\omega) \odot x_2 + \widetilde{c}_{13}(\omega) \odot x_3, \widetilde{c}_{21}(\omega) \odot x_1 + \widetilde{c}_{22}(\omega) \odot x_2 + \widetilde{c}_{23}(\omega) \odot x_3) \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 150 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 175 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 160 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

où :
$\widetilde{c}_{rj}(\omega) = (\overline{d}_{rj}(\omega), \overline{\alpha}_{rj}(\omega), \overline{\beta}_{rj}(\omega))_{L-R}$ dont la fonction d'appartenance est définie au

$\overline{d}_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}$, $\overline{\beta}_{rj}$, sont des variables aléatoires réelles définies par $\overline{d}_{rj}(\omega) = d^1_{rj} + \bar{t}_r(\omega) d^2_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}(\omega) = \alpha^1_{rj} + \bar{t}_r(\omega)\alpha^2_{rj}$ et ,$\overline{\beta}_{rj}(\omega) = \beta^1_{rj} + \bar{t}_r(\omega)\beta^2_{rj}$, où $r = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ et

$d^1_1 = (d^1_{11}, d^1_{12}, d^1_{13}) = (2, 1, 3)$, $\quad d^2_1 = (d^2_{11}, d^2_{12}, d^2_{13}) = (1.3, 1.1, 1.2)$,

$d^1_2 = (d^1_{21}, d^1_{22}, d^1_{23}) = (-7, -7, -9)$, $\quad d^2_2 = (d^2_{21}, d^2_{22}, d^2_{23}) = (1.1, 1.2, 1.1)$.

$\alpha^1_1 = (\alpha^1_{11}, \alpha^1_{12}, \alpha^1_{13}) = (0.3, 0.4, 0.5)$, $\quad \alpha^2_1 = (\alpha^2_{11}, \alpha^2_{12}, \alpha^2_{13}) = (0.05, 0.04, 0.05)$,

$\alpha^1_2 = (\alpha^1_{21}, \alpha^1_{22}, \alpha^1_{23}) = (0.3, 0.5, 0.4)$, $\quad \alpha^2_2 = (\alpha^2_{21}, \alpha^2_{22}, \alpha^2_{23}) = (0.05, 0.04, 0.05)$.

$\beta^1_1 = (\beta^1_{11}, \beta^1_1, \beta^1_{12}) = (0.5, 0.6, 0.5)$, $\quad \beta^2_1 = (\beta^2_{11}, \beta^2_1, \beta^2_{12}) = (0.06, 0.05, 0.06)$,

$\beta_2^1) = (\beta_{21}^1, \beta_{22}^1, \beta_{23}^1) = (0.4, 0.5, 0.5), \quad \beta_2^2 = (\beta_{21}^2, \beta_{22}^2, \beta_{23}^2) = (0.06, 0.06, 0.05)$.

et $\bar{t}_i$, $i = 1, 2$ sont des variables aléatoires normales centrées réduites (pour $i = 1, 2$, $\bar{t}_i \hookrightarrow N(0, 1.))$

Pour la résolution du problème $(P^2_{M.O.F.S})'$, Katagiri et col. [42] se sont basés sur la nature imprécise du jugement du décideur qui propose donc que chaque objectif doit atteindre le but flou $\widetilde{G}_r$ défini par "'l'objectif est à peu prés inférieur ou égal à une certaine valeur"' qui peut être caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{G}_r}$.
En utilisant le concept de mesure de possibilité, le degré de possibilité que la valeur de l'objectif satisfait le but flou est représenté par $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r)) = sup\left\{min(\mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y), \mu_{\widetilde{G}_r}(y))/y\right\}$, $r = 1, 2, ..., k$ que le décideur préfére maximiser, le problème $(P^2_{M.O.F.S})'$ est alors reformulé comme suit :

$$(P^2_{M.O.S})' \begin{Bmatrix} \max(\Pi_{\widetilde{C}_1(\omega)x}(\widetilde{G}_1), \Pi_{\widetilde{C}_2(\omega)x}(\widetilde{G}_2), ..., \Pi_{\widetilde{C}_k(\omega)x}(\widetilde{G}_k)) \\ \\ x \in B \end{Bmatrix}$$

qui est un programme muliobjectifs stochastique car $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}$ est aléatoire.
Pour sa résolution, la méthode de risque minimal multiple a été utilisée dans [42], il en résulte alors le programme déterministe suivant :

$$(P^2_{M.O.D})'_1 \begin{Bmatrix} \max P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\}, \ r = 1, 2, ..., k \\ x \in B \end{Bmatrix}$$

$P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\} = P\left[\omega : \bar{t}_r(\omega) \leq \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x}\right] = T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x}) = p_r(x)$.
où $L^*(h_r)$ et $\mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)$ sont des pseudo fonctions inverses définies par :
$L^*(h_r) = sup\left\{s/L(s) \geq h_r\right\}, \quad \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r) = sup\left\{s/\mu_{\widetilde{G}_r}(s) \geq h_r\right\}$.
par conséquent $(P^5_{M.O.D})_1$ peut s'écrire comme suit :

$$(P^2_{M.O.D})'_2 \begin{Bmatrix} \max(p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)) \\ \\ x \in B \end{Bmatrix}$$

Pour chaque objectif $p_r(x)$, $1 \leq r \leq k$, le décideur choisit une probabilité de référence à atteindre $\overline{p}_r$, on obtient alors le problème minmax suivant :

$$(P^2_{M.O.D})'_3 \begin{Bmatrix} \min max(\overline{p}_1 - p_1(x), \overline{p}_2 - p_2(x), ..., \overline{p}_k - p_k(x)) \\ \\ x \in D \end{Bmatrix}$$

qui est équivalent à :

$$(P^2_{M.O.D})'_4 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \overline{p}_r - p_r(x) \leq v,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

qui peut se réécrire, en remplaçant $p_r(x)$ par $T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x})$, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x} \geq T_r^*(\overline{p}_r - v),\ r = 1, 2, ..., k. \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

où $T_r^*(s)$ est la pseudo fonction inverse définie par :
$T_r^*(s) = inf\left\{u/T_r(u) \geq s\right\},\ r = 1, 2, ..., k$

Etape 1 : Le décideur choisit en premier lieu pour la résolution du problème minmax $(P^2_{M.O.D})'_3$, les probabilités de référence : $\overline{p}_1 = 1$, $\overline{p}_2 = 1$, il en résulte les résultats suivants :

$$\left\{ \; p_1(x) = 0.56 \quad p_2(x) = 0.56 \quad x_1 = 6.49 \quad x_2 = 13.19 \quad x_3 = 19.30 \; \right\}$$

Etape 2 : Le décideur n'est pas satisfait de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ ainsi obtenus et préfére élargir $p_1(x)$ donc modifie $\overline{p}_2$ et refait les calculs avec les probabilités de référence $\overline{p}_1 = 1$, $\overline{p}_2 = 0.80$, les résultats obtenus sont :

$$\left\{ \; p_1(x) = 0.67 \quad p_2(x) = 0.47 \quad x_1 = 7.79 \quad x_2 = 13.68 \quad x_3 = 17.45 \; \right\}$$

Etape 3 : Le décideur n'est pas du tout satisfait de la valeur de $p_2(x)$ ainsi obtenue qu'il juge faible alors il propose de refaire les calculs avec les probabilités de référence $\overline{p}_1 = 0.90$, $\overline{p}_2 = 0.80$, d'où les résultats suivants :

$$\left\{ \; p_1(x) = 0.61 \quad p_2(x) = 0.51 \quad x_1 = 7.14 \quad x_2 = 13.43 \quad x_3 = 18.37 \; \right\}$$

Le décideur est satisfait de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ ainsi obtenus et arrête te processus interactif et la solution satisfaisante est donc :
$x_1 = 7.14$, $x_2 = 13.43$, $x_3 = 18.37$.

7.1.2 Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs

Jun. Li et col.[46] ont considéré le même type de programme linéaire multiobjectifs flou stochastique que Katagiri et col. [42] mais avec des contraintes floues stochastiques et les coefficients aussi bien de ces dernières que des objectifs sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, mais dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs comme suit :

$$(P^3_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1(\omega)\odot x, \widetilde{c}_2(\omega)\odot x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)\odot x) \\ \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i=1,2,...,m \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

où $\widetilde{c}_r(\omega)=(\widetilde{c}_{r1}(\omega),\widetilde{c}_{r2}(\omega),...,\widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type $L-R$ comme suit :
$\widetilde{a}_{ij}(\omega)=(a_{ij}(\omega),\delta^a_{ij},\gamma^a_{ij})_{L-R}$, $\widetilde{b}_i(\omega)=(b_i(\omega),\delta^b_i,\gamma^b_i)_{L-R}$ et $\widetilde{c}_{ij}(\omega)=(c_{ij}(\omega),\delta^c_{ij},\gamma^c_{ij})_{L-R}$ dont les écarts δ^a_{ij}, γ^a_{ij}, δ^b_i,γ^b_i, $\delta^c_{ij},\gamma^c_{ij}$ sont des nombres réels positifs. Et
$a_{ij}\hookrightarrow N(\mu_{ij},\sigma^2_{ij})$, $b_i\hookrightarrow N(\lambda_i,\nu^2_i)$ $\widetilde{c}_{ij}(\omega)=(c_{ij}(\omega),\delta^c_{ij},\gamma^c_{ij})_{L-R}$
$c_r\hookrightarrow N(d^c_r,V^c_r)$ où $d^c_r=(d^c_{r1},d^c_{r2},...,d^c_{rn})$ avec $E(c_{rj})=d^c_{rj}$ et V^c_r est la matrice de covariance de c_r.

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^3_{M.O.F.S})$

Pour la résolution de $(P^3_{M.O.F.S})$, Jun. Li et col[46] ont proposé deux méthodes à savoir : prob-pos constrained multiobjective programming model et pro-nec constrained multiobjective programming model [46] qui consistent à remplacer prob par prob-pos et prob-nec respectivement dans la formule de risque minimum multiple (voir annexe C) pour les objectifs et dans la formule chance constrained programming due à Charnes et Cooper [16] pour les contraintes comme suit :

– pro-pos constrained multiobjective programming model

$$(P^{3p}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1,f_2,...,f_k) \\ \\ P\left\{\omega: pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j\succeq f_r)\geq\alpha_r\right\}\geq p^o_r,\ r=1,2,...,k \\ \\ P\left\{\omega: pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j\preceq \widetilde{b}_i(\omega))\geq\beta_i\right\}\geq p_i, i=1,2,...,m \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right.$$

En utilisant les propriétés de possibilité [25], on a : pour ω donné,
$pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j\succeq f_r)\geq\alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^n \overline{c}^{\alpha_r}_{rj}(\omega)x_j\geq f_r$ donc

$P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r)\geq\alpha_r\right\}\geq p_r^o \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega)x_j \geq f_r\right\}\geq p_r^o$ où $\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega)$. Comme $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R, donc $\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega) = c_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c$ d'où on a :
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\}\geq p_r^o$ qui, en utilisant la remarque 1 comme suit :

on pose $y_r = f_r - \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \leq 0$, on a $m_{y_r}(x) = E(y_r) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j$ et $V(y_r) = V(\sum_{j=1}^{n}c_{rj}(\omega)x_j) = x^tV_r^cx$ donc $\sigma_{y_r}(x) = \sqrt{x^tV_r^cx}$. Par conséquent
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\}\geq p_r^o \Longleftrightarrow \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}+f_r-\sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \leq 0 \Longrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j - \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$ ou bien
$f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$.
Jun. Li et col. ont établit que $(P_{M.O.D}^{3p})$ est équivalent au programme multiobjectif déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{3p})_1 \left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx},\ r=1,2,...,k \\ \\ x\in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m \end{array}\right\}$$

où $X_p^i(p_i,\beta_i) = \left\{x\geq 0/P(\omega : \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(\omega)-L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a)x_j \leq b_i(\omega)+R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b)\geq p_i\right\}$, $i=1,...m$.
$(P_{M.O.D}^{3p})_1$ est équivalent au programme suivant :

$$(P_{M.O.D}^{3p})_2 \left\{\begin{array}{l} \max(H_1(x), H_2(x), ..., H_k(x)) \\ \\ x\in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m \end{array}\right\}$$

où $H_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$, $r=1,2,...,k$.

Ensuite, dans le but d'obtenir une solution satisfaisante au problème $(P_{M.O.D}^{3p})_2$, Jun. Li et col.[46] ont utilisé "'Interactive fuzzy satisfying method"' proposée par Sakawa [53] comme suit : en considérant la nature imprécise du jugement du décideur, il est naturel que ce dernier suggère que chaque objectif atteigne le but flou suivant : " $H_r(x)$ est approximativement plus grand qu'une certaine valeur" qui est caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_r(H_r(x)) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & H_r(x) > H_r^1, \\ \\ \frac{H_r(x)-H_r^0}{H_r^1-H_r^0} & H_r^0 \leq H_r(x) \leq H_r^1, \\ \\ 0 & H_r(x) \leq H_r^0. \end{array}\right\}$$

où pour $r=1,2,...,k$, H_r^0 et H_r^1 sont tels que $\mu_r(H_r^1(x)) = 1$ et $\mu_r(H_r^0(x)) = 0$ et peuvent être déterminés par la résolution des programmes suivants $max(H_r(x)/x\in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m)$ et $min(H_r(x)/x\in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m)$, qui sont convexes pour $p_i > \frac{1}{2}$, donc leurs solutions

optimales peuvent être déterminées aisément.
Le programme $(P^{3p}_{M.O.D})_2$ peut être approché par le programme suivant :

$$(P^{3p}_{M.O.D})_3 \left\{ \begin{array}{l} \max(\mu_1(H_1(x)), \mu_2(H_2(x)), ..., \mu_k(H_k(x))) \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

Pour chaque objectif $\mu_r(H_r(x))$, le décideur choisit une fonction d'appartenance $\overline{\mu_r}$ comme but à atteindre, ce qui revient à résoudre le programme suivant :

$$(P^{3p}_{M.O.D})_4 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(H_1(x)), \overline{\mu_2} - \mu_2(H_2(x)), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(H_k)(x)) \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

En introduisant une variable auxilliaire λ,
$(P^{3p}_{M.O.D})_4$ est alors équivalent au programme suivant :

$$(P^{3p}_{D})_5 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \overline{\mu_r} - \mu_r(H_r(x)) \leq \lambda,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

qui peut, en remplaçant $\mu_r(H_r(x))$ par son expression, s'écrire sous la forme suivante :

$$(P^{3p}_{D})_6 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \sum_{j=1}^n (d^c_{rj} + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1 - p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x} \geq H^0_r i + (\overline{\mu_r} - \lambda)(H^1_r - H^0_r),,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

La relation entre une solution optimale du problème $(P^{3p}_{D})_5$ et la solution pareto-optimale du problème $(P^{3p}_{M.O.D})_2$ est donnée par le théorème suivant :
Théorème 9 *[53]*

1. *Si $x^* \in X^i_p(p_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ est une unique solution optimale du problème $(P^{3p}_{D})_5$ pour $\overline{\mu_i}$, $i = 1, 2, ..., k$, alors x^* est une solution pareto-optimale du problème $(P^{3p}_{M.O.D})_2$.*
2. *Si x^* est une solution pareto-optimale du problème $(P^{3p}_{M.O.D})_2$ avec $0 < \mu_r(H_r(x^*) < 1$, $\forall r = 1, 2, ..., k$, alors il existe $\overline{\mu_r}$, $r = 1, 2, ..., k$ tel que x^* est une solution optimale du problème $(P^{3p}_{D})_5$.*

Remarque 19 *Si $x^* \in X^i_p(p_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ n'est pas une solution optimale unique du problème $(P^{3p}_{D})_5$, sa pareto-optimalité peut être obtenue en résolvant le problème suivant :*

$$(P^{3p}_{D})_7 \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^k \epsilon_i \\ \\ \mu_r(H_r(x)) + \epsilon_r = \overline{\mu_r},\ \epsilon_r \geq 0,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

Algorithme intéractif pour obtenir une solution satisfaisante au problème $(P^{3p}_{M.O.D})_{2;}$

1. Le décideur choisit les fonctions d'appartenance de référence $\overline{\mu}_r, r = 1, 2, ..., k$.
2. La solution optimale du problème $(P^{3p}_{M.O.D})_4$ qui est aussi pareto-optimale du problème $(P^{3p}_{M.O.D})_2$, est considérée comme solution satisfaisante pour $(P^{3p}_{M.O.D})_2$.
3. Si la valeur obtenue de $\mu_r(H_r(x^*)$ est satisfaisante, le processus s'arrête et x^* est choisie comme solution satisfaisante pour le problème $(P^{3p}_{M.O.D})_{2;}$ sinon le décideur modifie les valeurs des fonctions d'appartenance de référence μ_r et reprendre à partir de 2.

– pro-nec constrained multiobjective programming model

$$(P^{3n}_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

En utilisant les propriétés de nécessité [25], on a : pour ω donné, $nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega) x_j \geq f_r$ donc $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega) x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o$ où $\underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega)$. Comme $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R,donc $\underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega) = c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c$ d'où on a : $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o$ qui peut se présenter sous une forme linéaire. Pour cela, on pose $y_r = f_r - \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \leq 0$, on a $m_{y_r}(x) = E(y_r) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j$ et $V(y_r) = V(\sum_{j=1}^{n} c_{rj}(\omega)x_j) = x^t V_r^c x$ donc $\sigma_{y_r}(x) = \sqrt{x^t V_r^c x}$. Par conséquent $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x} + f_r - \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \leq 0 \Leftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j - \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$ ou bien
$f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$ (car $\Psi^{-1}(1-p_r^o) = -\Psi^{-1}(p_r^o)$).

Ainsi, on obtient le résultat suivant établi dans [46].

– $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_i^0 \Leftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$

qui prouve dans [46] :

l'équivalence entre $(P^{3n}_{M.O.D})$ et le programme suivant :

$$(P^{3n}_{M.O.D})_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d^c_{rj} - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^tV^c_rx},\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m. \end{array} \right\}$$

où $X^i_n(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0/P(\omega : \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(\omega) + R^{-1}(1-\beta_i)\delta^a_{ij})x_j \leq b_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\gamma^b_i) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ...m$.
ainsi que l'équivalence entre $(P^{3n}_{M.O.D})_1$ et le programme suivant :

$$(P^{3n}_{M.O.D})_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(G_1(x), G_2(x), ..., G_k(x)) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m. \end{array} \right\}$$

où $G_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(d^c_{rj} - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^tV^c_rx}$
"'Interactive fuzzy satisfying method",' proposée par Sakawa [53], a été utilisée dans [46] pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P^{3n}_{M.O.D})_2$ comme suit : en considérant la nature imprécise du jugement du décideur, il est naturel que ce dernier propose, pour chaque objectif, le but flou suivant à atteindre : " $G_r(x)$ est approximativement plus grand qu'une certaine valeur" qui est caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_r(G_r(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & G_r(x) > G^1_r, \\ \\ \frac{G_r(x) - G^0_r}{G^1_r - G^0_i} & G^0_r \leq G_r(x) \leq G^1_r, \\ \\ 0 & G_r(x) \leq G^0_r. \end{array} \right\}$$

où pour $r = 1, 2, ..., k$ on a G^0_r et G^1_r sont tels que $\mu_r(G^1_r(x)) = 1$ et $\mu_r(G^0_r(x)) = 0$ et peuvent être déterminés par la résolution des programmes suivants $max(G_r(x)/x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m)$ et
$min(G_r(x)/x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m)$, qui sont convexes pour $p_i > \frac{1}{2}$, donc leurs solutions optimales peuvent être déterminées aisément.
Pour résoudre le programme $(P^{3n}_{M.O.D})_3$, le décideur choisit pour chaque objectif $\mu_r(G_r(x))$, une fonction d'appartenance $\overline{\mu_r}$ comme but à atteindre. Ce qui conduit à résoudre le programme suivant :

$$(P^{3n}_{M.O.D})_4 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(G_1(x)), \overline{\mu_2} - \mu_2(G_2(x)), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(G_k)(x)) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

En introduisant une variable auxilliaire λ, $(P^{3n}_{M.O.D})_4$ est équivalent programme suivant :

$$(P^{3n}_{D})_5 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \overline{\mu_r} - \mu_r(G_r(x)) \leq \lambda,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

ou, au programme suivant :

$$(P_D^{3n})_6 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx} \geq H_r^0 + (\overline{\mu_r} - \lambda)(G_r^1 - G_r^0),\ r = 1,2,...,k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X_n^i(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m \end{array} \right\}$$

qui est un programme convexe, si $p_i > \frac{1}{2}$.
Le théorème 18 s'applique quant à la relation existant entre la solution optimale de $(P_D^{3n})_5$ et la solution pareto optimale de $(P_{M.O.D}^{3n})_2$.

Exemple 6 *[46] Soit le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :*

$$(P_{M.O.F.S}^3)' \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{\xi}_1(\omega) \odot x_1 \oplus \widetilde{\xi}_2(\omega) \odot x_2 \oplus \widetilde{\xi}_3(\omega) \odot x_3 \oplus \widetilde{\xi}_4(\omega) \odot x_4 \oplus \widetilde{\xi}_5(\omega) \odot x_5, \\ \widetilde{\xi}_6(\omega) \odot x_1 \oplus \widetilde{\xi}_7(\omega) \odot x_2 \oplus \widetilde{\xi}_8(\omega) \odot x_3 \oplus \widetilde{\xi}_9(\omega) \odot x_4 \oplus \widetilde{\xi}_{10}(\omega) \odot x_5) \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 350 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 300 \\ \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1085 \\ \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 660 \\ \\ x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 20,\ x_4 \geq 20,\ x_5 \geq 20. \end{array} \right\}$$

où $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1.2, 0.5, 1.3, 0.8, 0.9)$
$\xi_{1(\omega)} = (p_1(\omega), 3, 3)_{LR}$ *avec* $p_1 \hookrightarrow N(113, 1)$, $\quad \xi_2(\omega) = (p_2(\omega), 8, 8)_{LR}$ *avec* $p_2 \hookrightarrow N(241, 4)$.
$\xi_3(\omega) = (p_3(\omega), 3, 3)_{LR}$ *avec* $p_3 \hookrightarrow N(87, 1)$, $\quad \xi_4(\omega) = (p_4(\omega), 78, 7)_{LR}$ *avec* $p_4 \hookrightarrow N(56, 2)$.
$\xi_5(\omega) = (p_5(\omega), 5, 5)_{LR}$ *avec* $p_5 \hookrightarrow N(92, 1)$, $\quad \xi_6(\omega) = (p_6(\omega), 10, 10)_{LR}$ *avec* $p_6 \hookrightarrow N(628, 1)$.
$\xi_7(\omega) = (p_7(\omega), 7, 7)_{LR}$ *avec* $p_7 \hookrightarrow N(143, 2)$, $\quad \xi_8(\omega) = (p_8(\omega), 12, 12)_{LR}$ *avec* $p_8 \hookrightarrow N(476, 2)$.
$\xi_9(\omega) = (p_9(\omega), 5, 5)_{LR}$ *avec* $p_9 \hookrightarrow N(324, 2)$, $\quad \xi_{10}(\omega) = (p_{10}(\omega), 8, 8)_{LR}$ *avec* $p_{10} \hookrightarrow N(539, 2)$.
Et p_i, $i = 1, 2, ..., 10$ *sont des variables aléatoires indépendantes.*
Pour la résolution, en appliquant "'pro-pos constrained multiobjective programming model"' avec $\alpha_i = p_i^0 = 0.9$ *alors* $R^{-1}(\delta_l) = 0.1$, $\phi^{-1}(1 - \gamma_l) = -1.28$, $l = 1, 2$.

Il en résulte le programme suivant :

$$
(P^3_{M.O.D})' \left\{
\begin{array}{l}
\max(f_1, f_2) \\[2ex]
P\left\{\omega : pos(\widetilde{\xi}_1(\omega) \odot x_1 + \widetilde{\xi}_2(\omega) \odot x_2 + \widetilde{\xi}_3(\omega) \odot x_3 + \widetilde{\xi}_4(\omega) \odot x_4 + \widetilde{\xi}_5(\omega) \odot x_5 \geq f_1) \geq \delta_1\right\} \geq \gamma_1 \\[2ex]
P\left\{\omega : pos(c_1\widetilde{\xi}_6(\omega) \odot x_1 + c_2\widetilde{\xi}_7(\omega) \odot x_2 + c_3\widetilde{\xi}_8(\omega) \odot x_3 + c_4\widetilde{\xi}_9(\omega) \odot x_4 + \right. \\
c_5\widetilde{\xi}_{10}(\omega) \odot x_5 \geq f_2) \geq \delta_2 \geq \gamma_2 \\[2ex]
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 350 \\[2ex]
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 300 \\[2ex]
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1085 \\[2ex]
x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 660 \\[2ex]
x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 20,\ x_4 \geq 20,\ x_5 \geq 20.
\end{array}
\right\}
$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$
(P^3_{M.O.D})' \left\{
\begin{array}{l}
\max(H_1(x) = 0.1(3x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 + (113x_1 + 241x_2 + 67x_3 + 56x_4 + 92x_5) \\
-1.28\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_5^2}, \\
H_2(x) = 0.1(1.2x_1 + 3.5x_2 + 15.6x_3 + 4x_4 + 7.2x_5 + (753.6x_1 + 71.5x_2 + 618.8x_3 + 259.2x_4 \\
+485.1x_5) - 1.28\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2}) \\[2ex]
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 350 \\[2ex]
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 300 \\[2ex]
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1085 \\[2ex]
x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 660 \\[2ex]
x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 20,\ x_4 \geq 20,\ x_5 \geq 20.
\end{array}
\right\}
$$

dont la solution satisfaisante peut être obtenue en appliquant l'algorithme précédent comme suit :

Etape 1 : Le décideur choisit en premier lieu les fonctions d'appartenance de référence suivantes : $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 1$, *d'où l'obtention des résultats suivants :*

$$
\left\{
\begin{array}{cccccc}
H_1 = 41476.7 & H_2 = 214244.8 & \mu_1(H_1) = 0.833 & \mu_2(H_2) = 0.833 & & \\
x_1 = 216.1 & x_2 = 39.6 & x_3 = 54.3 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.167
\end{array}
\right\}
$$

Etape 2 : Le décideur souhaite croitre la valeur de H_2 quitte à sacrifier H_1, donc il opte pour : $\overline{\mu}_1 = 0.95,\ \ \overline{\mu}_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41093.2 & H_2 = 21725.6 & \mu_1(H_1) = 0.805 & \mu_2(H_2) = 0.855 & & \\ x_1 = 216.6 & x_2 = 37.0 & x_3 = 56.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.145 \\ \end{array} \right\}$$

Etape 3 :Le décideur n'étant toujours pas satisfait des résultats obtenus, opte pour : $\overline{\mu}_1 = 1,\ \ \overline{\mu}_2 = 0.95.$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41860.2 & H_2 = 21273.6 & \mu_1(H_1) = 0.861 & \mu_2(H_2) = 0.811 & & \\ x_1 = 215.6 & x_2 = 34.4 & x_3 = 58.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.139 \\ \end{array} \right\}$$

Etape 4 : $\overline{\mu}_1 = 0.90,\ \ \overline{\mu}_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 40709.6 & H_2 = 21720.6 & \mu_1(H_1) = 0.777 & \mu_2(H_2) = 0.877 & & \\ x_1 = 217.3 & x_2 = 34.4 & x_3 = 58.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.123 \\ \end{array} \right\}$$

Etape 5 : $\overline{\mu}_1 = 0.80,\ \ \overline{\mu}_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41093.2 & H_2 = 21725.6 & \mu_1(H_1) = 0.805 & \mu_2(H_2) = 0.855 & & \\ x_1 = 216.6 & x_2 = 37.0 & x_3 = 56.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.145 \\ \end{array} \right\}$$

Le décideur est satisfait des résultats obtenus, le processus s'arrête, la solution est : $x^* = (216.6,\ 37.0,\ 56.4,\ 20.0,\ 20.0).$

Nous remarquons que les variables aléatoires floues considérées dans $(P^3_{M.O.F.S})$ et dans [46] sont normales de type L-R, de la forme $\widetilde{X} = (x, \alpha^x, \beta^x)$ où x est une variable aléatoire réelle normale et les écarts à gauche et à droite respectifs α^x et β^x sont des nombres réels positifs.
Nous allons, pour la suite, les considérer selon les deux cas suivants :

– Premier cas : normales de type L-R telles que définies au 4.2.1, donc de la forme $\widetilde{X} = (\underline{x}, \overline{x}, \alpha^x, \beta^x)$ où $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont des variables aléatoires normales (avec $\underline{x} \leq \overline{x}$) et les écarts à gauche et à droite respectifs α^x et β^x sont des nombres réels positifs.
– Deuxième cas : normales au sens de Shapiro [56].

Nous proposons en plus deux autres méthodes dans le sens de chance constrained à savoir $pro - \mu_k$, $k = 2, 3, 4I$ (i.e. en combinant chance constrained et comparaison d'intervalles aléatoires) pour le premier cas, et $pro - F$ (i.e. en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues) pour le deuxième.

Nous reconsidérons alors $(P^3_{M.O.F.S})$, avec $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ des variables floues normales, d'un autre type L-R telles que définies au 4.2.1 ou, au sens de Shapiro.Et $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ peuvent être déterministes, des intervalles flous, des variables aléatoires réelles normales, ou des variables aléatoires floues normales, de type L-R, ou au sens de Shapiro.
Nous considérons le cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales, de type L-R telles que définies au 4.2.1, ou au sens de Shapiro comme suit :

7.1.3 Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs telles que définies au 4.2.1

Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^4_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1(\omega)x, \widetilde{c}_2(\omega)x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{c}_r(\omega) = (\widetilde{c}_{r1}(\omega), \widetilde{c}_{r2}(\omega), ..., \widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, telles que définies au 4.2.1, comme suit :
$\widetilde{c}_{rj}(\omega) = (\underline{c}_{rj}(\omega), \overline{c}_{rj}(\omega), \delta^c_{rj}, \gamma^c_{rj})$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ où $\underline{c}_{rj}(\omega)$ et $\overline{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires normales d'espérances respectives $\underline{d}^c_{rj}$ et $\overline{d}^c_{rj}$. Et soit V_r la matrice de covariance de $\underline{c}_r$ et $\overline{c}_r$ et $\underline{d}^c_r = (\underline{d}^c_{r1}, \underline{d}^c_{r2}, ..., \underline{d}^c_{rn})$ et soient $\overline{d}^c_r = (\overline{d}^c_{r1}, \overline{d}^c_{r2}, ..., \overline{d}^c_{rn})$ leurs espérances mathématiques respectives. Quant aux espérances mathématiques et variances des $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$, nous gardons les mêmes que celles considérées à la section 4.2.1.

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^4_{M.O.F.S})$

Nous appliquons la méthode 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' comme suit :

1. En combinant probabilité et possibilité :
   nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{4p}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1,2,...,k \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i,\ i = 1,2,...,m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

   En vertu des propriétés de possibilité, nous avons pour chaque ω donné,
   $pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \geq f_r$, donc
   $P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega)\dot{x}_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} = P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j) \geq f_r\right\}$.
   Par conséquent $(P^{4p}_{M.O.D})'$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{4p}_{M.O.D})'_1\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1,2,...,k, \\ \\ x \in X^i_p(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m \\ \end{array}\right\}$$

   où $X^i_p(p_i,\beta_i) = \left\{x \in R^n / P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega)x_j \leq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i / x \geq 0\right\}$ qui est convexe pour $p_i > \frac{1}{2}$ et $\forall \beta_i \in (0,1]$ (voir section 6.5.2).
   Puisque les variables aléatoires rélles $\overline{c}_{rj}(\omega)$ sont normales, nous pouvons utiliser la remarque 1 comme suit : posons $y_r(x,\omega) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \leq 0$, calculons $m_{y_r}(x) = E(y_r(x,\omega)) = f_r - \sum_{j=1}^{n} E((\overline{c}_{rj}(\omega)) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\overline{d}^c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j$ et $\sigma^2_{y_r}(x) = V(\sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)x_j)$, (voir en annexe,les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance) et conclure que :
   $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\overline{d}^c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V^c_r x}$.
   Par conséquent $(P^{4p}_{M.O.D})'_1$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{4p}_{M.O.D})'_2\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\overline{d}^c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V^c_r x},\ r = 1,2,...,k, \\ \\ X^i_p(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m \end{array}\right\}$$

   qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{4p}_{M.O.D})'_3\left\{\begin{array}{l} \max(Q_1(x), Q_2(x), ..., Q_k(x) \\ \\ x \in X^i_p(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m \end{array}\right\}$$

où $Q_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(\overline{d}_{rj}^{c}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^{c})x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}, r = 1, ..., k.$

Nous pouvons utiliser, dans le but d'obtenir une solution satisfaisante du problème $(P_{M.O.D}^{4p})'_3$, "'Interactive fuzzy satisfying method"' proposée par Sakawa [53] et utilisée par Liu et al [46].

2. En combinant probabilité et nécessité :
nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{4n})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

En vertu des propriétés de nécessité, nous avons pour chaque ω donné,
$nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j \geq f_r$, donc
$P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} = P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j) \geq f_r\right\}.$
Par conséquent $(P_{M.O.D}^{4n})'$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{4n})'_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X_n^i(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

où $X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \in R^n / P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i / x \geq 0\right\}$ qui est convexe pour $p_i > \frac{1}{2}$ et $\forall \beta_i \in (0, 1]$.
Puisque les variables aléatoires rélles $\underline{c}_{rj}(\omega)$ sont normales, nous pouvons utiliser la remarque 1 comme suit : en posant $y_r(x,\omega) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j \leq 0$, en calculant $m_{y_r}(x) = E(y_r(x,\omega))f_r - \sum_{j=1}^{n}E((\underline{c}_{rj}(\omega)) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}_{rj}^{c}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j$ et $\sigma_{y_r}^2(x) = V(\sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega)x_j) = x^t V_r^c x$ (voir en annexe, les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance) et conclure que
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}_{rj}^{c}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}.$
Par conséquent $(P_{M.O.D}^{4n})'_1$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{4n})'_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}_{rj}^{c}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^{c})x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x} \\ \\ x \in X_n^i(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{4n}_{M.O.D})'_3 \left\{ \begin{array}{l} \max(T_1(x), T_2(x), ..., T_k(x)) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

où $T_r(x) = \sum_{j=1}^n (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x}$.

Nous pouvons utiliser 'Interactive fuzzy satisfying method' proposée par Sakawa [53], pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P^{4n}_{M.O.D})'_3$

3. En combinant chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires comme suit :
   – en combinant probabilité et μ_{2D}
   Nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{4\mu_{2D}}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_{2D}(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j, f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ..., m, \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P^{4\mu_{2D}}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

où $X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i) = \left\{x \in R^n / P\left\{\omega : \mu_{2D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i / x \geq 0\right\}$ qui est convexe pour $p_i > \frac{1}{2}$ et $\forall \beta_i \in (0, 1$.
Puisque les variables aléatoires rélles $\underline{c}_{rj}(\omega)$ sont normales, nous pouvons utiliser la remarque 1 comme suit : en posant $y_r(x, \omega) = f_r - \sum_{j=1}^n (\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \leq 0$, en calculant $m_{y_r}(x) = E(y_r(x, \omega))f_r - \sum_{j=1}^n E((\underline{c}_{rj}(\omega)) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j = f_r - \sum_{j=1}^n (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j$ et $\sigma^2_{y_r}(x) = V(\sum_{j=1}^n (\underline{c}_{rj}(\omega)x_j) = x^t V^c_r x$ (voir en annexe, les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance) et conclure que
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r \Longleftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^n (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1 - \alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x}$.
Par conséquent $(P^{4\mu_{2D}}_{M.O.D})'$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe sui-

vant :

$$(P^{4\mu_{2D}}_{M.O.D})'_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n} (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x},\, r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i),\, i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{4\mu_{2D}}_{M.O.D})'_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(T_1(x), T_2(x), ..., T_k(x)) \\ \\ x \in X^i_{\mu_{2D}}(p_i, \beta_i),\, i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

où $T_r(x) = \sum_{j=1}^{n} (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x},\, r = 1, 2, ..., k.$

Nous pouvons utiliser ‘Interactive fuzzy satisfying method’ proposée par Sakawa [53], pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P^{4\mu_{2D}}_{M.O.D})'_2$

– en combinant probabilité et μ_{3D}
  Nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{4\mu_{3D}}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_{3D}(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j, f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p^o_r, r = 1, 2, ..., k, \\ \\ P\left\{\omega : \mu_{3D}(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ...m, \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{4\mu_{3D}}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} (\underline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\, r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X^i_{\mu_{3D}}(p_i, \beta_i),\, i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

– en combinant probabilité et μ_l, $l = 4D, 4I$:
  nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{4\mu_l}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\, r = 1, 2, ..., k, \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\omega)x_j \leq \overline{b}_i(\omega)\right\} \geq p_i,\, i = 1, ...m, \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

$(P^{4\mu_l}_{M.O.D})'$, $l \in \{4D, 4I\}$ est équivalent au programme suivant :

$$(P^{4\mu_l}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X^i_{\mu_l}(p_i, 1),\ i = 1, 2, ..., m. \end{array} \right\}$$

7.1.4 Cas des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro

Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^5_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1(\omega)x, \widetilde{c}_2(\omega)x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro.

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^5_{M.O.F.S})$

Pour la résolution de $(P^5_{M.O.F.S})$, nous appliquons 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' comme suit :

– en combinant probabilité et possibilité :
  nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{5p}_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p^o_r, r = 1, 2, ..., k \\ \\ P(\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)x_j \leq \overline{b}^{\beta_i}_i(\omega)) \geq p_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

  où $\underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)$ et $\overline{b}^{\beta_i}_i(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{b}^{\beta_i}_i(\omega)$.
  qui est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P^{5p}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{c}^{\alpha_r}_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r, r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ \end{array} \right\}$$

où $X_p^i(p_i,\beta_i)=\left\{x_j/P(\omega:\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)x_j\leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega))\geq p_i,\ x_j\geq 0,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n\right\}$

– en combinant probabilité et nécessité :

nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{5n})\left\{\begin{array}{l}\max(f_1,f_2,...,f_k)\\ \\ P\left\{\omega:nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j\succeq f_r)\geq\alpha_r\right\}\geq p_r^o,\ r=1,2,...,k\\ \\ P(\omega:\sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)x_j\leq \underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega))\geq p_i, i=1,...,m\\ \\ x_j\geq 0, j=1,2,...,n\end{array}\right\}$$

où $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ et $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{b}_i^{\beta_i}(\omega)$.

qui est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{5n})'\left\{\begin{array}{l}\max(f_1,f_2,...,f_k)\\ \\ P\left\{\omega:\sum_{j=1}^n \underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega)x_j\geq f_r\right\}\geq p_r^o, r=1,2,...,k\\ \\ x\in X_n^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m\\ \\ \end{array}\right\}$$

où $X_n^i(p_i,\beta_i)=\left\{x_j/P(\omega:\sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)x_j\leq \underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega))\geq p_i,\ x_j\geq 0,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n\right\}$

Dans ce cas, les coefficients des programmes linéaires multi-objectifs flous stochastiques considérés sont des variables aléatoires floues *normales* de type L-R ou au sens de shapiro car les méthodes proposées ne s'appliquent que dans ce cas.

Pour les cas suivants où les coefficients des objectifs sont des intervalles flous, des variables aléatoires réelles ou déterministes, nous considérons des contraintes dont les coefficients peuvent être des variables aléatoires floues normales de type L-R ou au sens de shapiro, discrètes ou discrètes de type L-R.

7.2 Les coefficients des objectifs sont des intervalles flous, des variables aléatoires réelles ou déterministes.

Soient $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des variables aléatoires floues qui peuvent être discrètes, normales au sens de Shapiro, discrètes de type L-R, ou normales de type L-R et $D_i = \left\{\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), / x \in R^n, x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n\right\}, i = 1, ..., m$ l'ensembles des contraintes floues stochastiques communes aux trois programmes linéaires multi-objectifs flous stochastiques suivants qui diffèrent l'un de l'autre par la nature des coefficients de leurs objectifs.

1. Les coefficients des objectifs sont des intervalles flous :

$$(P^6_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1 \odot x, \widetilde{c}_2 \odot x, ..., \widetilde{c}_k \odot x) \\ \\ x \in D_i, i = 1, ..., m \end{array} \right\}$$

   où $\widetilde{c}_r = (\widetilde{c}_{r1}, \widetilde{c}_{r2}, ..., \widetilde{c}_{rn})$ et les $\widetilde{c}_{rj}$ sont des intervalles flous.

2. Les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires réelles :

$$(P^7_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ x \in D_i, i = 1, ..., m \end{array} \right\}$$

   où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles.

3. Les coefficients des objectifs sont déterministes :

$$(P^8_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1 x, c_2 x, ..., c_k x) \\ \\ x \in D_i, i = 1, ..., m \end{array} \right\}$$

   où $c_r = (c_{r1}, c_{r2}, ..., c_{rn})$ et les c_{rj} sont déterministes.

Pour la résolutions de ces problèmes, nous focalisons, en premier lieu, sur les contraintes et nous appliquons chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients d'où il en résulte les ensembles admissibles déterministes que nous représentons par X_i qui peuvent être $X^i_p(p_i, \beta_i)$, $X^i_n(p_i, \beta_i)$, $X^i_F(p_i)$ ou $X^i_{\mu_r}(p_i, \beta_i), r = 2D, 3D$, selon la version utilisée et le type de variables aléatoires floues considéré. Donc nous remplaçons D_i par X_i dans $(P^6_{M.O.F.S})$, $(P^7_{M.O.F.S})$ et $(P^8_{M.O.F.S})$, nous obtenons respectivement :

1. le programme linéaire multiobjectifs flou :

$$(P^6_{M.O.F}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1 \odot x, \widetilde{c}_2 \odot x, ..., \widetilde{c}_k \odot x) \\ \\ x \in X_i, i = 1, ..., m \end{array} \right\}$$

   où $\widetilde{c}_r = (\widetilde{c}_{r1}, \widetilde{c}_{r2}, ..., \widetilde{c}_{rn})$ et les $\widetilde{c}_{rj}$ sont des intervalles flous.

2. le programme linéaire multiobjectifs stochastique :

$$(P^7_{M.O.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ x \in X_i, i = 1, ..., m \end{array} \right\}$$

   où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles.

3. le programme linéaire multiobjectifs déterministe :

$$(P^8_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l}\max(c_1x, c_2x, ..., c_kx)\\ \\ x \in X_i, i = 1, ..., m\end{array}\right\}$$

où $c_r = (c_{r1}, c_{r2}, ..., c_{rn})$ et les c_{rj} sont déterministes.

Que nous pouvons résoudre en utilisant les techniques de la programmation linéaire multi-objectifs :

1. floue pour $(P^6_{M.O.F})$
2. stochastique pour $(P^7_{M.O.S})$
3. déterministe pour $(P^8_{M.O.D})$

Exemple 7 *Considèrons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :*

$$(P^1_{mofs})' = \left\{\begin{array}{l}\max(x_1 + \frac{2}{3}x_2, x_1 + \frac{8}{3}x_2)\\ \\ \widetilde{a}_{11} \odot x_1 + \widetilde{a}_{12} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_1(\omega)\\ \\ \widetilde{a}_{21} \odot x_1 + \widetilde{a}_{22} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_2(\omega)\\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}\right\}$$

où $(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$ sont des intervalles flous (resp. des intervalles flous de type L-R) et $(\widetilde{b}_i)_{i=1,2}$ sont des variables aléatoires floues discrètes (rep. des variables aléatoires floues discrètes de type L-R) définies sur l'espace de probabilité (Ω, F, P), où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, muni de la distribution de probabilité suivante : $P(\omega_1) = 0.25$, $P(\omega_2) = 0.75$.

1. *Cas où $(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$ sont des intervalles flous et $(\widetilde{b}_i)_{i=1,2}$ sont des variables aléatoires floues.*
   $\widetilde{a}_{11} = \widetilde{1}, \quad \widetilde{a}_{12} = \widetilde{3}$
   $\widetilde{a}_{21} = \widetilde{2}, \quad \widetilde{a}_{22} = \widetilde{4}.$
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_1) = \widetilde{1}) = P(\widetilde{b}_2(\omega_1) = \widetilde{2}) = 0.25$ *et*
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_2) = \widetilde{3}) = P(\widetilde{b}_2(\omega_2) = \widetilde{4}) = 0.75.$
   $\widetilde{m}$, $m = 1, 2, 3, 4$ *sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance* $\mu_{\widetilde{m}}$, $m = 1, 2, 3, 4$ *sont définies comme suit :*

$$\mu_{\widetilde{m}}(x) = \left\{\begin{array}{ll}0 & x < m-1,\\ \\ x-m+1 & m-1 \leq x < m,\\ \\ 1 & m \leq x < m+1,\\ -x+m+2 & m+1 \leq x \leq m+2,\\ \\ 0 & x > m+2.\end{array}\right\}.$$

Etant donné que les objectifs sont déterministes et qu'il y a présence de variables aléatoires floues dans les contraintes. Alors, pour la résolution de $(P^1_{mofs})'$, nous pouvons utiliser d'une *part les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs déterministe à savoir la méthode scalarisante avec les paramètres* $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ *et* $\lambda_2 = \frac{2}{3}$*, nous obtenons alors le programme linéaire flou stochastique suivant :*

$$(P^1_{fs})' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ \widetilde{a}_{11} \odot x_1 + \widetilde{a}_{12} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_1(\omega) \\ \\ \widetilde{a}_{21} \odot x_1 + \widetilde{a}_{22} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_2(\omega) \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

que nous pouvons, d'autre part, résoudre en utilisant les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs floue stochastique à savoir la méthode' chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients' avec ses différentes versions comme suit :

- *en combinant probabilité et possibilité avec* $p_1 = p_2 = 0.75$ *et* $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$*, on a :*
  $P(\overline{b}_1^{0.8}(\omega_1) = 2.2) = P(\overline{b}_2^{0.8}(\omega_1) = 3.2) = 0.25$ *et*
  $P(\overline{b}_1^{0.8}(\omega_2) = 4.2) = P(\overline{b}_2^{0.8}(\omega_2) = 5.2) = 0.75,$
  $\underline{a}_{11}^{0.8} = 0.8$, $\underline{a}_{12}^{0.8} = 2.8$, $\underline{a}_{21}^{0.8} = 1.8$, $\underline{a}_{22}^{0.8} = 3.8$.
  Et on obtient :

  $$(P^1_p)' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 0.8x_1 + 2.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\overline{b}_1^{0.8}}(0.25) = 2.2 \\ \\ 1.8x_1 + 3.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\overline{b}_2^{0.8}}(0.25) = 3.2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

  où $\Psi^{-1}_{b_i}$*,* $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* b_i*,* $i = 1, 2$.

  Nous obtenons la solution $x^0 = (\frac{11}{4}, 0)$ *qui est (0.75,0.8) Pro-pos pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.
- *en combinant probabilité et nécessité avec* $p_1 = p_2 = 0.75$ *and* $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$*, nous avons :*
  $P(\underline{b}_1^{0.2}(\omega_1) = 0.2) = P(\underline{b}_2^{0.2}(\omega_1) = 1.2) = 0.25$ *et*
  $P(\underline{b}_1^{0.2}(\omega_2) = 2.2) = P(\underline{b}_2^{0.2}(\omega_2) = 3.2) = 0.75,$
  $\overline{a}_{11}^{0.2} = 2.8$, $\overline{a}_{12}^{0.2} = 4.8$, $\overline{a}_{21}^{0.2} = 3.8$, $\overline{a}_{22}^{0.2} = 5.8$.

Nous obtenons :

$$(P_n^1)' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 2.8x_1 + 4.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\underline{b}_1^{0.2}}(0.25) = 0.2 \\ \\ 3.8x_1 + 5.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\underline{b}_2^{0.2}}(0.25) = 1.2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $\Psi^{-1}_{b_i}$, $i = 1,2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* b_i, $i = 1,2$.

Nous obtenons la solution $x^0 = (0, \frac{1}{24})$ *qui est (0.75,0.8) Pro-nec pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

- *en combinant probabilité et indices de comparaison de quantitiés floues avec* $p_1 = p_2 = 0.75$*, nous avons :*
  $P(F(\widetilde{b}_1(\omega_1) = 1)) = P(F(\widetilde{b}_2(\omega_1) = 2)) = 0.25$ *et*
  $P(F(\widetilde{b}_1(\omega_2) = 3)) = P(F(\widetilde{b}_2(\omega_2) = 4)) = 0.75$.
  $F(\widetilde{a}_{11}) = 1$, $F(\widetilde{a}_{12}) = 3$, $F(\widetilde{a}_{21}) = 2$, $F(\widetilde{a}_{22}) = 4$.
  Nous obtenons :

$$(P_F^1)' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ x_1 + 3x_2 \leq \Psi^{-1}_{F(b_1)}(0.25) = 1 \\ \\ 2x_1 + 4x_2 \leq \Psi^{-1}_{F(b_2)}(0.25) = 2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

  où $\Psi^{-1}_{F(b_i)}$, $i = 1,2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* $F(b_i)$, $i = 1,2$.

  Nous obtenons la solution $x^0 = (1,0)$ *qui est 0.75 Pro-F pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

2. *Cas où* $(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$ *sont des intervalles flous de type L-R et* $\widetilde{b}_{i=1,2}$ *sont des variables aléatoires discrètes de type L-R comme suit :*
   $\widetilde{a}_{11} = (1,2,1,1)_{L-R}$, $\widetilde{a}_{12} = (3,4,1,1)_{L-R}$, $\widetilde{a}_{21} = (2,3,1,1)_{L-R}$, $\widetilde{a}_{22} = (4,5,1,1)_{L-R}$. *Et*
   $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \underline{1}, 1)$, $i = 1,2$. *tels que :*
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_1) = \widetilde{\gamma}_1^1) = P(\widetilde{b}_2(\omega_1) = \widetilde{\gamma}_2^1) = 0.25$, *et*
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_2) = \widetilde{\gamma}_1^2) = P(\widetilde{b}_2(\omega_2) = \widetilde{\gamma}_2^2) = 0.75$ *avec :*
   $\gamma_1^1 = (1,2,1,1)_{L-R}$, $\gamma_1^2 = (3,4,1,1)_{L-R}$, $\gamma_2^1 = (2,3,1,1)_{L-R}$, $\gamma_2^2 = (4,5,1,1)_{L-R}$.
   Où $L(x) = max(0, 1-x)$ *et* $L = R$.
   Pour résoudre le programme linéaire flou stochastique $(P^1_{fs})'$*, nous appliquons la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients en utilisant la version qui consiste à combiner chance constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires avec* $p_1 = p_2 = 0.75$ *et* $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$*,, nous obtenons :*

- *en combinant probabilité et* μ_{2D},

$$(P^1_{\mu_2})' \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 0.5x_1 + 2.5x_2 \leq \Psi_1^{-1}(0.25) = 0.5 \\ \\ 1.5x_1 + 3.5x_2 \leq \Psi_2^{-1}(0.25) = 1.5 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où Ψ_i^{-1}, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* $\underline{b}_i - L^{-1}(0.2)$, $i = 1, 2$.

La solution est $x^0 = (1, 0)$ *qui est (0.75,0.5) Pro* $- \mu_{2D}$ *pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

- *en combinant probabilité et* μ_{3D},

$$(P^1_{\mu_3})' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 2.5x_1 + 4.5x_2 \leq \Phi_1^{-1}(0.25) = 2.5 \\ \\ 3.5x_1 + 5.5x_2 \leq \Phi_2^{-1}(0.25) = 3.5 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $\Phi_{\overline{b}_i}^{-1}$, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* $\overline{b}_i + L^{-1}(0.8)$, $i = 1, 2$.

La solution est $x^0 = (0, \frac{5}{9})$ *qui est (0.75,0.5)Pro* $- \mu_{3D}$ *pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

CONCLUSION

Depuis plusieurs années, on considère que les deux sources d'incertitude principales sont le manque d'informations et la variabilité des phénomènes. On modélise alors les informations soit par des distributions de probabilité (informations aléatoires) soit par des ensembles flous (informations incomplètes). Nous venons de voir que les deux sources d'incertitude ne sont pas mutuellement exclusives, elles peuvent se trouver combinées. Les variables aléatoires floues proposent un bon formalisme pour cette combinaison.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa en programmation mathématique.

Dans ce travail, nous avons apporté notre contribution dans l'étude de la combinaison du flou et de l'aléa. Nous avons, en premier lieu, étendu aux variables aléatoires floues, deux concepts connus en théorie de la décision, à savoir la dominance stochastique et la préférence statistique en les combinant avec des méthodes de comparaison d'intervalles flous, eux même généralisant les ordres d'intervalles. Nous avons envisagé trois façons de comparer les intervalles flous : vus comme des distributions de possiblités ordinales, comme intervalles graduels ou comme intervalles aléatoires consonants.Pour une autre vision, comme probabilités imprécises, une extension de la dominance stochastique a été proposée par I. Couso et D. Dubois [22].

Nous avons,en second lieu, généralisé conjointement, aux variables aléatoires floues, les deux variantes du chance constrained programming, l'une avec des coefficients flous due à Dubois [25], l'autre avec des coefficients aléatoires due à Charnes et Cooper [16], pour avoir : chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [7].

Cette généralisation nous a permis de développer des approches pour la programmation linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro, discrètes, normales de type L-R ou discrètes de type L-R.

Nous avons, ensuite, établi les conditions de convexité des ensembles admissibles résultant de l'application de cette méthode. C'est en quelque sorte une extension aux variables floues des conditions de convexité des ensembles admissibles résultant de l'application de chance constrained programming due à Charnes et Cooper en programmation linéaire stochastique.

Pour illustrer la pertinence de cette méthode, nous avons traité des exemples numériques.

Toutefois, nous entrevoyons quelques perspectives intéressantes pour faire avancer les débats dans ce domaine. Il serait intéressant :

1. d'étendre aux variables aléatoires floues, la préférence statistique, en considérant la comparaison d'intervalles flous vus comme probabilités imprécises
2. d'appliquer à la programmation floue stochastique, ces deux concepts de dominance stochastiques et de préférence statistique des variables aléatoires floues.

Annexe A

Ensembles flous

Définition 27 *Soit X un référentiel.*
Un sous ensemble flou $\widetilde{A}$ de X est défini comme suit :
$\widetilde{A} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)); x \in X\right\}$ *où*
$\mu_{\widetilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$ *est la fonction d'appartenance du sous ensemble flou $\widetilde{A}$ considéré et peut représenter suivant le contexte :*
– *le degré d'appartenance à un sous ensemble aux contours mal définis ;*
– *le niveau de compatibilité avec un concept donné ;*
– *le niveau de similarité avec un prototype ;*
– *un degré de possibilité ;*
– *une borne supérieur de degré de probabilité.*
– *un degré de préférence*
Cette définition permet une modélisation simple de catégories vagues.
Exemple 8 *On se propose de mesurer l'acuité visuelle (moyenne des deux yeux) des individus d'une certaine localité X.*
Soit A l'ensemble des individus ayant une bonne acuité visuelle. Cet ensemble a un contour mal défini. En effet, il y a des individus dont l'acuité visuelle est égale à 1, 0.8, 0.6 ou toute autre valeur comprise entre 0 et 1.

A.1 Concepts usuels

A.1.1 Coupe de niveau

Un sous ensemble ou coupe de niveau $\alpha \in (0,1]$, noté $\widetilde{A}^{\alpha}$ est l'ensemble :
$\widetilde{A}^{\alpha} = \left\{x \in X / \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\right\}$.
Il contient tous les éléments de X qui sont compatibles avec $\widetilde{A}$ à un niveau au moins égal à α.

A.1.2 Sous ensemble de niveau strict

Un sous ensemble de niveau strict $\alpha \in (0,1]$, noté $\widetilde{A}^{\overline{\alpha}}$ est l'ensemble :
$\widetilde{A}^{\overline{\alpha}} = \left\{x \in X / \mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha\right\}$.

A.1.3 Support de $\widetilde{A}$

Le support de $\widetilde{A}$, noté $supp\widetilde{A}$, c'est l'ensemble des éléments de X qui appartiennent tant soit peu à $\widetilde{A}$ c'est à dire : $supp\widetilde{A} = \left\{x \in X/\mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\right\}$.

A.1.4 Hauteur de $\widetilde{A}$

La hauteur de $\widetilde{A}$, noté $haut\widetilde{A}$, est définie comme suit :
$Haut\widetilde{A} = sup\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), x \in X\right\}$.

A.1.5 Sous ensemble flou normalisé

$\widetilde{A}$ est dit normalisé s'il existe $x \in X$ tel que $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$.

A.1.6 Sous ensemble flou convexe

$\widetilde{A}$ est dit convexe si quelque soient x_1 et x_2 appartenant à un espace metrique X et λ à $[0,1]$ on a :
$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{B}}(x_2))$.
Autrement dit $\widetilde{A}$ est convexe si $\mu_{\widetilde{A}}$ est quasi concave.
Proposition 51 – *$\widetilde{A}$ est convexe si et seulement si $\widetilde{A}^{\alpha}$ est convexe* $\forall\alpha \in]0,1]$.
– *Si $\widetilde{A}$ est convexe et $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alors $\widetilde{A}^{\alpha_2} \subset \widetilde{A}^{\alpha_1}$.*

A.1.7 Opérations ensemblistes

Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux ensembles flous de X, de fonctions d'appartenances $\mu_{\widetilde{A}}$ et $\mu_{\widetilde{B}}$ respectivement. les opérations ensemblistes floues les plus usuelles sont définies comme suit :

- Inclusion :
  $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in X$ on a $\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x)$.
- Egalité :
  $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in X$ on a $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x)$.
- Intersection :
  $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ est le sous ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance est définie par $\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) = min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x))$.
- Réunion :
  $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ est le sous ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance est définie par $\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = max(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x))$.

A.2 Principe d'extension

Définition 28 *Soient $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ n sous ensembles flous de $X_1, X_2, ..., X_n$ respectivement. Le produit cartésien $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n$ est le sous ensemble flou ayant pour fonction d'appartenance :*
$\mu_{\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = min(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n))$.

A.2.1 Principe d'extension

Soit $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \longrightarrow Y$
où :
$X_1, X_2, ..., X_n, Y$ sont des ensembles nets et $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ n sous ensembles flous de $X_1, X_2, ..., X_n$ respectivement.
Le principe d'extension permet d'induire par f et $\widetilde{A}_i, i = 1, 2, ..., n$ le sous ensemble $\widetilde{B}$ de Y caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} supmin(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \oslash \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \oslash. \end{array} \right\}$$

Le principe comme on le voit permet de passer des opérations sur les ensembles vulgaires à des opérations sur les ensembles flous.
C'est sur ce principe que Dubois et Prade [31] ont bâti l'arithmétique floue dont nous allons donner ci-dessous les grandes lignes.

A.2.2 Arithmétique floue

Etant donné une opération $*$ définie sur les nombres réels, on peut l'étendre en $(*)$ aux nombres flous $\widetilde{M}$ et $\widetilde{N}$ de fonctions d'appartenance respectives $\mu_{\widetilde{M}}$ et $\mu_{\widetilde{N}}$.
On obtient le nombre flou suivant $\widetilde{M}(*)\widetilde{N}$ dont la fonction d'appartenance est définie à partir du principe d'extension de la manière suivante :
$\mu_{\widetilde{M}(*)\widetilde{N}}(z) = sup\left\{min(\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y))/x * y = z\right\}$.

Lemme 4 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux ensembles flous d'un même référentiel X. Quelque soit $\alpha(0, 1]$, on a :*
- $(\widetilde{A} + \widetilde{B})^\alpha = \widetilde{A}^\alpha + \widetilde{B}^\alpha$.
- $(\lambda\widetilde{A})^\alpha = \lambda\widetilde{A}^\alpha$.

A.3 Théorème de décomposition de Zadeh

Soit $\widetilde{A}$ un ensemble flou, alors $\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\widetilde{A}^\alpha$ où $\widetilde{A}^\alpha$ représente l' α-coupe de $\widetilde{A}$.

A.4 Intervalle flou

Définition 29 *Un intervalle flou $\widetilde{A}$ est défini par une application $\mu_{\widetilde{A}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ semi-continue supérieurement telle que $\forall z \in [x, y], \mu_{\widetilde{A}}(z) \geq \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y))$, et $\exists x \in \mathbb{R}, \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$.*
L'α-coupe de $\widetilde{A}$ est $\widetilde{A}^\alpha = \{\mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ est donc un intervalle fermé $[\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha]$, et ces intervalles sont emboîtés : $\widetilde{A}^\alpha \subseteq \widetilde{A}^\beta$ si $\alpha \geq \beta$.

A.4.1 Nombre flou

Un intervalle flou $\widetilde{A}$ dont l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}/\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\right\}$ est réduit à un point, est souvent appelé nombre flou.

A.4.2 Intervalle flou de type L-R

Fonctions de références

Définition 30 *Une fonction $L : R \longrightarrow R$ est dite fonction de référence si L vérifie les propriétés suivantes :*
$L(-x) = L(x)$
– $L(0) = 1$
– *L n'est pas croissante sur* $[0, +\infty[$
Exemple 9 – $L(x) = e^{-|x|^p}$
– $max(0, 1 - |x|^p)$

Intervalle flou de type L-R

Un intervalle flou $\widetilde{a}$ est dit de type L-R si sa sa fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{a}}$ est définie par : (see [30])

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } x \in [\underline{a}, \overline{a}], \\ L(\frac{\underline{a}-x}{\delta^a}) & \text{for } x \leq \underline{a}, \\ R(\frac{x-\overline{a}}{\gamma^a}) & \text{for } x \geq \overline{a}. \end{array} \right\}.$$

où L et R sont des fonctions de référence et les nombres réels strictement positifs δ_a et γ_a sont respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.
On note $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R}$.
Si de plus $L(1) = R(1) = 0$ alors $supp\,\widetilde{a}$ est borné.
Soit $FN(L, R)$ l'ensemble des intervalles de type $L - R$.

A.4.3 Opérations sur les intervalles flous de type L-R

Soient $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R}$ et $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b)_{L-R}$

– Addition
$\widetilde{a} \oplus \widetilde{b} = (\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}, \delta^a + \delta^b, \gamma^a + \gamma^b)_{L-R}$
– Multiplication par un scalaire

$$\lambda \odot (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R} = \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda\underline{a}, \lambda\overline{a}, \lambda\delta^a, \lambda\gamma^a)_{L-R} & si\, \lambda > 0 \\ (\lambda\overline{a}, \lambda\underline{a}, -\lambda\gamma^a, -\lambda\delta^a)_{R-L} & si\, \lambda < 0. \end{array} \right\}$$

– Soustraction
$\widetilde{a} \ominus \widetilde{b} = \widetilde{a} \oplus (-\widetilde{b}) = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R} \oplus (-\overline{b}, -\underline{b}, \gamma^b, \delta^b)_{L-R} = (\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}, \delta^a + \gamma^b, \gamma^a + \delta^b)_{L-R}$

Annexe B

Eléments de la théorie des probabilités

B.1 Notions d'espace mesurable

Soit Ω l'espace fondamental, il peut être fini, infini, dénombrable ou non.

B.1.1 Tribus d'évènements

Une famille F de sous ensembles de Ω s'appelle tribu si :
– $\Omega \in F$,
– $\forall A \in F \Longrightarrow \overline{A} \in F$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A,
– $\forall A \in F, \forall B \in F \Longrightarrow A \cup B \in F$,
– quelque soit la suite $(A_n)_{n \in N}$ d'éléments de F, on a $\bigcup_{n \in N} A_n \in F$.

B.1.2 Espace probabilisable

– Le couple (Ω, F) où ensemble fondamental et F tribu s'appelle espace mesurable ou probabilisable.
– Tout élément de F s'appelle évènement.

B.1.3 Espace probabilisé

Soit (Ω, F) un espace probabilisable,
une probabilité P est une application de $F \longrightarrow [0, 1]$ telle que :
– $P(\Omega) = 1$,
– $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
– $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P((A_i)$ où les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints et I dénombrable.
(Ω, F, P) s'appelle espace probabilisé.

B.1.4 Tribu borélienne sur R

La Tribu borélienne B_R est engendrée par les intervalles $]a, b[, \ a, b \in R$.

B.1.5 Applications mesurables

Définition 31 *Soient* (Ω, F) *et* (E, T) *deux espaces probabilisables,*
toute application $X : \Omega \longrightarrow E$ *est dite mesurable si* $\forall A \in T \Longrightarrow X^{-1}(A) \in F$.
Proposition 52 *Si* f *et* g *sont des applications mesurables ;*
Alors les applications suivantes sont mesurables :
- $f + g$
- fg
- $inf(f, g)$
- $sup(f, g)$
- cf *avec* c *constante réelle.*

B.2 Variables aléatoires réelles

Définition 32 *Une variable aléatoire réelle est une application mesurable* X *d'un espace probabilisé* (Ω, F, P) *dans* (R, B_R),
c'est à dire :$\forall B \in B_R \Longrightarrow X^{-1}(B) \in F$.
On peut associer à l'évènement B une probabilité par l'intermédiaire de X telle que $P(X^{-1}(B)) = P_X(B)$.
La probabilité P_X ainsi définie sur (R, B_R) s'appelle loi de probabilité ou distribution de probabilité de la variable aléatoire X.
Remarque 20 *En pratique, une variable aléatoire réelle est une application*

$$X : \Omega \longrightarrow R$$

$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

Dans le cas où :
- X *prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs ,* X *est dite variable aléatoire discrète.*

- X *prend n'importe quelle valeur sur un intervalle de* R *,* X *est dite variable aléatoire continue.*

B.2.1 Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition F de la variable aléatoire X, la fonction définie de $\Omega \longrightarrow [0, 1]$ par $F(t) = P(X \leq t)$.

B.2.2 Densité de probabilité

Soit F une fonction de répartition de la variable aléatoire X.
Si F admet une dérivée f sauf peut être en un nombre fini de points, f s'appelle la densité de la variable aléatoire X.

B.2.3 Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X, le nombre suivant s'il existe :
$E(X) = \int_\Omega (X(\omega) dP(\omega)$ où $\int_\Omega$ désigne l'intégrale de Lesbegues-Stieljeis.

Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même Ω admettant une espérance, alors :
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X), \quad \forall a \in R$
- $E(b) = b \quad \forall b \in R$
- si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

B.2.4 Variance

On appelle variance de la variable aléatoire X,le nombre réel suivant :
$\sigma^2(X) = \int_\Omega (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega) = E(X - E(X))^2$.

Propriétés de la variance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même Ω admettant une espérance mathématique, alors :
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes
- $V(aX) = a^2V(X), \quad \forall a \in R$
- $V(X+b) = V(X) \quad \forall b \in R$
- $V(b) = 0 \quad \forall b \in R$
- si $V(X) = 0 \Longleftrightarrow X = E(X)$

B.2.5 Ecart-type

Soit une variable aléatoire X admettant une variance $V(X)$, on appelle écart-type de X, le réel :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

B.2.6 Covariance

On appelle covariance de deux variables aléatoires X et Y,notée $Cov(X,Y)$, le nombre réel suivant :
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriétés de la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même Ω admettant une espérance, alors :
- $Cov(X,Y) = 0$ si X et Y sont indépendantes
- $V(aX+bY) = a^2V(X) + 2abCov(X,Y) + b^2V(Y)$

B.2.7 Variables aléatoires normales

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ strictement popsitif si elle a admet pour densité de probabilité la fonction $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$.
Une telle variable aléatoire est alors dite gaussienne.
On note $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$.

Remarque 21 *Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ alors X est dite variable aléatoire normale centrée réduite. Donc elle admet pour fonction de densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

B.2.8 Variable aléatoire normale centrée réduite

Fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite, i.e. $X \hookrightarrow N(0,1)$, sa fonction de répartition est définie par $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Propriétés de la fonction ϕ

- ϕ est indéfiniment dérivable, et $\phi^{'} = \varphi$
- Elle est strictement croissante et $lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 1$
- $\forall x \in R, \phi(-x) = 1 - \phi(x)$

Remarque 22 *Si $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma^2} \hookrightarrow N(0,1)$.*

Fractiles d'une variable aléatoire normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite, i.e. $X \hookrightarrow N(0,1)$.
On cherche en fonction d'une valeur α donnée, à déterminer le nombre u_α, appelé fractile, tel que $P(\omega / X(\omega) \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Annexe C

Programmation linéaire multiobjectifs

Considérons le programmation linéaire multiobjectifs suivant :

$$(P_{LMO}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ...m \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

où

On pose $D = \left\{ x_j / \sum_{j=1}^{n} a_{ij})x_j \leq b_i, i = 1, ...m / x_j \geq 0, j = 1, ...n \right\}$. Pour résoudre ce type de problème, il n'existe généralement pas de solution qui optimise les objectifs simultanément. L'amélioration de l'un se fait au détriment de l'autre.

Donc l'idéal c'est de trouver une solution de bon compromis entre les objectifs. C'est à dire qu'il n'existe aucune autre solution admissible qui fournisse des valeurs au moins aussi bonnes sur chaque objectif et meilleur sur au moins l'un d'eux que cette dernière. C'est ce qu'on appelle solution efficace ou pareto optimale définnie comme suit :

C.1 Solution efficace ou Pareto optimale

Définition 33 *$x^* \in D$ est une solution efficace ou pareto optimale pour (P_{LMO}) s'il n'existe pas $x \in D$ tel que $c_ix^* \leq c_ix$, $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ et il n'existe pas au moins un $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tel que $c_jx^* < c_jx$.*

La détermination des solutions efficaces est la méthode la plus générale parmi les méthodes d'optimisation en programmation multiobjectifs.

Pour obtenir les solutions efficaces en utilisant la programmation paramétrique est donné par le théorème suivant :

Théorème 10 *$x^* \in D$ est une solution efficace ou pareto optimale pour (P_{LMO}) si et seulement si x^* est optimale pour le problème suivant :*

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i x_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ...m \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

où λ *donné,*$\lambda \in \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in R^k : 0 < \lambda_i < 1, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$.

C.2 Fonctions scalarisantes

- La somme pondérée :
  $s_1(z, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i$
- la distance pondérée de Tchebychev :
  $s_2(z, \lambda, \overline{z}) == max \{\lambda_i |z_i - \overline{z}_i| / 1 \leq i \leq k\}$.
- la distance pondérée augmentée de Tchebychev :
  $s_3(z, \lambda, \overline{z}) == max \{\lambda_i |z_i - \overline{z}_i| / 1 \leq i \leq k\} + \rho(\sum_{i=1}^{k} |z_i - \overline{z}_i|)$.

C.2.1 Théorèmes de caractérisation des solutions efficaces

Les résultats suivants nous permettent d'établir un lien entre la solution optimale de chacun des programmes mathématiques dont l'objectif est respectivement s_1, s_2, s_3 et la solution efficace de (P_{LMO}) .

Soit $\Lambda = \left\{ \lambda_r / \sum_{r=1}^{k} \lambda_r \, et \, \lambda_r > 0, \, r = 1, 2, ..., k \right\}$.
Théorème 11 *Soit le problème paramétrique :*

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min s_1(z(x), \lambda) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

avec $\lambda \in \Lambda$

- *Si* x *est solution optimale de* $(P_{1)}$, x *est solution efficace.*
- *Si* x *est solution efficace et que* Z_D *est un ensemble convexe, il existe* $\lambda \in \Lambda$ *tel que* x *est solution optimale de* (P_1)*,.*

Théorème 12

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \min s_1(z(x), \lambda, \overline{z}) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

Une solution x est une solution efficace si et seulement si x est solution optimale 'unique' du problème $(P_{2)}$.
Théorème 13

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{l} \min s_1(z(x), \lambda, \overline{z}) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

avec $\lambda \in \Lambda$

- *Si* x *est solution optimale de* $(P_{3)}$, x *est solution efficace.*
- *Si* x *est solution efficace, il existe* $\lambda \in \Lambda$ *et* ρ *une valeur positive suffisamment petite tels que* x *est solution optimale de* (P_3)*,.*

C.3 Les principales méthodes de résolution

Les principales méthodes de résolution sont les méthodes interactives qui sont caractérisées par une alternance de phases de calcul et la discussion avec le décideur qui, à chque fois est invité à apporter une modification sur le ou les objectifs et la méthode "Goal programming" qui est fréquemment utilisée et qui consite à minimiser les écarts entre les k fonctions objectifs et les buts choisies par le décideur.

C.3.1 Les "Goal programming"

La technique consiste à ramener à un programme mathématique à objectif unique qui est construit à partir des écarts entre les valeurs des fonctions objectifs et des valeurs souhaitées (Goals) par le décideur. Pour chacune des k fonctions objectifs $c_1, c_2, ..., c_k$, le décideur choisit un but G_i et une métrique M_i de calcul de l'écart au but qui peut être l'optimum de la fonction c_i, et être calculée par un simplexe si c_i est linéaire. Nous obtenons alors dans ce cas le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \|z - \overline{z}\|_p \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $z = (z_1, z_2, ..., z_k)$ est le vecteur des fonctions objectifs. et $\overline{z}_i = z_i(x^*)$, $i = 1, 2, ..., k$ est la valeur optimale de la fonction objectif z_i.
Par ailleurs, nous avons $\|z - \overline{z}\|_p = \sum_{i=1}^{k} (|z_i - \overline{z}_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $z_i - \overline{z}_i = e_i^+ - e_i^-$ tels que : si $e_i^+ > 0$ alors $e_i^- = 0$ et réciproquement si $e_i^- > 0$ alors $e_i^+ = 0$. d'où

C.4 Programmation linéaire multiobjectifs stochastique

Considérons le programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant :

$$(P_{M.O.S}^1) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ avec $1 \leq r \leq k$, $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$ sont des variables aléatoires de distribution connue.

C.5 Méthode de Katoka

Considérons le programme linéaire stochastique :

$$(P_{L.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max c(\omega)x \\ x \in D = \left\{ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, ..., m \right\} \end{array} \right\}$$

La maximisation de $\alpha-$fractile de la fonction de distribution de l'objectif où α est choisi par le décideur.

$$(P_d^1)_4 \left\{ \begin{array}{l} \max u \\ P(\omega / c(\omega) x \geq u) \geq \alpha \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

Dans le cas gaussien on a :
$P(\omega : c(\omega)x > u) \geq \alpha \Longleftrightarrow P(\omega/c(\omega)x \leq u) \geq 1-\alpha$. et
$P(\omega : c(\omega)x \leq u) = P\left\{\omega : \frac{c(\omega)x - \bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}} \leq \frac{u-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}\right\} = \phi(\frac{u-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}})$
où ϕ est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.
Donc :
$P(\omega : c(\omega)x \geq u) \geq \alpha \Longleftrightarrow \phi(\frac{u-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}) \leq 1-\alpha \Longleftrightarrow u \leq \bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx}$.
par conséquent résoudre le problème $(P_d^1)_4$ revient, dans ce cas gaussien, à résoudre le problème suivant :

$$(P_d^1)'_4 \left\{ \begin{array}{l} \max \bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx} \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

Généralisation de cette méthode à un programma linéaire multi-objectifs stochastique :
Considérons le programme linéaire multiobjectifs stochastique :

$$(P_{M.O.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ sont des variables aléatoires de distribution connue.
Méthode de résolution : cas où les $c_{rj}(\omega)$, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ sont des variables aléatoires normales :

$$(P_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n c_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o, r = 1, 2, ..., k \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i, i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

C.5.1 Programme de risque minimal multiple

Considérons le programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant dont les contraintes sont déterministes.

$$(P_{M.O.S}^2) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires et a_{ij} et b_i sont déterministes.
Posons $D = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i / x_j \geq 0, j = 1, ...n,\ i = 1, 2, ..., m \right\}$.

Dans [58], Stancu-Minasian et Wets ont considéré un cas général de probleme de risque minimal multiple comme suit : la maximisation des probabilités que les valeurs des k objectifs sont au moins égales à des seuils de pérformance u_k, il en résulte le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^2_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(P(\omega : c_1(\omega)x \geq u_1), P(\omega/c_2(\omega)x \geq u_2), ..., P(\omega/c_k(\omega)x \geq u_k)) \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

$(P^2_{M.O.D})$ est appelé problème à rique minimal multiple à niveaux $u_1, u_2, ..., u_k$.

Supposons que chaque vecteur aléatoire $c_r(\omega)$ est gaussien avec l'espérance mathématique $\overline{c}_r$ et la matrice de covariance V_r.
Les solutions de bon compromis de $(P^2_{M.O.D})$ peuvent être obtenues en considérant le problème suivant : [17]

$$(P^2_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(\omega/c_i(\omega)x \geq u_i) \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

ou maximiser la probabilité jointe [40] comme suit :

$$(P^2_{M.O.D})"' \left\{ \begin{array}{l} \max P\left\{\omega : c_1(\omega)x \geq u_1, c_2(\omega)x \geq u_2, ..., c_k(\omega)x \geq u_k\right\} \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

Pour la résolution du problème $(P^2_{M.O.D})$, Stancu-Minasian a proposé la méthode suivante : résolvons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max P(\omega : c_1(\omega)x \geq u_1) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

Soit p_1 sa valeur optimamle. On résout ensuite le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max P(\omega : c_2(\omega)x \geq u_2) \\ \\ P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1 \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

où ϵ_1 est donné et $P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1$ a pour équivalent déterministe, la contrainte $\overline{c}_1 x + \phi^{-1}(1 - p_1 + \epsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq u_1$

ainsi de suite...

$$\left\{\begin{array}{l} \max P(\omega : c_k(\omega)x \geq u_k) \\ \\ P(\omega : c_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1 \\ \\ \vdots \\ P(\omega : c_{k-1}(\omega)x \geq u_{k-1}) \geq p_{k-1} - \epsilon_{k-1} \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

qui a pour équivalent déterministe le programme suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \max \frac{\bar{c}_k x - u_k}{x^t V_k x} \\ \\ \bar{c}_1 x + \phi^{-1}(1 - p_1 + \epsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq u_1 \\ \\ \vdots \\ \bar{c}_{k-1} x + \phi^{-1}(1 - p_{k-1} + \epsilon_{k-1})\sqrt{x^t V_{k-1} x} \geq u_{k-1} \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

Bibliographie

[1] F. Aïche, sur l'optimisation floue stochastique,*Thèse de Magistère, Université de Tizi-ouzou* (1995).

[2] F. Aïche and D. Dubois. Une extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues du type L-R. LFA 2009, Annecy, Cépaduès Editions, p. 91-98, 2009.

[3] F. Aïche and D. Dubois. An extension of stochastic dominance to fuzzy random variables. International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU 2010), Dortmund (Germany), Springer, LNAI 6178, p. 159-168, 2010.

[4] F. Aïche and D. Dubois. Comparaison d'intervalles flous aléatoires. LFA 2010, Lannion, Cépaduès, p. 219-226, 2010.

[5] F. Aïche and D. Dubois. Possibility and Gradual Number Approaches to ranking methods for random fuzzy intervals. International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU 2012), Catania (Italy), Springer, CCIS 299, p. 9-18, 2012.

[6] F. Aïche and D. Dubois. Une extension de la préférence statistique aux variables aléatoires floues. LFA 2012, Compiègne, Cépaduès Editions, p. 159-166, 2012.

[7] F. Aïche, M. Abbas and D. Dubois, Chance Constrained Programming with fuzzy stochastic coefficients, *Fuzzy optimization and decision making, Springer* DOI 10.1007/s 10700-012-9151-8. 2012

[8] E.E. Ammar, On fuzzy random multiobjective quadratic programming, *European Journal of operational research* 193 (2009) 329-341.

[9] R. Bellman and L.A Zadeh. Decision making in fuzzy environment, *Management Sci.* 17 (1970) 14-164.

[10] Chakraborty, D. & Rao, K.R. & Tiwari, R.N. (1994) Interactive decision making in mixed (fuzzy and stochastic) environment,*European Journal of Operational Research* 31, 89-107.

[11] L. Campos, Aa; Munoz, A subjective approach for ranking fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 145-153.

[12] S. Chanas, M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Villa,Ranking fuzzy interval numbers in the setting of random sets. *Information Sciences* 69, 201-217, 1993.

[13] S. Chanas, M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Villa,Ranking fuzzy interval numbers in the setting of random sets. *Information Sciences* 69, 201-217, 1993.

[14] S, Chanas, P.Zielinski, Ranking fuzzy interval numbers in the setting of random sets-further results. *Information Sciences*, 117, 191-200, 1999.

[15] S. Chanas and M. Nowakowski, Single value simulation of fuzzy variable. *Fuzzy Sets and Systems* 25 (1999) 43-57.

[16] A. Charnes and W.W. Coper,Chance constrained programming, *Management sci.* 6 (1959) 73-79.

[17] A. Charnes and A.C Stedry, Search-Theoritic models of organization cotrol by budget multiple goals, *Managment Sciences* 12 (5) (1966) 467-481.

[18] A. Chateauneuf, M. Cohen, J.-M. Tallon, Décision dans le risque. In : *Concepts et Méthodes pour l'aide à la décision*, Vol. 2, Chap.1 Hermes, Paris, 2006.

[19] B. Contini, A stochastic approach to goal programming, *Oper.Res.* 16 (3) (1968) 492-498.

[20] I. Couso, D.Dubois, On the variability of the concept of variances for fuzzy random variables, I.E.E.E Trans. *On fuzzy systems* 17 (2009) 1070-1080.

[21] B.De Baets, H. De Meyer, On the cycle-transitive comparison of artificially coupled random variables, *International Journal of approximate reasoning* 47 (2008) 306-322.

[22] I. Couso and D.Dubois, Imprecise Probability Approach to joint Extensions of Stochastic and Interval Orderings. International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU 2012), Catania (Italy), Springer, CCIS 299, p. 388-399, 2012.

[23] G.B. Dantzig, Linear programming nder uncertaity, *Management Sciences* 1 (1955) 3-4.

[24] T. Denoeux, Extending stochastic ordering to belief functions on the real line, *Information Sciences* 179 (2009) 1362-1376.

[25] D. Dubois, Linear programming with fuzzy data, in J.C. Bezdek, Ed. *Analysis of fuzzy information volume III, Application in Engineering and Sciences*, (C.R.C Press) 241-263.

[26] D. Dubois, Possibility theory and Statistical reasoning *Comput. Stat. Data Anal.*51 : 47-69, 2006.

[27] D. Dubois The role of fuzzy sets in decision sciences : Old techniques and new directions. Fuzzy Sets and Systems 184(1) : 3-28 (2011)

[28] D.Dubois, H.Prade, Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science* 30. (1978) 613-626.

[29] D.Dubois, H.Prade, The mean value of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 24. (1987) 279-300.

[30] D. Dubois and H. Prade, *possibility theory* (Plenum, New York 1988).

[31] D. Dubois and H. Prade, fuzzy numbers an overview, in J.C. Bezdek, Ed. *Analysis of fuzzy information 2* (C.R.C, Boca Raton, 1988) 3-39.

[32] D. Dubois and H. Prade, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory,*Information Sciences*30 (1983) 183-225.

[33] P. Fishburn, *Interval Orderings*, Willey, New-York ? 1987.

[34] J. Fortin, D.Dubois, H. Fargier. Gradual Numbers and Their Application to Fuzzy Interval Analysis, *IEEE trans. Fuzzy Systems, 16* (2008) 388-402.

[35] P. Fortemps, M. Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation, *Fuzzy Sets and Systems*82 (1996) 319-330.

[36] E.L. Hannan, Linear programming with multiple fuzzy goals, *Fuzzy Sets and Systems*6 (1981) 235-248.

[37] K. Hirota, Concepts of probabilistic sets, *IEEE Conf. on decision and control* (1977) 1361-1366.

[38] M.G. Iskander, A suggested approach for possibility and necessity dominance indices in stochastic fuzzy linear programming,*Applied Mathematic Letters* 18 (2005) 395-399.

[39] D. Kall, Stochastic linear programming. *Spring Verlag Berlin Heidelberg*, New York (1978) 79-92.

[40] R. Kaplan and J. Soden, On the objective function for the sequentiel P-model of Chance constrained programming,*Oper.Res.* 19 (1),(1971) 106-114.

[41] Katoka, S. On stochastic programming II.A preliminary study of stochastic programming model, Hitotsubashi *J. Arts. Sci.* 2 (1962) 36-44.

[42] H. Katagiri, M. Sakawa, K. Kato, I. Nishizaki, Interactive multiobjective fuzzy random linear programming : Maximization of possibilkity and probability, *European Journal of operational research* 188 (2008) 330-339.

[43] H. Kruse and Meyer, Statistics with vague data, *D. Riedel Publishing Company*, 1987.

[44] H. Kwakernaak, Fuzzy random variables I,II,*information sciences* (1979).

[45] Leclerq, J.P, Stochastic programming and interactive multicriteria approach, *European Journal of operational research* 188 (2008) 330-339.

[46] J. Li, J. Xu, M. Gen, A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients, *Mathematical and Computer Modelling* 44 (2006) 1097-1113.

[47] T. Liou, J. Wang, Ranking fuzzy numbers with integral value, *Fuzzy Sets and Systems* (1992) 247-255.

[48] M.K. Luhandjula, Fuzziness and randomness in an optimization framework, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (2004) 187-203.

[49] Luhandjula, M.K, Optimization under hybrid uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (2004) 187-203.

[50] Puri and Ralescu,Fuzzy random variables. *J. Math. and Appl.* 1114 (1986) 409-420.

[51] Qiao, Z. & Wang, W. (1993) On solution and distribution problem of the linear programming with fuzzy rando variable coefficients,*Fuzzy Sets and Systems* 58, 155-170.

[52] Qiao, Z.& Zhang, Y. & Wang, W. (1994) On fuzzy random linear programming,*Fuzzy Sets and Systems* 65, 31649.

[53] M. Sakawa, Fuzzy Sets and Interactive multiobjective optimization, *Plenum Press, New York*,1993.

[54] M. Sakawa, H. Yano, Interactive decision making for multiobjective programming problems with fuzzy parameters.in Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama (eds), Towards interactive and Intelligent Decision Support System, Vol.2, Proceedings, Kyoto, Japan, *Spring Verlag*, (1987), 338-347.

[55] M. Sakawa, H. Yano, Interactive fuzzy satisfied method for multiobjective linear fractional programming problems with fuzzy parameters, in Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama (eds), Towards interactive and Intelligent Decision Support System, Vol.2, Proceedings, Kyoto, Japan, *Spring Verlag*, (1987), 338-347.

[56] Shapiro, A.F, Fuzzy random variables, *Insurance : Mathematics and Economics* 2008, doi :10.1016 : j.insmatheco. 2008.O5.008.

[57] P. Smets. Belief functions on real numbers. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 40 :181-223, 2005.

[58] Stancu-Minasian, I.M. and Wets, M.J. (1976) A research bibliography in stochastic programming, *Oper.Res.* 24 (6), 1078-1119.

[59] Tanaka, H.and Assi, K. Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 13 (1984) 1-10.

[60] X. Wang, E.E. Kerre, Reasonable properties for ordering of fuzzy quantities, *Fuzzy Sets and Systems* 118 : 375-406, 2001.

[61] W. Wang, Z. Qiao, Linear programming with fuzzy random variables coefficients,*Fuzzy Sets and Systems* 57 (1993) 295-311.

[62] R.R Yager, Ranking fuzzy subsets over the unit interval, *Proc. CDC* (1978).

[63] R.R Yager, On choosing between fuzzy subsets, Kyberntes 9 (1980) 151-154.

[64] R.R Yager, Criteria for evaluatuing fuzzy ranking methods of the unit interval, *Information Sciences* 24 (1993) 139-157.

[65] Yazini, A.V.(1987) Fuzzy and stochastic programming, *Fuzzy Sets and Systems* 22, 171-188.

[66] L. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28.

[67] H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978)45-55.

TABLE DES MATIERES