



Unione Europea



Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca



Università degli Studi di Salerno

UNIVERSITE
PAUL
SABATIER



TOULOUSE III

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Meccanica
VI Ciclo N.S. (2004-2007)

Ecole Doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Procédés
Spécialité : Dynamique des fluides

“Il vortice a superficie libera in quanto instabilità”
“Le tourbillon à surface libre en tant qu’instabilité”
(sintesi/résumé)

Ing. Valerio Francesco De Felice

Tutors:

Ch.mo Prof. Paolo Luchini

Co-Tutors:

Dott. Flavio Giannetti

Ch.mo Prof. François Charru

Dott. David Fabre

Coordinatore:

Prof. Vincenzo Sergi

Indice

Sommario	5
Introduzione	7
Capitolo 1: Vortice assialsimmetrico	11
Capitolo 2: Stabilità del Vortice assialsimmetrico	17
Capitolo 3: Vortice non assialsimmetrico	21
Capitolo 4: Stabilità del vortice non assialsimmetrico	27
Capitolo 5: Esperimento	31
Conclusioni	39
Bibliografia	81

Index

Sommaire	41
Introduction	43
Chapitre 1: Vortex axi-symétrique	47
Chapitre 2: Vortex axi-symétrique (stabilité)	53
Chapitre 3: Vortex non axi-symétrique	57
Chapitre 4: Vortex non axi-symétrique (stabilité)	65
Chapitre 5: Expérience	69
Conclusions	77
Bibliographie	81

Sommario

La genesi spontanea di vortici a superficie libera rappresenta un fenomeno fluidodinamico classico di cui le cause, ad oggi, non sono, completamente chiare.

Gli studiosi per lungo tempo hanno supposto che il moto di rotazione fosse dovuto ad una graduale concentrazione di vorticità, proveniente dal flusso a monte, che attraverso un meccanismo di convezione era accumulata sull'asse del vortice in formazione [Andrade, 1963].

Una seconda ipotesi individua in un'instabilità fluidodinamica la formazione di un vortice; questa possibilità è stata analizzata in un lavoro sperimentale di Kawakubo ed al. (1978) e in alcune simulazioni numeriche condotte da Sanmiguel-Royas e Fernandez-Feria nel limite di flusso assialsimmetrico.

Nel lavoro qui presentato si mostra come introducendo condizioni di ingresso non uniformi al crescere del numero di Reynolds vi è un'instabilità che innesca un moto di rotazione netta nel vortice.

Nella prima parte del lavoro si è compiuta una analisi di stabilità lineare su un flusso ad ingresso assialsimmetrico per passare ispirandosi alla geometria dell'esperimento giapponese ad analizzare un flusso con condizioni di ingresso non uniformi in direzione azimutale con lo scopo di calcolare l'autovalore (e l'auto funzione associata) meno stabile del sistema e di calcolare il numero di Reynolds al quale, eventualmente, il flusso diventa instabile.

Nella seconda parte è descritto il lavoro sperimentale condotto presso l'IMFT che ha permesso di confrontare, per la prima volta, i risultati delle simulazioni e quelli sperimentali su geometrie paragonabili.

I risultati sperimentali concordano con quelli numerici nell'avvalorare la tesi che i mulinelli possano essere generati da fenomeni di instabilità.

Parole chiave: meccanica dei fluidi, vortici, stabilità lineare

Introduzione

In questo lavoro si studia la genesi spontanea di vortici a superficie libera che si presenta come un fenomeno fluidodinamico classico di cui le cause, ad oggi, non sono completamente chiare e che costituisce un aspetto di grande interesse in innumerevoli applicazioni ingegneristiche.

Il fenomeno presenta difatti molteplici risvolti in campo tecnico: la formazione di mulinelli può, infatti, comportare in talune condizioni il risucchio di aria all'interno delle condotte che conducono alle turbine dei bacini idroelettrici, così come l'ingresso della stessa nei condotti di alimentazione di pompe e turbine idrauliche in genere, provocando vibrazioni, diminuzione di rendimento, severa usura e quindi ingenti costi di manutenzione.

Di fondamentale importanza risultano quindi i legami esistenti fra intensità, forma e profondità del vortice in relazione alla portata che permettono la progettazione adeguata di questi apparati.

L'analisi bibliografica degli studi condotti mostra come il fenomeno in realtà sia stato nel corso dell'ultimo secolo oggetto di ricerca di fisici e matematici che a partire dal semplice modello di Rankine hanno proposto modelli sempre più accurati senza tuttavia giungere ad una descrizione quantitativa del fenomeno soddisfacente.

In particolare le cause che portano alla nascita e al successivo sviluppo dei mulinelli non sono ad oggi univocamente determinate.

Una prima ipotesi attribuisce la causa del moto di rotazione ad un accumulo di vorticità, proveniente dal flusso esterno, lungo l'asse del vortice mentre altri citano erroneamente l'effetto di Coriolis la causa principale della loro comparsa.

In pochissimi altri lavori è stato invece attribuito ad un'instabilità fluidodinamica la comparsa del moto di rotazione; quest'ultima teoria, frutto essenzialmente di attività sperimentale, è stata presentata per la prima volta dal

gruppo di ricerca del prof. Kawakubo nel 1978 mentre solo recentemente si sono svolte, a cura di studiosi spagnoli dell'università di Malaga, alcune simulazioni numeriche per stabilire se il vortice possa essere frutto di un'instabilità. Lo studio delle instabilità fluidodinamiche rappresenta un campo di notevole interesse nella pratica ingegneristica e costituisce un importante oggetto di studio da parte del gruppo di meccanica dei fluidi dell'Università di Salerno.

Obiettivo di questo lavoro è determinare se la genesi di un vortice a superficie libera sia legato a fenomeni di instabilità del flusso.

Analisi di stabilità sia in condizioni di assialsimmetria che in condizioni di ingresso più generali sono quindi condotte sul flusso in una geometria cilindrica e l'indagine è poi conclusa attraverso un esperimento condotto con il duplice obiettivo di poter osservare in un modello in scala le caratteristiche di questo tipo di flusso e poter confrontare e validare i risultati ottenuti con le simulazioni numeriche.

La tesi si articola perciò in sei sezioni:

- nel capitolo introduttivo si descrive in dettaglio il fenomeno dell'insorgenza di vortici nelle centrali idroelettriche e si mostrano alcune tecniche comunemente utilizzate nell'ingegneria idraulica per prevenirne o controllarne l'evoluzione.

Si prendono quindi in esame attraverso un'analisi bibliografica le ipotesi sulle possibili cause che portano alla formazione dei vortici.

- nel primo capitolo si sviluppa un modello analitico per la descrizione, attraverso le equazioni di Navier-Stokes, di un vortice a superficie libera assialsimmetrico e in particolare è sviluppata in dettaglio la fase di modellazione della superficie libera e della sua linearizzazione che costituisce una complicazione ulteriore in questa tipologia di flussi.

La soluzione è ottenuta numericamente e i risultati più significativi sono quindi riportati e discussi.

-nella seconda sezione si linearizzano le equazioni di Navier-Stokes intorno alla soluzione assialsimmetrica precedentemente calcolata e si conduce, sempre ricorrendo a soluzione numerica del sistema di equazioni, un'analisi di stabilità lineare del flusso base al crescere del numero di Reynolds.

- nel terzo capitolo sulla base dei risultati ottenuti dall'esperimento di Kawakubo si abbandona l'ipotesi di assialsimmetria e si passa a descrivere un flusso con condizioni d'ingresso più generali.

La soluzione è ottenuta per via numerica ricorrendo ad uno schema ibrido alle differenze finite e spettrale

- nella quarta sezione si analizza la stabilità lineare del flusso tridimensionale ottenuto nel capitolo terzo al fine di determinare, al crescere del numero di Reynolds, se il sistema lineare presenti autovalori a parte reale positiva e quindi instabilità.

Nel quinto ed ultimo capitolo è descritto l'apparato sperimentale sviluppato dal candidato presso l'Istituto di meccanica dei fluidi di Tolosa (IMFT) e i risultati ottenuti dalle prove sperimentali sono confrontati, per geometrie corrispondenti, con quelli numerici.

La tesi si chiude quindi con le conclusioni in cui sono riassunti e commentati i principali risultati ottenuti numericamente e sperimentalmente.

Capitolo 1

Vortice assialsimmetrico

In questo primo capitolo si descrive il caso di un flusso con ingresso puramente radiale nell'ipotesi di assialsimmetria.

Si considera perciò un fluido Newtoniano in un contenitore cilindrico aperto di lunghezza H e raggio R (Figura 1.1).

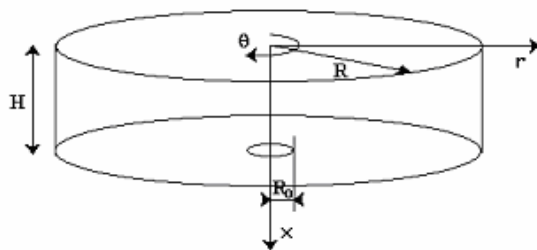


Figura 1.1: dominio computazionale

Il flusso all'interno del recipiente è descritto dalle equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche ed in variabili primitive dove le componenti di velocità in direzione assiale (x), radiale (r), and azimutale (θ) sono rispettivamente indicate con u , v , e w .

Il fluido entra con distribuzione radiale costante (Figura 1.2) e fuoriesce dal contenitore attraverso il piccolo foro di raggio, R_0 , (Figura 1.1).

Il fondo del recipiente è costituito da un contorno solido mentre sulla sommità vi è la superficie libera.

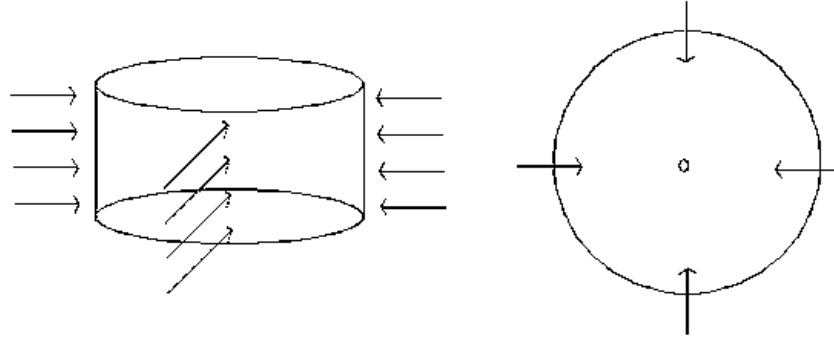


Fig.1.2 Rappresentazione del flusso radiale in ingresso nel dominio dalla superficie laterale del cilindro.

Le equazioni che governano il fluido sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{r\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{w^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dove il numero di Reynolds è definito come $Re=UR/\nu$, dove U indica la velocità media d'ingresso e ν la viscosità cinematica. Il numero di Reynolds può altresì essere espresso attraverso la portata volumetrica Q come segue: $Re=Q/2\pi\nu H$.

Le condizioni al contorno sulla superficie libera $f=f(t,r)$ supponendo che il secondo mezzo sia il vuoto:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} = u \quad (1.2)$$

$$F_x = p + \frac{f}{Fr^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = 0 \quad (1.3)$$

$$F_r = - \left(p + \frac{f}{Fr^2} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = 0 \quad (1.4)$$

$$F_\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right) = 0 \quad (1.5)$$

dove F_x , F_r , and F_θ sono gli sforzi sulla superficie libera e $Fr = U / (\rho R)^{0.5}$ indica il numero di Froude.

L'equazione (1.2) rappresenta la condizione cinematica e fornisce l'informazione che la velocità è tangente, punto per punto, alla superficie libera mentre le equazioni (1.3), (1.4), and (1.5) indicano che in presenza di vuoto all'interfaccia gli sforzi sono nulli su essa.

Sul fondo sono imposte invece le seguenti condizioni al contorno:

$$u = v = w = 0 \quad x = H \quad r \in [R_0, R] \quad (1.6)$$

mentre sul foro d'uscita:

$$p = \text{const} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = H, \quad r \in [R_0, R] \quad (1.7)$$

Quando la depressione della superficie libera è piccola le condizioni al contorno precedentemente derivate possono essere semplificate per piccoli valori del numero di Froude $Fr^2 \ll 1$ è possibile uno sviluppo asintotico in funzione del parametro piccolo $\varepsilon = Fr^2$ come segue:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \dots \\ \underline{v} &= \underline{v}_0 + \varepsilon \underline{v}_1 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

E sostituendo le (1.8) nelle equazioni di Navier-Stokes all'ordine zero dell'espansione si ottiene

$$f_0 = 0; \quad u_0 = 0; \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \quad (1.9)$$

La forma della superficie libera al 1° ordine è calcolata in funzione della soluzione all'ordine zero $f_1 = f_1(f_0, v_0, p_0)$.

Le equazioni all'ordine zero sono formalmente uguali alle (1.1) e sono risolte sul dominio cilindrico della Figura 1 con le condizioni al contorno modificate sulla superficie libera (1.9) scritte su $r \in [0..R]$ e $x=0$.

Le equazioni sono risolte numericamente mediante un metodo alle differenze finite su griglia non uniforme.

Si riportano quindi risultati ottenuti per il caso in cui $Re=30$ e per $H=0.5$, $R=1$ and $R_0=0.1$, mostrando dapprima le linee di corrente nel piano $r-x$ ottenute e la forma della superficie libera linearizzata passando quindi una mappa cromatica delle componenti di velocità.

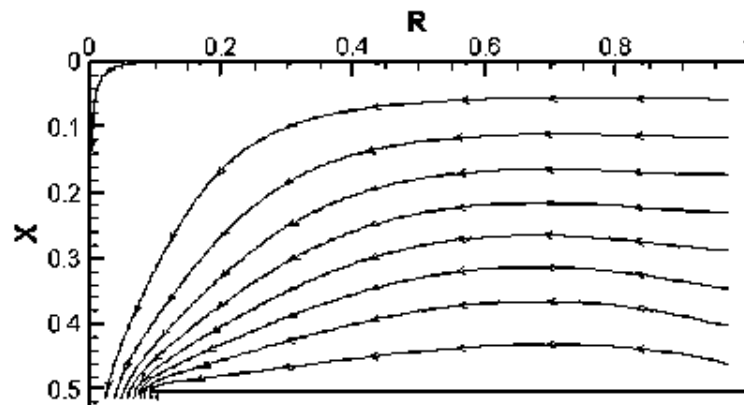


Fig.1.3 Linee di corrente nel piano x-r

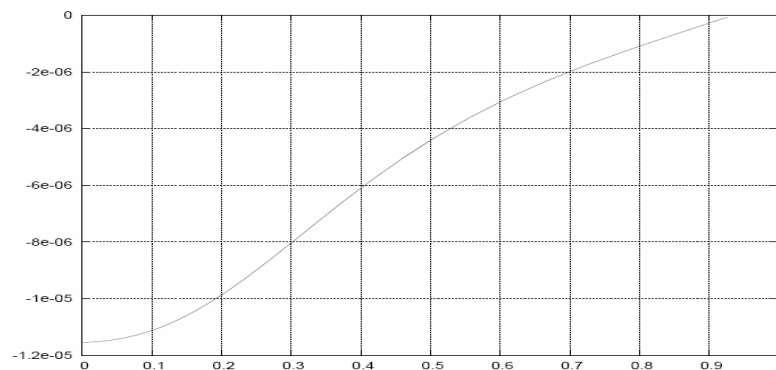
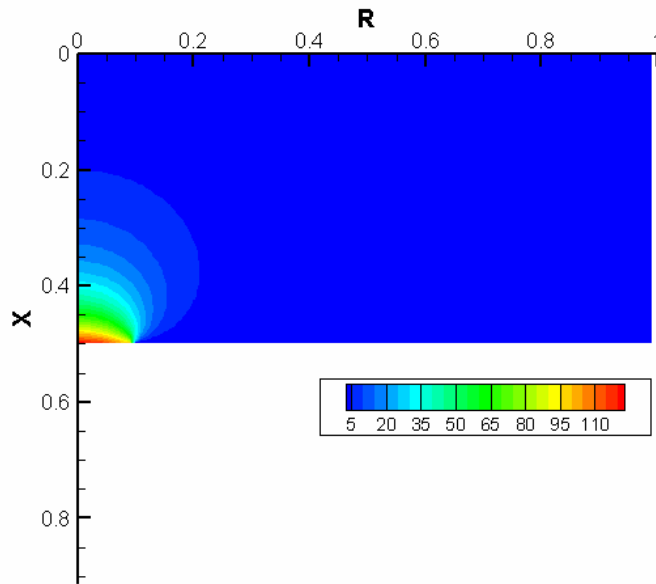
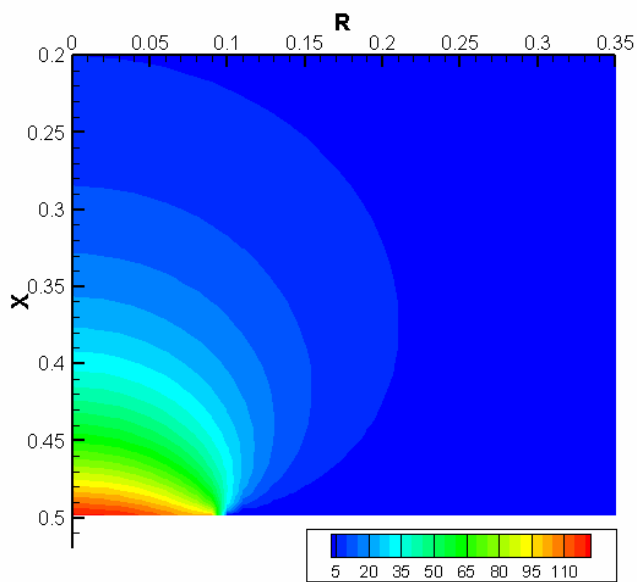
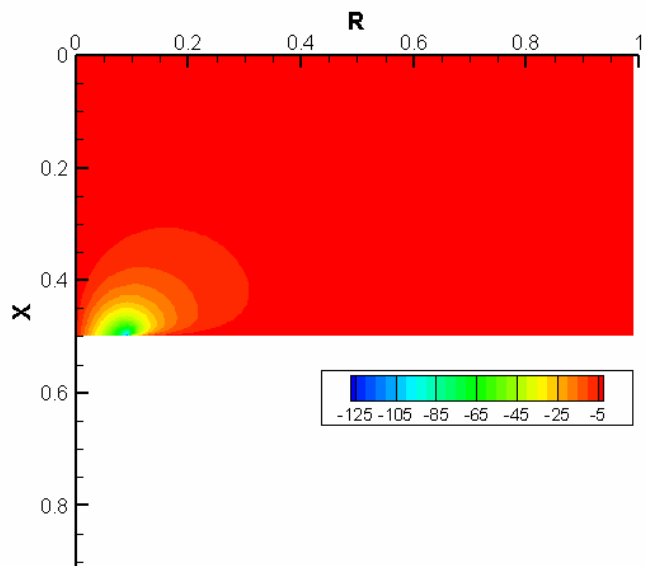
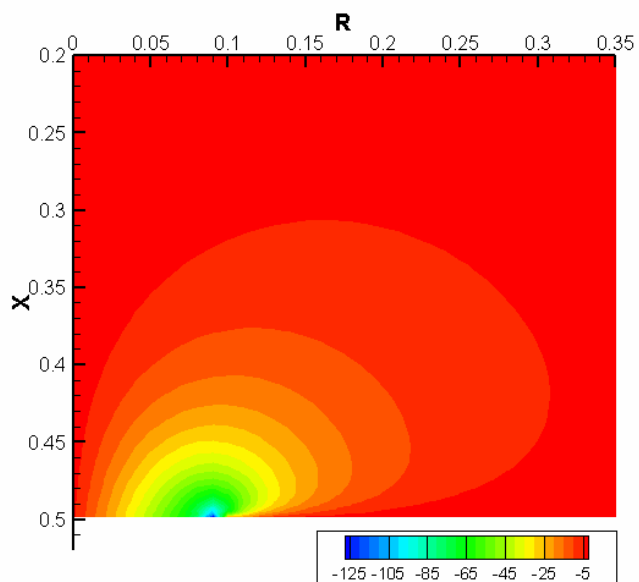


Fig.1.4 Superficie libera linearizzata

Fig.1.5 Campo di velocità assiale U Fig.1.6 Campo di velocità assiale U (particolare)

Fig.1.7 Campo di velocità assiale V Fig.1.8 Campo di velocità assiale V (particolare)

Capitolo 2

Stabilità del vortice assialsimmetrico

Nel secondo capitolo si è studiata la possibile esistenza di un'instabilità nel flusso assialsimmetrico descritto nel primo capitolo ricorrendo ad un'analisi di stabilità lineare.

Le equazioni di Navier-Stokes tridimensionali ed instazionarie sono quindi linearizzate intorno al flusso base stazionario precedentemente calcolato.

I campi di velocità e di pressione possono essere quindi decomposti come somma di una parte stazionaria (flusso base) e di una piccola perturbazione

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, r, \theta, t) &= \underline{v}(x, r, \theta) + \underline{v}'(x, r, \theta, t) \\ \tilde{p}(x, r, \theta, t) &= p(x, r, \theta) + p'(x, r, \theta, t)\end{aligned}$$

Se la decomposizione è introdotta nelle (1.1) dopo aver sottratto il flusso base e aver trascurato, nell'ipotesi di piccole perturbazioni, i termini di ordine superiore si ottiene:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial(rv')}{r\partial r} + \frac{\partial w'}{r\partial \theta} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + 2\frac{\partial(uu')}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru'v)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u'w)}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial x} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{r^2 \partial^2 \theta} \right)\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial(uv')}{\partial x} + \frac{\partial(u'v)}{\partial x} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial(rv'v')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(vw')}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv')}{\partial r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial v'}{r^2 \partial^2 \theta} - 2\frac{\partial w'}{r^2 \partial \theta} \right)\end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial(uw')}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{vw'}{r} = \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial w'}{r^2 \partial^2 \theta} + 2 \frac{\partial v'}{r^2 \partial \theta} \right) \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Il sistema di PDE corredato dalle condizioni omogenee al contorno appropriate è quindi risolto ricorrendo ad un metodo ibrido alle differenze finite e spettrale; le equazioni sono prima decomposte attraverso una serie di Fourier nella coordinata θ :

$$f(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(x, r, t) e^{im\theta}$$

e poi discretizzate mediante differenze finite del secondo ordine nel piano x - r

La soluzione è ottenuta per ogni modo azimutale mediante il metodo di correzione della pressione similmente a quanto avveniva per il flusso base nel primo capitolo.

Al fine di valutare le proprietà di stabilità del sistema la soluzione delle equazioni linearizzate è esprimibile attraverso la somma di modi ortonormali del tipo:

$$v'(x, r, \theta, t) = v'(x, r, \theta) \exp(\lambda t), \text{ dove } \lambda \text{ è un autovalore che può essere sia complesso che reale e } v'(x, r, \theta) \text{ è l'autofunzione ad esso associata.}$$

La parte reale ed immaginaria di λ denotano rispettivamente il tasso di crescita e la frequenza del disturbo; se la parte reale è negativa la perturbazione decade mentre se risulta positiva la perturbazione cresce e il flusso è instabile.

Utilizzando una variante del metodo delle potenze si è calcolato per i diversi modi azimutali, si ricorda tra di loro ortonormali, l'autovalore meno stabile e la autofunzione ad esso associata.

Uno studio parametrico è condotto al fine di determinare se al crescere del numero di Reynolds il flusso diviene instabile.

La figura 2.1 mostra la variazione della parte reale dell'autovalore meno stabile per i primi cinque modi azimutali.

Nel campo di numeri di Reynolds scelto è facile osservare come gli autovalori siano negativi e la tendenza mostra una stabilità asintotica (per $Re \rightarrow \infty$) dei modi.

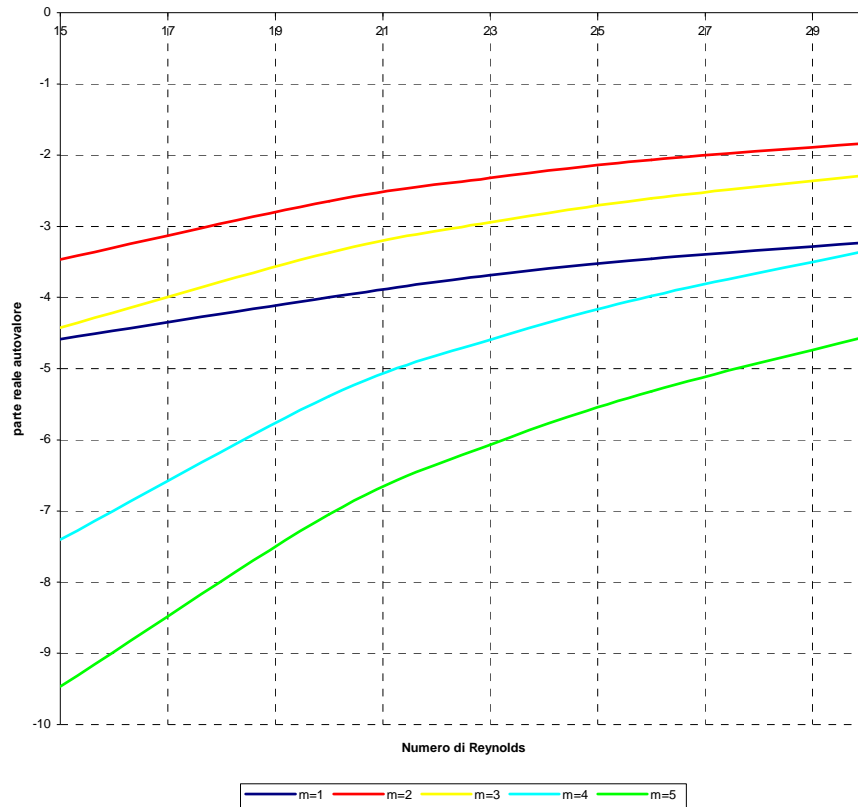


Fig 2.1 Autovalori meno stabili per diversi modi azimutali

Capitolo 3

Vortice non assialsimmetrico

In questo terzo capitolo si è superato il limite di flusso assialsimmetrico e, riprendendo alcuni aspetti della geometria dell'esperimento di Kawakubo, in cui la distribuzione radiale del fluido in ingresso non è più costante bensì varia conservando due piani di simmetria (Figura 3.2) si è derivato e risolto un flusso di forma più generale che sarà poi oggetto di un'analisi di stabilità nel capitolo successivo al fine di stabilire l'influenza che le condizioni d'ingresso ricoprono nell'insorgenza di un'instabilità e di un moto di rotazione nel fluido.

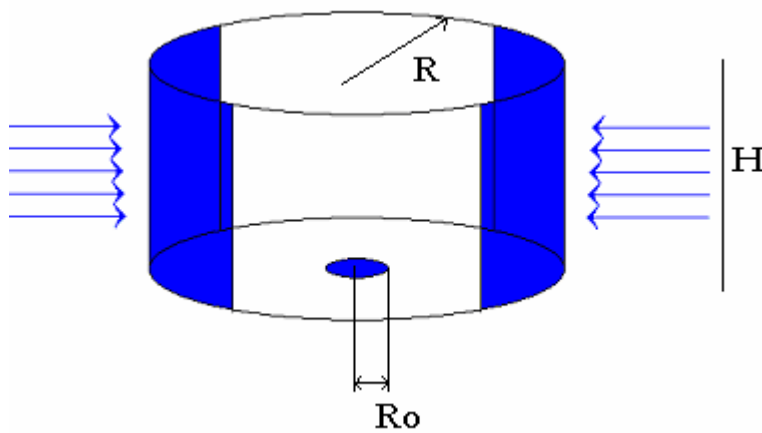


Figura 3.1: dominio computazionale

Il flusso all'interno del recipiente è descritto dalle equazioni di Navier-Stokes complete in coordinate cilindriche ed in variabili primitive dove le

componenti di velocità in direzione assiale(x), radiale (r), and azimutale (θ) sono rispettivamente indicate con u, v , e w .

Il fluido entra con distribuzione radiale variabile in direzione azimutale secondo il profilo mostrato nella figura (Figura 3.2) e fuoriesce dal contenitore attraverso il piccolo foro di raggio, R_0 , (Figura 3.1).

Il fondo del recipiente è costituito da un contorno solido mentre sulla sommità vi è la superficie è libera.

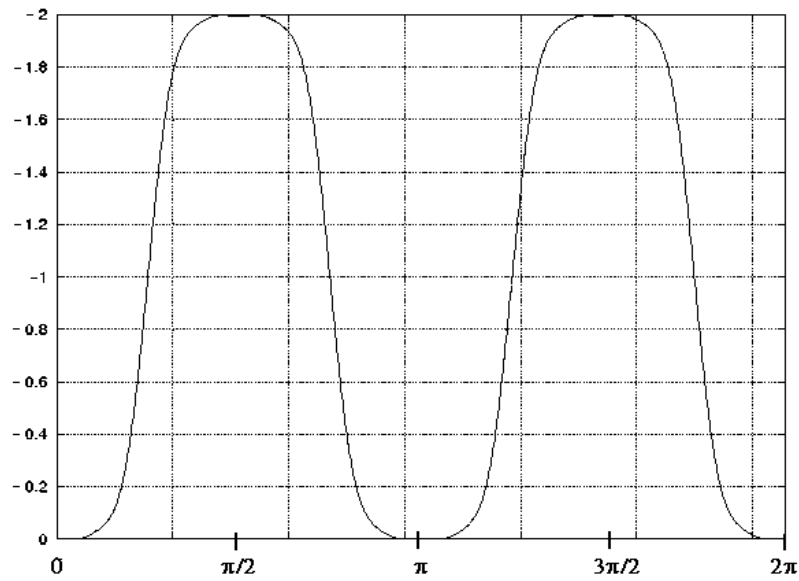


Fig.3.2 Rappresentazione del flusso radiale in ingresso nel dominio dalla superficie laterale del cilindro.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{r\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\
 & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(uw)}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(vw)}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv w)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w^2)}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dove il numero di Reynolds è definito come $Re=UR/\nu$, dove U indica la velocità media d'ingresso e ν la viscosità cinematica. Il numero di Reynolds può altresì essere espresso attraverso la portata volumetrica Q come segue: $Re=Q/2\pi\nu H$.

Le condizioni al contorno sulla superficie libera $f=f(t,r,\theta)$ supponendo che il secondo mezzo sia il vuoto:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + w \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = u \quad (3.2)$$

$$F_x = p + \frac{f}{Fr^2} + \frac{1}{Re} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right) = 0 \quad (3.3)$$

$$F_r = - \left(p + \frac{f}{Fr^2} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(2 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right) \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$F_\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(2 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2 \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (3.5)$$

dove F_x , F_r , and F_θ sono ancora una volta gli sforzi sulla superficie libera e $Fr=U/(gR)^{0.5}$ indica il numero di Froude.

Sul fondo sono imposte invece le seguenti condizioni al contorno:

$$u = v = w = 0 \quad x = H \quad r \in [R_0, R] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.6)$$

mentre sul foro d'uscita:

$$p = const = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = H, \quad r \in [R_0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.7)$$

Similmente a quanto accadeva per il flusso assiasimmetrico per Froude $Fr^2 \ll 1$ è possibile uno sviluppo asintotico in funzione del parametro piccolo $\varepsilon = Fr^2$ della soluzione come segue:

$$\begin{aligned}
 f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \dots \\
 \underline{v} &= \underline{v}_0 + \varepsilon \underline{v}_1 + \dots \\
 p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

E sostituendo le (1.8) nelle equazioni di Navier-Stokes all'ordine zero dell'espansione si ottiene dopo alcuni passaggi

$$f_0 = 0; u_0 = 0; \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0; \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \tag{3.9}$$

Le equazioni all'ordine zero sono formalmente uguali alle (3.1) e sono risolte sul dominio cilindrico della Figura 1 con le condizioni al contorno modificate sulla superficie libera (3.9) scritte su $r \in [0..R]$, $\theta \in [0..2\pi]$, and $x=0$

Le equazioni sono risolte numericamente mediante un metodo ibrido spettrale e alle differenze finite su griglia non uniforme.

Il flusso base è quindi calcolato per differenti numeri di Reynolds. La geometria del recipiente scelta per le simulazioni è definita dai seguenti parametri geometrici: $H=0.5$, $R=1$ and $R_0=0.1$. Vale la pena osservare come le condizioni al contorno scelte sono tali da far sì che il flusso presenti due piani di simmetria: il primo è posizionato a $\theta=\pi/2$ e coincide con la sezione dove la velocità radiale è massima e la componente tangenziale è nulla mentre il secondo, perpendicolare al primo è posizionato a $\theta=0$.

La scelta è dettata dal voler riprodurre alcune delle caratteristiche del flusso studiato sperimentalmente nell'esperimento del prof. Kawakubo.

Nella Figura 3.3 sono rappresentate per $Re=26$ le linee dicorrente che giacciono sul piano a $\theta=\pi/2$.

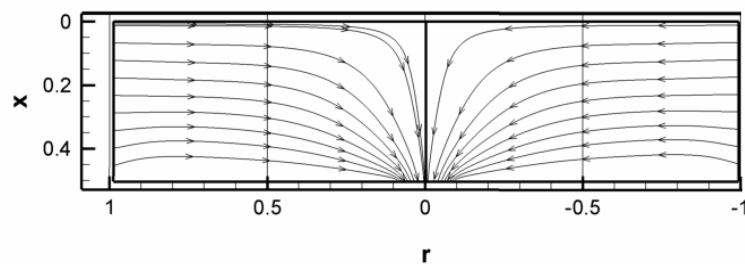


Figura 3.3. linee di corrente nel piano di simmetria $x-r$ individuato da:
 $r \in [0, R], x \in [0, H]$ e $\theta = \pi/2, \theta = 3\pi/2$

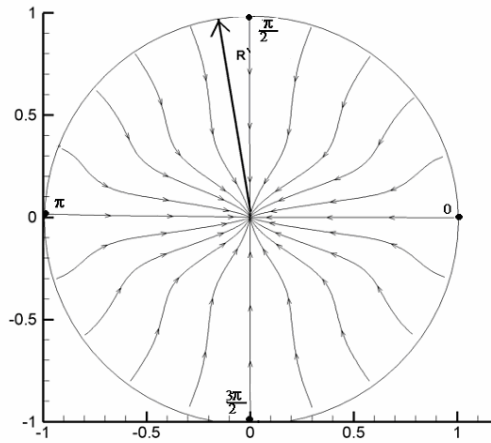


Figura 3.4. vista in pianta delle linee di corrente a $x=0$ nel piano $r - \theta$ per $Re=26$.

La figura 3.4 mostra una vista in pianta dall'alto delle linee di corrente; si possono identificare agevolmente due piani di simmetria (perpendicolari al piano in questione).

Il fluido entra in accordo con la distribuzione radiale fornita dalla Figura 3.2 ed ha il suo massimo per $\theta = \pi/2$ e $3/2\pi$.

Infine la Figura 3.5 fornisce una visione tridimensionale più completa delle linee di corrente

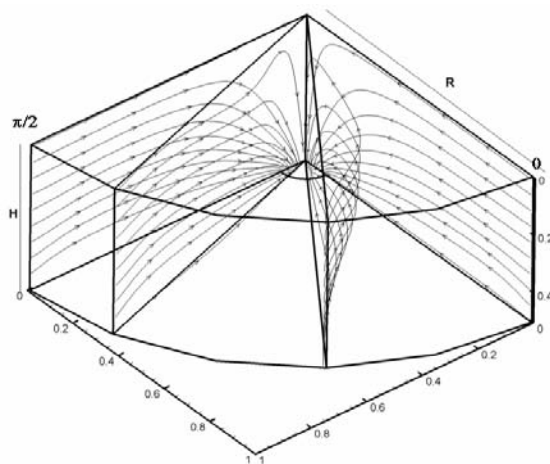


Fig 3.5 vista tridimensionale delle linee di corrente

Capitolo 4

Stabilità del vortice a struttura non assialsimmetrica

Al fine di analizzare la possibile esistenza di un'instabilità tale da generare un moto di rotazione e quindi condurre alla genesi di un vortice si condurrà in questo capitolo un'analisi di stabilità lineare globale tridimensionale.

Le equazioni in stazionarie non lineari (3.1-4) sono linearizzate nell'intorno del flusso base calcolato nel terzo capitolo.

Ancora una volta l'intero campo può essere decomposto nella somma di un flusso base stazionario e una componente in stazionaria che rappresenta la perturbazione:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, r, \theta, t) &= \underline{v}(x, r, \theta) + \underline{v}'(x, r, \theta, t) \\ \tilde{p}(x, r, \theta, t) &= p(x, r, \theta) + p'(x, r, \theta, t)\end{aligned}$$

Se la decomposizione è sostituita nelle equazioni di Navier-Stokes (3.1) trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial(rv')}{r\partial r} + \frac{\partial w'}{r\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + 2\frac{\partial(uu')}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru'v)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(uw')}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u'w)}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{r^2 \partial^2 \theta} \right) &\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial(uv')}{\partial x} + \frac{\partial(u'v)}{\partial x} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial(rv'v')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(vw')}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(v'w)}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial r} = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv')}{\partial r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial v'}{r^2 \partial^2 \theta} - 2 \frac{\partial w'}{r^2 \partial \theta} \right) \\
& \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial(uw')}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{\partial(u'w)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv'w)}{\partial r} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial(w'w')}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{vw'}{r} + \frac{v'w}{r} = \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial w'}{r^2 \partial^2 \theta} + 2 \frac{\partial v'}{r^2 \partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

La soluzione è ottenuta per ogni modo azimutale mediante il metodo di correzione della pressione similmente a quanto avveniva per il flusso base nel primo capitolo.

Al fine di valutare le proprietà di stabilità del sistema la soluzione delle equazioni linearizzate è esprimibile attraverso la somma di modi ortonormali del tipo:

$v'(x,r,\theta,t) = v'(x,r,\theta) \exp(\lambda t)$, dove λ è un autovalore che può essere sia complesso che reale e $v'(x,r,\theta)$ è l'autofunzione ad esso associata.

La parte reale ed immaginaria di λ denotano rispettivamente il tasso di crescita e la frequenza del disturbo; se la parte reale è negativa la perturbazione decade mentre se risulta positiva la perturbazione cresce e il flusso è instabile.

Utilizzando una variante del metodo delle potenze si è calcolato l'autovalore meno stabile e la autofunzione ad esso associata.

Uno studio parametrico è condotto al fine di determinare al crescere del numero di Reynolds il valore critico al quale il flusso diviene instabile.

La Figura 4.1 mostra la variazione dell'autovalore meno stabile che è un numero reale.

Come può essere facilmente osservato, λ è una funzione crescente del numero Di Reynolds.

Per bassi valori del numero di Reynolds il flusso è stabile mentre nell'intorno di $Re \approx 26.7$ l'autovalore cambia segno e diventa positivo e il flusso risulta quindi instabile.

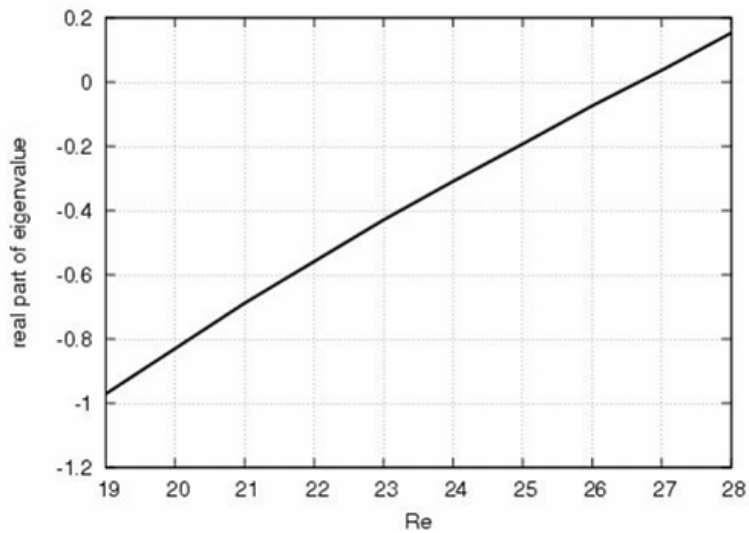


Figura 4.1 .autovalore meno stabile in funzione del numero di Reynolds

Un'importante caratteristica dell'instabilità è la presenza di una velocità tangenziale a media non nulla nella perturbazione. Nella figura 4.2 gli isocontorni del coefficiente costante della serie di Fourier della componente tangenziale $W_0(r,t)$ è mostrato: questa componente è la responsabile del moto di rotazione.

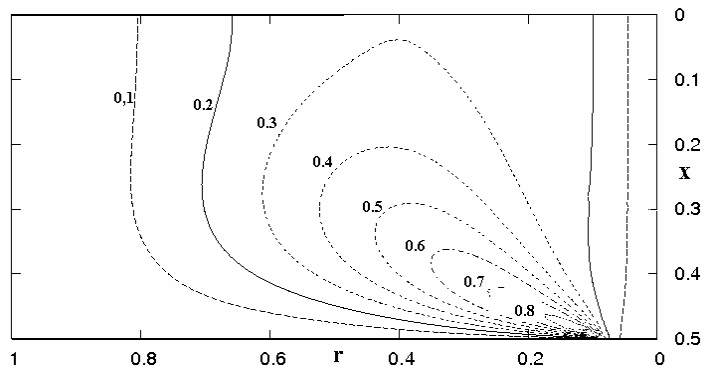


Figura 4.2. Isocontorni della componente assialsimmetrica della componente tangenziale della perturbazione w' ottenuta attraverso decomposizione in serie di Fourier .

La Figura 4.3 infine rappresenta la struttura del modulo dell'autofunzione corrispondente all'autovalore meno stabile del sistema linearizzato.

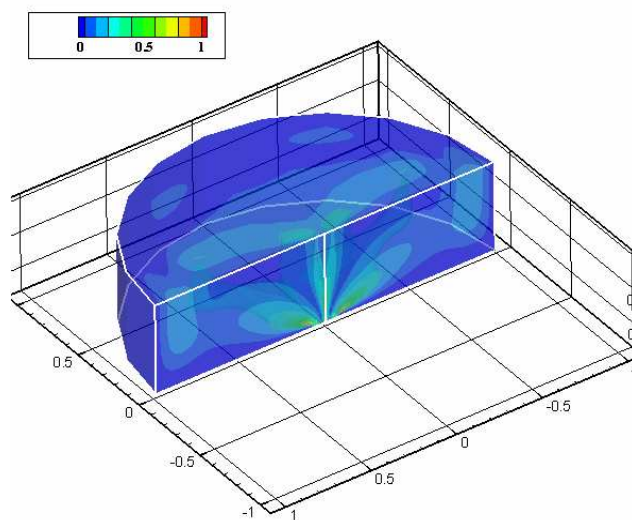


Figure 4.3. autofunzione associata all'autovalore meno stabile

Capitolo 5

Esperimento

In questo capitolo è descritto l'apparato sperimentale che è stato realizzato presso l'Istituto di meccanica dei fluidi di Tolosa (IMFT).

L'esperimento permette di analizzare l'evoluzione del fluido in un recipiente di forma cilindrica e con due ingressi permeabili laterali in un geometria simile a quella scelta per le simulazioni numeriche condotte nei capitoli precedenti prendendo come spunto l'esperimento giapponese di Kawakubo.

I risultati ottenuti permettono di valutare più approfonditamente le caratteristiche del flusso e sono un importante termine di confronto con le simulazioni numeriche precedentemente condotte.

L'analisi sperimentale è stata condotta attraverso la realizzazione di un set-up sperimentale composto in estrema sintesi da tre diversi ambienti tra di loro collegati:

- nucleo;
- ambiente esterno;
- camera di alimentazione.

Il nucleo dell'esperimento è infatti composto da un cilindro cavo sulle superfici laterali del quale sono state praticate due aperture simmetriche allo scopo di permettere l'ingresso del fluido senza introdurre una rotazione nel fluido stesso.

Al fine di evitare di introdurre attraverso gli ingressi della vorticità indesiderata si è realizzato un filtro bi-strato composto da due maglie metalliche di differente finezza; un filtro a maglie larghe (la dimensione del lato di una maglia è di circa 2mm) si è resa necessaria per sostenerne una più fine che ha l'effettiva funzione di regolarizzare il flusso in ingresso in modo da preservare la forma cilindrica anche in corrispondenza delle aperture, cosa che non sarebbe stata altrimenti possibile nel caso si fosse utilizzato il solo

filtro “sottile” che è costituito appunto da una maglia metallica molto deformabile il cui lato medio di una maglia è circa 30 micron.

La corretta tenuta del filtro sui bordi è garantita da un sottile strato di silicone che impedisce al flusso l'ingresso nella camera interna attraverso piccole infiltrazioni.

Questo particolare risulta molto importante poiché l'eventuale presenza di *soffiature* all'interno del filtro introduce forti asimmetrie nelle condizioni in ingresso e vorticità indesiderata.

Il flusso in ingresso è quindi drenato attraverso un foro posto sul fondo in posizione simmetrica.

Nelle figure seguenti è rappresentato lo schema del nucleo dell'esperimento attraverso un'immagine.

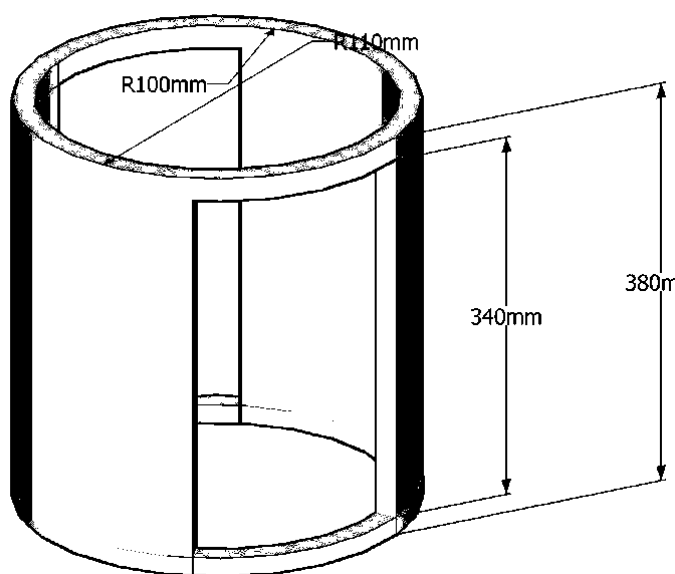


Fig.5.1 Vista assonometrica del nucleo dell'esperimento sono chiaramente visibili le aperture (identiche) laterali sulle quali sono poi posti i filtri e che permettono l'ingresso del fluido all'interno del cilindro.

Il nucleo dell'esperimento è quindi contenuto in un secondo ambiente (indicato con il numero 2 nella immagine seguente) con la forma di un

parallelepipedo cavo che ha lo scopo di permettere l'alimentazione costante del fluido attraverso gli ingressi.

L'alimentazione continua è ottenuta mediante una terza camera (indicata con 3) d'alimentazione in cui il fluido converge attraverso due ingressi collegati con un serbatoio (7), posto sul fondo dell'esperimento, una portata d'acqua il cui valore può essere facilmente regolato.

Quest'ultima camera e l'ambiente descritto precedentemente sono a loro volta suddivisi da un filtro della stessa natura di quello utilizzato per filtrare l'ingresso del fluido nel nucleo dell'esperimento.

Al fine di evitare che la portata in ingresso introduca vibrazioni indesiderate i getti in ingresso sono convogliati attraverso un cilindro (4) provvisto di numerosi piccoli fori posto in posizione orizzontale sul fondo della camera di alimentazione e ricoperto di materiale spugnoso al fine di migliorare ulteriormente l'effetto di smorzamento delle perturbazioni che si introducono a causa del moto indotto dalla pompa.

Per regolare il livello del fluido è inserito un condotto (5) lungo la direzione verticale che può essere regolato a diverse altezze fissando di fatto il livello desiderato e riconvogliando al serbatoio il fluido in eccesso.

La regolazione della portata in uscita dal cilindro (nucleo) attraverso il canale di drenaggio (6) è ottenuta mediante una valvola d'interdizione non riportata per semplicità nello schema ma visibile in fotografia Fig.5.5, alla quale è stato aggiunto un regolatore di fine della portata.

La regolazione della portata in ingresso avviene mediante l'uso combinato di due valvole poste nel condotto di alimentazione della camera di alimentazione e attraverso appunto il condotto regolabile descritto in precedenza.

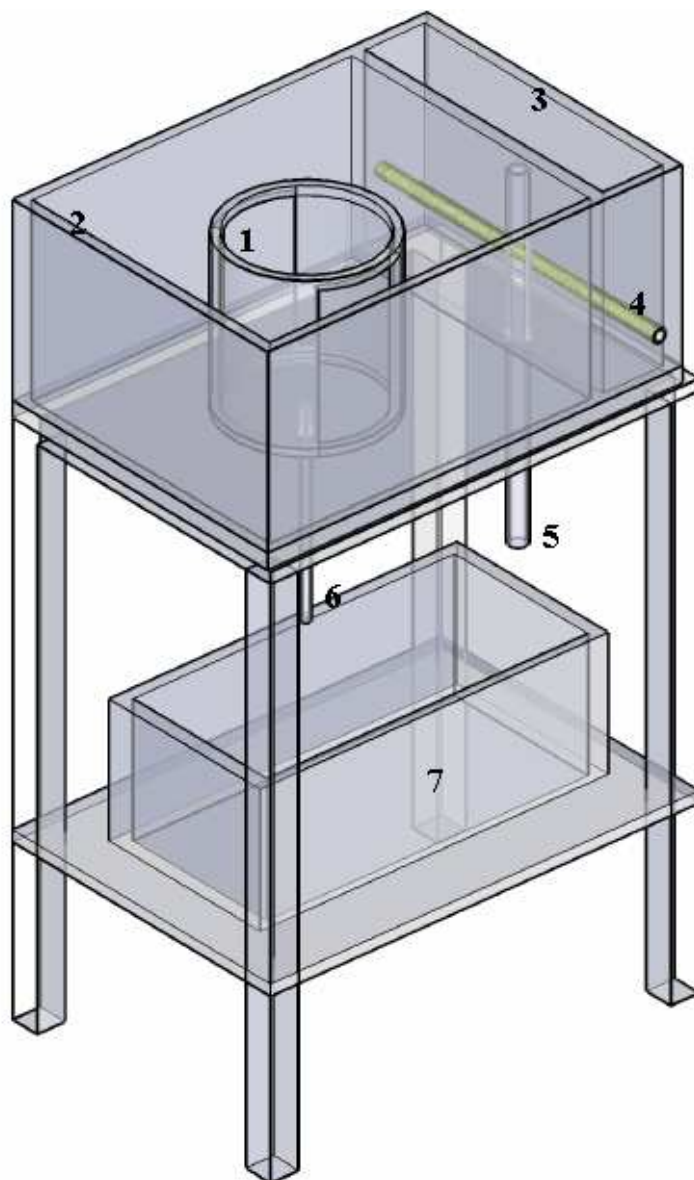


Fig 5.2 L'apparato sperimentale consta delle seguenti parti:

- 1) nucleo cilindrico
- 2) camera esterna di alimentazione
- 3) camera di alimentazione in cui è convogliato attraverso un tubo poroso il flusso proveniente dal serbatoio (7)

- 4) tubo in PVC forato ricoperto di materiale spugnoso per l'ingresso del fluido; la particolare scelta limita l'introduzione di vibrazioni indesiderate
- 5) condotto in PVC : la regolazione mediante traslazione verticale permette di fissare il livello di fluido presente nel recipiente.
- 6) Condotto di drenaggio, termina con una valvola di interdizione mostrata in fotografia.

L'instabilità si manifesta con la comparsa di una rotazione netta all'interno del recipiente cilindrico (la comparsa di un mulinello in pratica) e la misura dell'intensità di questa rotazione è stata qui valutata mediante le seguenti tecniche di visualizzazione:

- per iniezione di colorante

- velocità di rivoluzione di un piccolo (15mm di diametro) disco posto sulla superficie libera con il centro posto in corrispondenza dell'asse di simmetria del vortice.

Mediante l'ausilio di una video camera posizionata in modo da fornire una vista in pianta del nucleo cilindrico si è stimata la velocità angolare in prossimità dell'asse del vortice e se ne sono effettuate diverse misure al variare della portata.

Le prove sperimentali sono state condotte fissando un livello H di fluido nel recipiente pari a $H = 50mm$ mentre il raggio del cilindro è $R = 100mm$ e quello del foro d'uscita $R_0 = 10mm$.

La geometria scelta è tale da riprodurre quella utilizzata nelle simulazioni numeriche dei capitoli precedenti.

All'aumentare del numero di Reynolds (il che è equivalente ad aumentare la portata una volta fissata la geometria e le proprietà del fluido) si osserva la genesi di un moto di rotazione all'interno del dominio.

Nel grafico seguente è riportata quindi al crescere della portata il valore a regime della velocità angolare in prossimità dell'asse di rotazione del vortice:

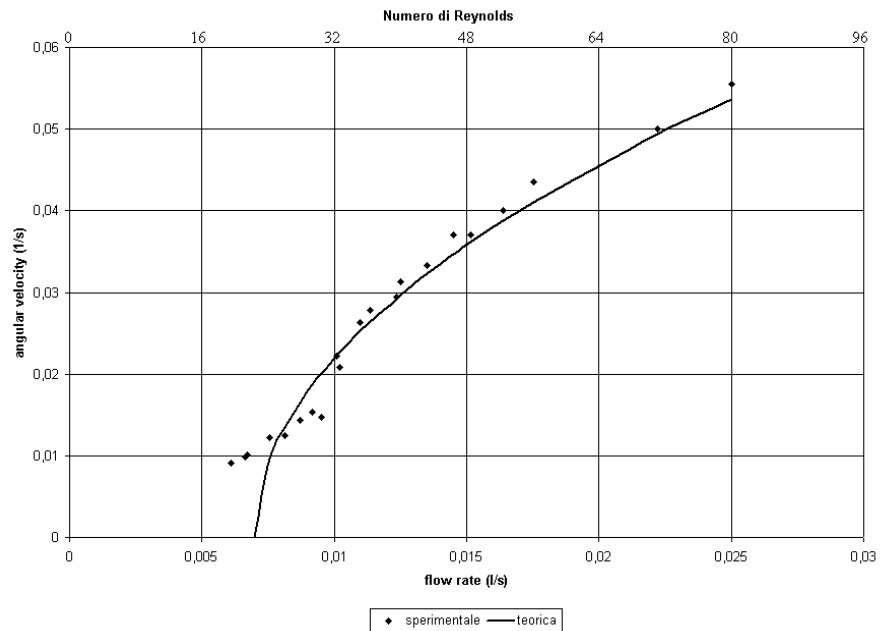


Fig.5.3 Grafico di stabilità: in ordinate è riportata la velocità angolare in prossimità dell'asse di rotazione del vortice in funzione della portata volumetrica.

In base ai risultati riportati nel grafico precedente si può stimare che la instabilità si presenti per una portata di circa $Q = 0,007 \text{ l/s}$ che, in termini adimensionali, per un fluido come l'acqua e per un'altezza del fluido di circa $H = 50\text{mm}$ si traduce in un numero di Reynolds di circa:

$$\text{Re}_c = \frac{Q}{2\pi\nu H} \approx 21$$

Il risultato è in buon accordo con i risultati ottenuti dalle simulazioni nei capitoli 3 e 4 in cui si otteneva un $\text{Re}_c \approx 27$.

Si riporta un fotogramma che mostra una vista dall'alto del recipiente cilindrico e in cui è stato iniettato del colorante al fine di visualizzare la spirale che mostra la presenza del vortice:

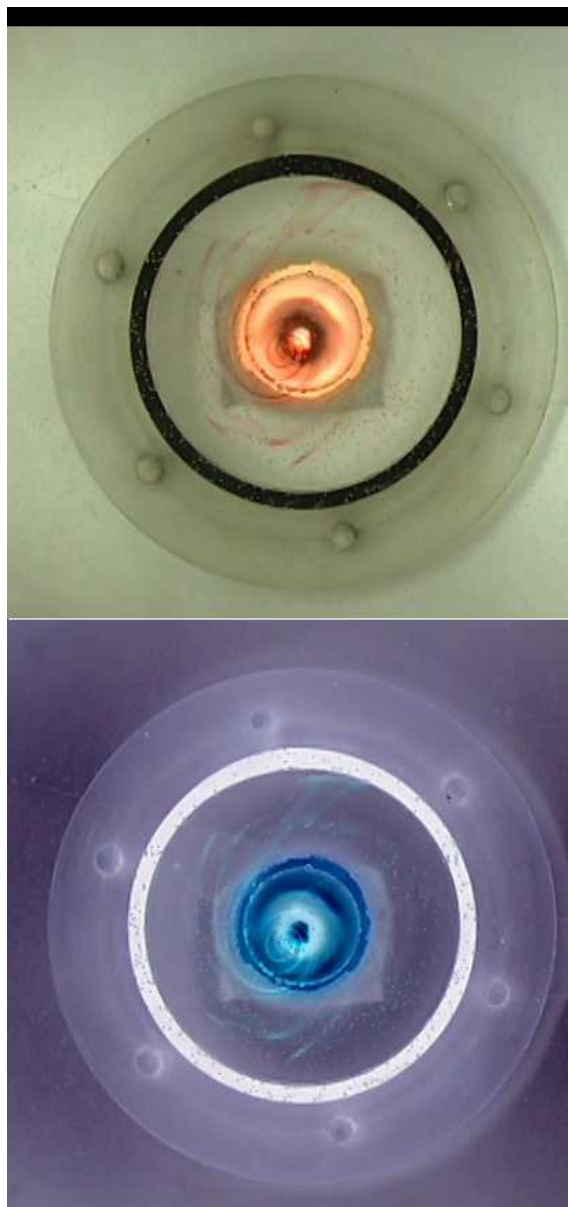


Fig.5.4 La fotografia mostra la presenza del vortice nella zona interna del nucleo cilindrico, per evidenziare maggiormente la traccia di colorante si è ottenuto anche il negativo della prima immagine.

Conclusioni

In questo lavoro si è studiata numericamente e sperimentalmente la formazione di vortici a superficie libera, approfondendo l'ipotesi che l'insorgenza del fenomeno sia dovuta a un'instabilità fluidodinamica.

Nei primi due capitoli si è condotta un'analisi di stabilità lineare nell'ipotesi di flusso assialsimmetrico i cui risultati, in accordo con quelli ottenuti da autori spagnoli [2,3], mostrano come il flusso sia asintoticamente stabile nel campo di numeri di Reynolds $Re \in [0 : 30]$ in cui si è condotta l'indagine.

Nel terzo e quarto capitolo basandosi sull'esperimento condotto dal prof. Kawakubo[1], l'indagine è stata estesa a flussi con una geometria dell'ingresso non assialsimmetrica.

Per una geometria simile a quella dell'esperimento [1], in cui il flusso possiede non un asse bensì un piano di simmetria, si è condotta un'analisi di stabilità lineare che ha questa volta mostrato come per $Re \approx 26.7$ il flusso presenti un'instabilità che innesca un moto di rotazione nel fluido.

Il risultato delle simulazioni sembra confermare che, sotto opportune condizioni in ingresso, la nascita di vortici sia quindi legata ad una instabilità fluidodinamica.

L'analisi sperimentale, condotta presso l'Istituto di Meccanica dei Fluidi di Tolosa(IMFT), descritta nel quinto capitolo, è consistita nel progetto e nella realizzazione di un esperimento che riproduce la geometria cilindrica scelta per le simulazioni.

Anche l'indagine sperimentale ha evidenziato la formazione di un vortice per $Re \approx 22$ ed il risultato è in buon accordo con quelli ottenuti dalle simulazioni numeriche. Le piccole differenze fra i valori del numero di Reynolds critico ottenuto fra l'indagine numerica e quella sperimentale possono essere attribuite a condizioni d'ingresso del fluido lievemente differenti nei due casi.

In conclusione i risultati sperimentali concordano con quelli numerici nell'avvalorare la tesi che i mulinelli possano essere generati da fenomeni di instabilità.

Alla luce dei risultati qui ottenuti si deduce che se il flusso risulta instabile per certi valori della portata gli accorgimenti classici per la soppressione dei vortici non risultano più sufficienti poiché anche in condizioni di simmetria si può riscontrare la nascita di un moto rotatorio legato non all'accumulo di vorticità bensì ad un'instabilità.

Infatti nelle centrali idroelettriche il progetto del bacino, l'orientamento ed il posizionamento delle condotte è di norma condotto con l'obiettivo principale di controllare e al limite sopprimere le strutture vorticose agendo sulla geometria del bacino e dei vari elementi che compongono la diga ed in particolare spesso si ricorre a deviatori e raddrizzatori di flusso con lo scopo di ridurre le asimmetrie del flusso che approssima la zona del condotto di drenaggio.

E' opportuno invece che il progetto sia integrato da un'analisi che stabilisca per quali valori dei parametri (tipicamente la portata attraverso la condotta forzata e la geometria d'ingresso del fluido) anche in presenza di meccanismi di raddrizzamento dello stesso, si vada incontro ad instabilità.

Lo studio qui presentato costituisce la prima conferma tramite simulazione ed esperimento condotti in condizioni paragonabili di come un'instabilità fluidodinamica conduca alla formazione di un mulinello ed è inoltre una base per successive indagini mirate a stabilire più in dettaglio l'effetto che l'instabilità gioca nel meccanismo di formazione dei vortici.

Un primo aspetto che merita di essere approfondito è quello di valutare l'incidenza che hanno sulla comparsa del moto di rotazione di variabili quali la geometria dell'ingresso del fluido, il rapporto di forma e sotto quali condizioni esse ritardano o favoriscono la formazione del vortice.

Un secondo campo d'indagine si individua nella modellazione, e nella analisi di stabilità, di vortici in cui la superficie libera è di forma più generale.

Questa tipologia di vortici è infatti spesso riscontrata in problemi di carattere pratico e la relazione che intercorre fra il campo di velocità del vortice e la forma della sua superficie rappresenta un ulteriore dato importante in fase di progetto.

Sommaire

La genèse spontanée de tourbillons à surface libre représente un phénomène hydrodynamique classique dont les causes, jusqu'à aujourd'hui, ne sont pas complètement claires.

Les spécialistes ont longtemps supposé que le mouvement de rotation était dû à une graduelle concentration de la vorticité, provenant de l'écoulement amont, qui à travers un mécanisme de convection était accumulée sur l'axe du tourbillon en formation. [4].

Une seconde hypothèse suppose la formation d'un tourbillon du à une instabilité hydrodynamique; cette possibilité a été analysée dans un travail expérimental [1] et dans quelques simulations numériques dans le cas d'un écoulement axisymétrique [2],[3].

Dans ce travail on montre qu'en présence de conditions aux limites non uniformes, lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, on observe une instabilité qui déclenche un mouvement de rotation nette dans le tourbillon.

Dans la première partie du travail on développe une analyse de stabilité linéaire sur un écoulement alimenté de manière axisymétrique. On considère ensuite, en s'inspirant de la géométrie de l'expérience japonaise, un écoulement avec des conditions d'entrée non uniformes en direction azimutale dans le but de calculer la valeur propre (et la fonction propre associée) la moins stable du système et de calculer le nombre de Reynolds auquel, éventuellement, l'écoulement devient instable.

Dans la seconde partie on décrit un travail expérimental conduit à l'IMFT qui a permis de confronter, pour la première fois, les résultats numériques et expérimentaux sur les géométries comparables.

Les résultats expérimentaux concordent avec les résultats numériques pour confirmer la thèse que les tourbillons puissent être engendrés par un phénomène d'instabilité.

Mots clés: Mécanique des fluides, tourbillons, Stabilité linéaire.

Introduction

Dans ce travail on étudie la genèse spontanée de tourbillons à surface libre qui se présente comme un phénomène hydrodynamique classique dont les causes ne sont pas complètement claires et que aujourd'hui il constitue un aspect de grand intérêt dans de nombreuses applications de l'ingénierie.

Le phénomène présente en effet des multiples conséquences pratiques : la formation de tourbillons peut, en effet, provoquer dans certaines conditions l'entraînement d'air à l'intérieur des conduites qui mènent aux turbines des bassins hydro-électriques, ainsi que dans les conduits d'alimentation de pompes et turbines hydrauliques, en provoquant vibrations, diminutions de rendement, sévère usure et donc considérables coûts d'entretien.

Fondamentalement, ils résultent des liens existants entre l'intensité, la forme et la profondeur du tourbillon en relation à la portée qui permettent le projet juste de ces appareils.

L'analyse bibliographique des études conduites montre que le phénomène, en réalité, a été, dans le cours du dernier siècle, objet de recherche de physiciens et de mathématiciens qui à partir du simple modèle de Rankine ont proposé des modèles toujours plus soignés sans toutefois arriver à une description quantitative satisfaisante du phénomène.

En particulier les causes qui portent à la naissance et au suivant développement des tourbillons ne sont pas déterminés, jusqu'à aujourd'hui, de manière univoque.

Une première hypothèse attribue la cause de la rotation à une accumulation de vorticit , qui provient de l'écoulement extérieur, le long de l'axe du tourbillon, entre autres ,l'effet de Coriolis est la cause principale de leur apparition, mais cette hypothèse est fautive. .

Dans d'autres travaux l'apparition du mouvement de rotation a été attribuée à une l'instabilit  hydrodynamique; cette dernière théorie, qui dérive essentiellement de travaux expérimentaux, a été présentée pour la première fois en [3]. Récemment, des spécialistes espagnols de l'universit  de Malaga

ont procédé à des simulations numériques pour établir si le tourbillon est bien le résultat d'une instabilité.

L'étude de l'instabilité hydrodynamique représente un champ de considérable intérêt dans la pratique d'ingénierie et constitue un important objet d'étude pour le groupe de mécanique des fluides de l'Université de Salerno.

Avec ce travail on veut déterminer si la genèse d'un tourbillon à surface libre est liée à des phénomènes d'instabilité de l'écoulement.

L'analyse de stabilité, en condition de symétrie et en conditions générales, est faite sur l'écoulement dans une géométrie cylindrique, et l'étude se termine avec une expérience faite avec deux objectifs : pouvoir observer dans un modèle en échelle les caractéristiques de ce type de écoulement et pouvoir confronter et valider les résultats obtenus avec les simulations numériques.

La thèse est formé par six sections :

- L'introduction décrit en détail le phénomène de l'apparition de tourbillons dans les centrales hydro-électriques et montre quelques techniques communément utilisées dans les études d'ingénieurs hydrauliques pour en prévenir ou en contrôler l'évolution.

On considère les hypothèses sur les possibles causes qui portent à la formation des tourbillons grâce à l'analyse bibliographique

- Dans le premier chapitre on développe un modèle analytique pour la description, à travers des équations de Navier-Stokes, d'un tourbillon à surface libre axisymétrique. En particulier, on développe en détail la modélisation de la surface libre et sa linéarisation, qui constitue une complication ultérieure dans cette typologie de écoulement.

La solution est obtenue numériquement et les résultats plus significatifs donc sont rapportés et discutés.

- Dans la deuxième chapitre on linéarise les équations de Navier-Stokes autour de la solution axisymétrique précédemment calculée. On effectue une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base.

- Dans le troisième chapitre sur la base des résultats obtenus avec l'expérience [3] on abandonne l'hypothèse d'axisymétrie et on en vient à décrire un écoulement avec des conditions d'entrée plus générales.

La solution est obtenue de manière numérique en recourant à un schéma hybride aux différences finies et spectral.

- Dans le quatrième chapitre, on analyse la stabilité linéaire de l'écoulement tridimensionnel obtenu dans le chapitre troisième afin de déterminer, en fonction du nombre de Reynolds, si le système linéaire présente des valeurs propres à partie réelle positive et donc instabilité.

- Dans le cinquième et dernier chapitre est décrit le dispositif expérimental construit à l'Institut de mécanique des fluides de Toulouse (IMFT) et les résultats obtenus par voie expérimentale sont confrontés, pour des géométries correspondantes, avec les résultats numériques.

La thèse se termine avec les conclusions dans lesquelles sont repris et commentés les principaux résultats obtenus numériquement et expérimentalement.

Chapitre 1

Vortex axisymétrique

Dans ce premier chapitre, on présente le cas d'un écoulement axisymétrique avec entrée purement radiale. On considère donc un fluide Newtonien dans un récipient cylindrique ouvert de longueur H et rayon R (Figure 1.1) :

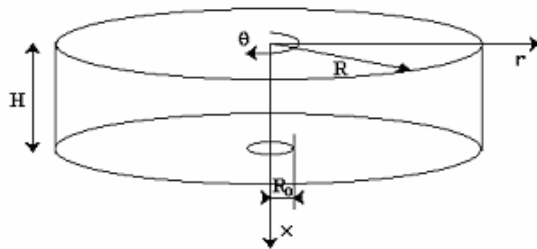


Figure 1.1: Domaine de calcul

L'écoulement à l'intérieur de récipient est décrit par les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques et en variables primitives où les composantes de vitesse en direction axiale (x), radiale (r), et azimutal (θ) sont respectivement notées u , v , et w . Le fluide entre avec une distribution radiale constante (Figure 1.2) et sort du récipient à travers un petit trou de rayon R_0 (Figure 1.1). Le fond du récipient est constitué par une paroi solide et la surface supérieure est libre.

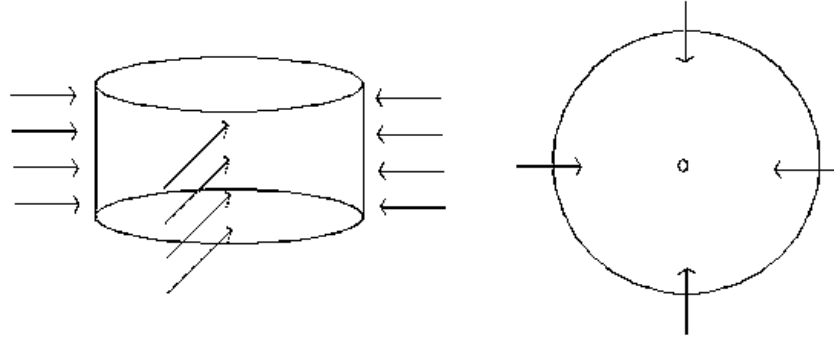


Fig.1.2 écoulement radial en entrée dans le domaine de la surface latérale du cylindre.

Les équations qui gouvernent le fluide sont:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{r\partial r} &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{w^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où le nombre de Reynolds est défini comme $Re=UR/\nu$, où U indique la vitesse moyenne d'entrée et ν la viscosité cinématique.

Le nombre de Reynolds peut aussi être exprimée à travers le débit volumique Q soit : $Re=Q/2\pi\nu H$.

Les conditions aux limites sur la surface libre $f=f(t,r)$ s'expriment, en supposant que le milieu supérieur est le vide, comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} = u \tag{1.2}$$

$$F_x = p + \frac{f}{Fr^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = 0 \tag{1.3}$$

$$F_r = - \left(p + \frac{f}{Fr^2} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = 0 \tag{1.4}$$

$$F_\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right) = 0 \quad (1.5)$$

où F_x , F_r , et F_θ ils sont les contraintes sur la surface libre et $Fr = U / (gR)^{0.5}$ indique le nombre de Froude.

L'équation (1.2) représente la condition cinématique et fournit l'information que la vitesse est tangente, point pour point, à la surface libre, tandis que les équations (1,3), (1,4), and (1.5) indiquent qu'à l'interface les efforts sont nuls.

Sur le fond par contre les suivantes conditions aux limites sont imposées:

$$u = v = w = 0 \quad x = H \quad r \in [R_0, R] \quad (1.6)$$

Sur l'orifice de sortie :

$$p = const = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = H, \quad r \in [R_0, R] \quad (1.7)$$

Lorsque la dépression de la surface libre est petite les conditions aux limites précédemment dérivées peuvent être simplifiées ; pour des petites valeurs du nombre de Froude $Fr^2 \ll 1$ est possible un développement asymptotique en fonction du petit paramètre $\varepsilon = Fr^2$ comme suit:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \dots \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

et en substituant (1.8) dans les équations de Navier- Stokes à l'ordre zéro du développement on obtient

$$f_0 = 0; \quad u_0 = 0; \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \quad (1.9)$$

La forme de la surface libre aux premier ordre est calculée comme la solution à l'ordre zéro $f_1 = f_1(f_0, v_0, p_0)$.

Les équations à l'ordre zéro sont formellement égales à (1.1) et sont résolues sur le domaine de calcul cylindrique de la Figure 1.1 avec les conditions aux limites modifiées sur la surface libre (1.9) pour $r \in [0..R]$ et $x=0$. Les équations sont résolues numériquement avec une méthode aux différences finies sur grille variable.

On montre donc les résultats obtenus pour le cas dans lequel $Re=30$ et pour $H=0.5$, $R=1$ and $Ro=0.1$, en montrant d'abord les lignes de courant dans le plan $r-x$ obtenues et la forme de la surface libre linéarisée et ensuite une carte chromatique des composantes de vitesse.

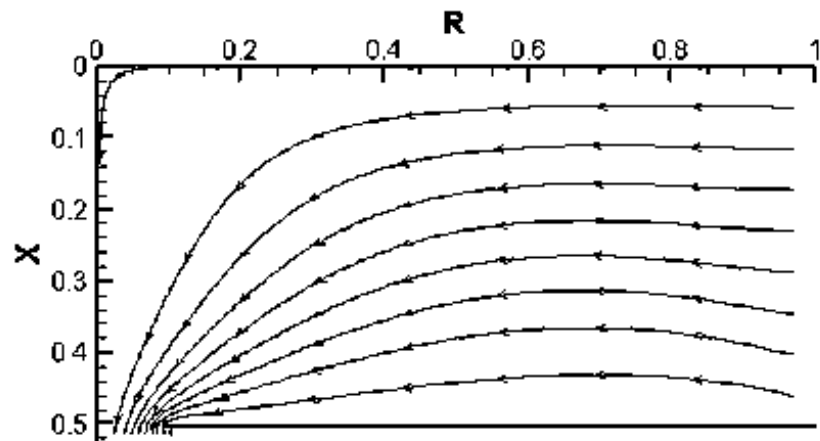


Fig.1.3 Lignes de courant dans le plan x-r

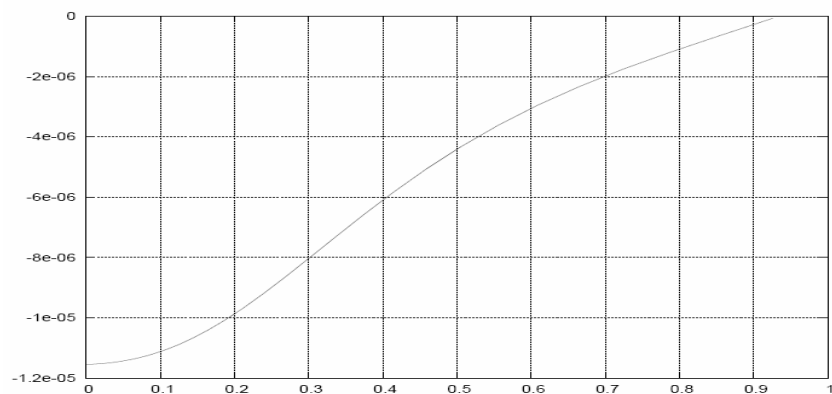
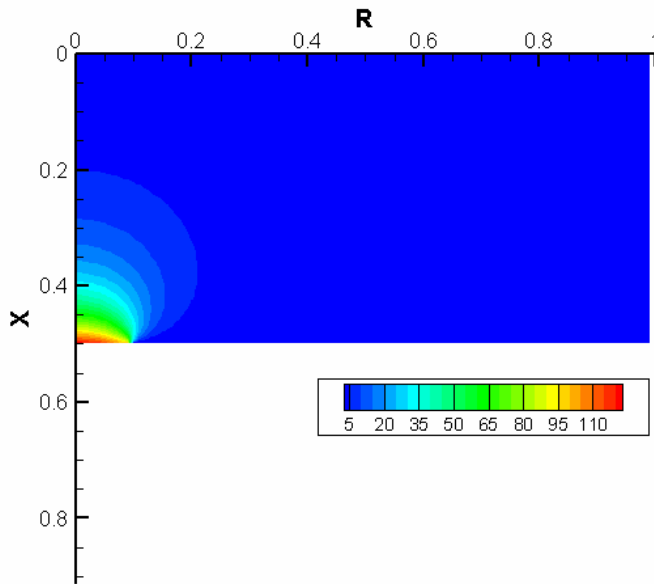
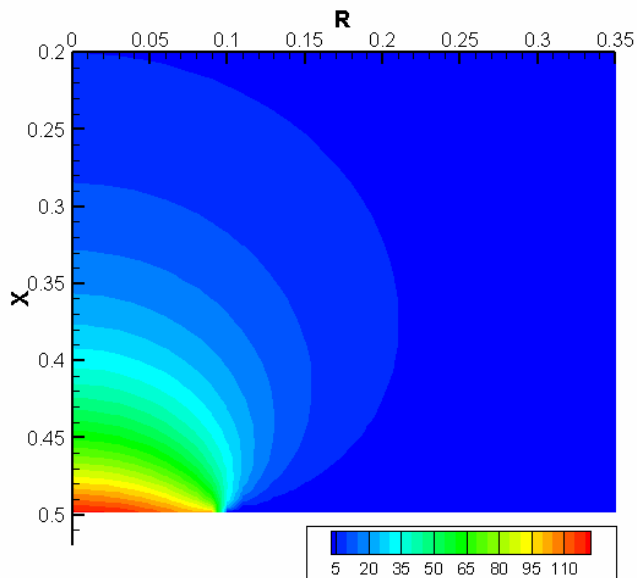
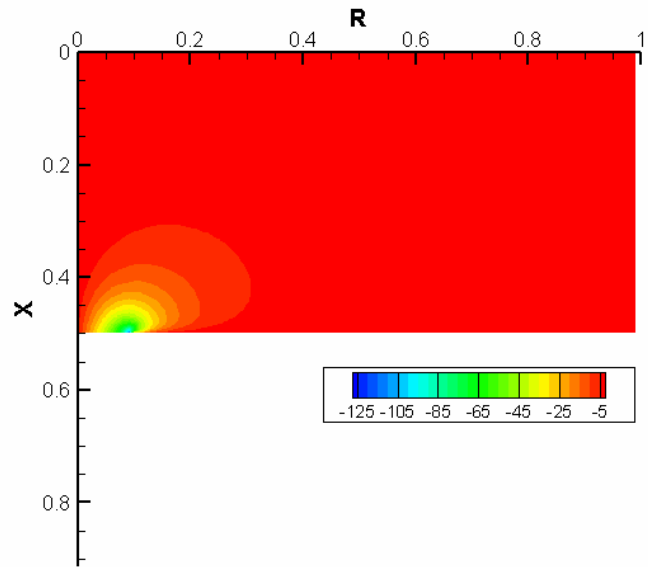
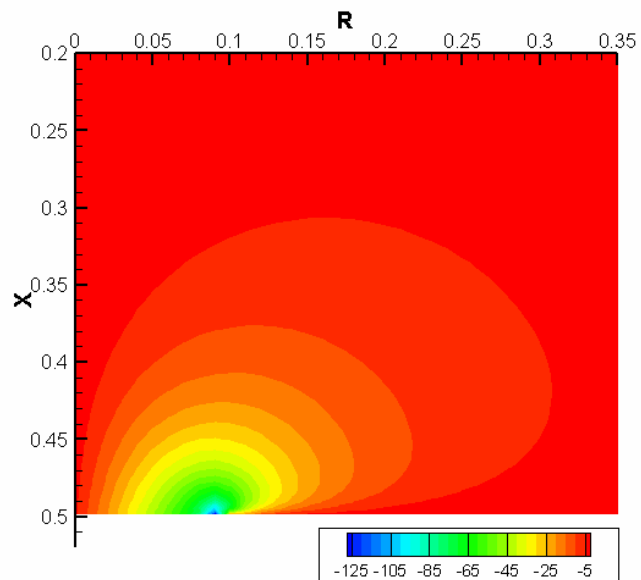


Fig.1.4 surface libre linearisée

Fig.1.5 Champ de vitesse axiale U Fig.1.6 Champ de vitesse axiale U (détail)

Fig1.7 Champ de vitesse radiale V Fig1.8 Champ de vitesse radiale V (détail)

Chapitre 2

Vortex axisymétrique (stabilité)

Dans le second chapitre est étudiée la possible existence d'une instabilité dans l'écoulement axisymétrique décrit dans le premier chapitre en recourant à une analyse de stabilité linéaire. Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles et instationnaires sont donc linéarisées autour de l'écoulement de base stationnaire précédemment calculé.

Les champs de vitesse et de pression peuvent être donc décomposés comme somme d'une partie stationnaire (écoulement de base) et d'une petite perturbation :

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, r, \theta, t) &= \underline{v}(x, r, \theta) + \underline{v}'(x, r, \theta, t) \\ \tilde{p}(x, r, \theta, t) &= p(x, r, \theta) + p'(x, r, \theta, t)\end{aligned}$$

Si la décomposition est introduite dans (1.1), après avoir soustrait l'écoulement de base et avoir négligé, dans l'hypothèse de petites perturbations, les termes d'ordre supérieur, on obtient :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial(rv')}{r\partial r} + \frac{\partial w'}{r\partial \vartheta} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + 2\frac{\partial(uu')}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru'v)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u'w)}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial x} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{r^2 \partial^2 \theta} \right)\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial(uv')}{\partial x} + \frac{\partial(u'v)}{\partial x} + 2\frac{1}{r} \frac{\partial(rv'v')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(vw')}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial r} = \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv')}{\partial r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial v'}{r^2 \partial^2 \theta} - 2 \frac{\partial w'}{r^2 \partial \theta} \right) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial(uw')}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{vw'}{r} = \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial w'}{r^2 \partial^2 \theta} + 2 \frac{\partial v'}{r^2 \partial \theta} \right) \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Le système d'équations différentielles, accompagné des conditions aux limites appropriées, est donc résolu en recourant à une méthode hybride de différences finies et spectrale ; les équations sont d'abord décomposées à travers une série de Fourier selon la coordonnée θ :

$$f(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(x, r, t) e^{lm\theta}$$

Ensuite elles sont discrétisées avec des différences finies dans le plan x - r .

La solution est obtenue pour chaque mode azimutal avec la méthode de correction de la pression de la même manière que pour l'écoulement de base considéré dans le premier chapitre.

Au fin d'évaluer les propriétés de stabilité du système la solution des équations linéarisées est exprimable à travers la somme des modes orthonormales du type $v'(x, r, \theta, t) = v'(x, r, \theta) \exp(\lambda t)$ où λ est la valeur propre et la fonction propre associée est notée $v'(x, r, \theta)$.

Les parties réelle et imaginaire de λ dénotent respectivement le taux de croissance et la fréquence de la perturbation ; si la partie réelle est négative la perturbation décroît tandis que si elle est positive la perturbation croît et l'écoulement est instable.

En utilisant une variante de la méthode des puissances, on a calculé pour les différents modes azimutaux la valeur propre la moins stable et la fonction propre associée. L'étude paramétrique est conduite afin de déterminer si à partir d'un certain nombre de Reynolds l'écoulement devient instable. La

figure 2,1 montre la variation de la partie réelle de la valeur propre la moins stable pour les cinq premiers modes azimutaux. Dans la gamme de nombres de Reynolds choisie, il est facile d'observer que les valeurs propres sont négatives et la tendance montre une stabilité asymptotique (pour $Re \rightarrow \infty$) des modes.

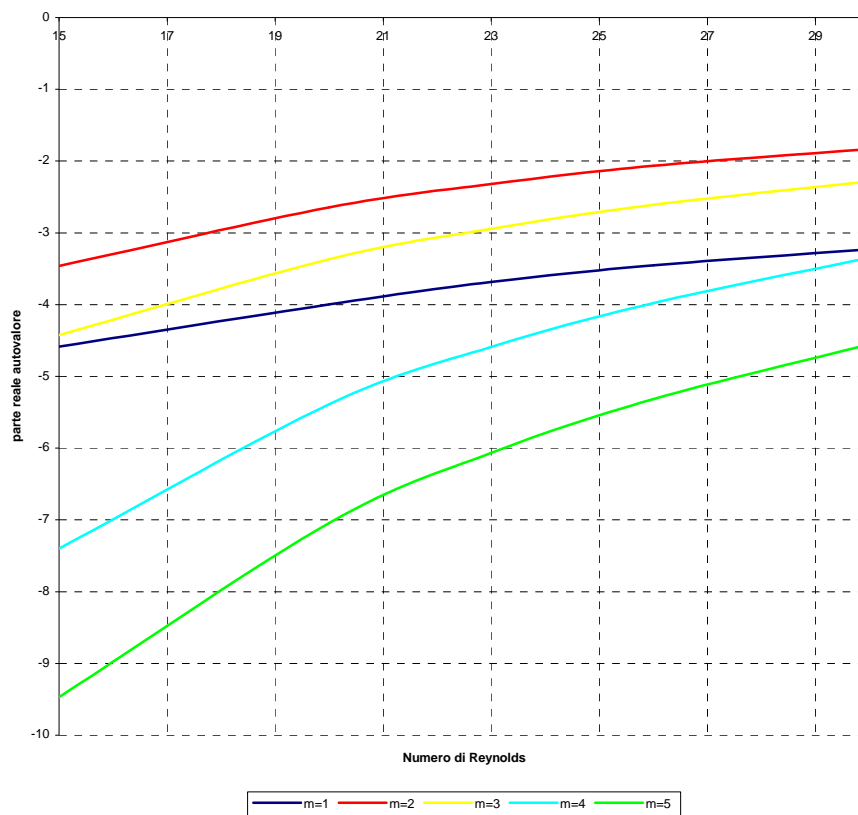


Fig 2.1 Valeurs propres les moins stables pour les différents modes azimutaux

Chapitre 3

Vortex non axisymétrique

Dans le troisième chapitre on dépasse la limite de l'écoulement axisymétrique et, on adopte une géométrie inspirée de l'expérience [3], dans laquelle la distribution radiale du fluide en entrée n'est pas constante mais conserve deux plans de symétrie (Figure 3.2). Pour cette géométrie, on a dérivé et a résolu un écoulement de forme plus générale, qui sera ensuite objet d'une analyse de stabilité dans le paragraphe suivant, afin d'établir l'influence que les conditions d'entrée exercent dans l'apparition d'une instabilité et d'un mouvement de rotation dans le fluide.

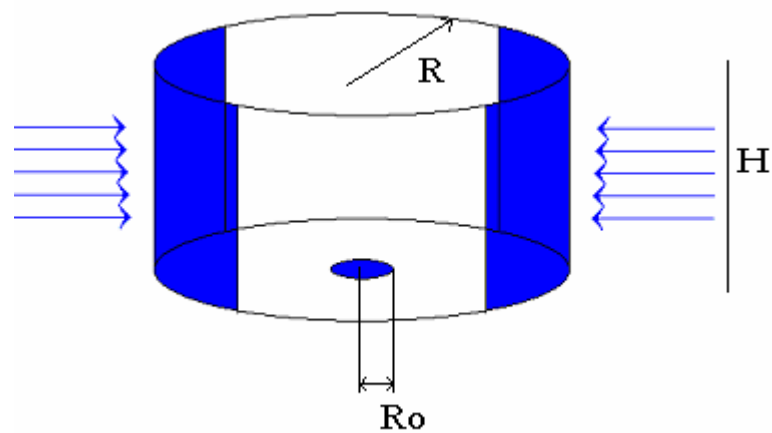


Figure 3.1: domaine de calcul

L'écoulement à l'intérieur de récipient est décrit par les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques et en variables primitives où les

composantes de vitesse en direction axiale (x), radiale (r), et azimutale (θ) sont respectivement notées u , v , et w .

Le fluide entre avec une distribution radiale variable en direction azimutale selon le profil montré dans la figure (Figure 3.2) et sort du récipient à travers le petit trou de rayon R_0 (Figure 3.1).

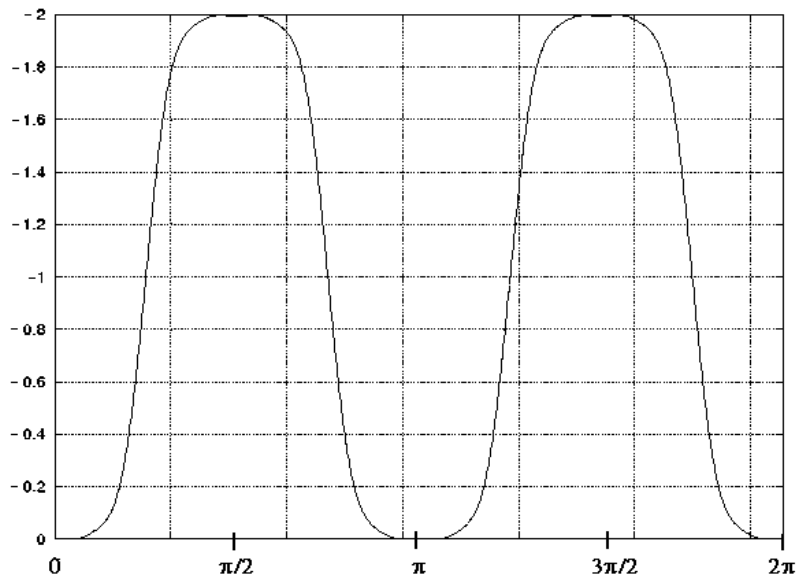


Fig.3.2 profil de l'écoulement en entrée

Les équations qui gouvernent le fluide sont:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{r\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(uw)}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(vw)}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3.1) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rvw)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w^2)}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \\
\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) &
\end{aligned}$$

où le nombre de Reynolds est défini comme $Re=UR/\nu$, où U indique la vitesse moyenne d'entrée et ν la viscosité cinématique. Le nombre de Reynolds peut aussi être exprimée à travers le débit volumique Q comme suit : $Re=Q/2\pi\nu H$.

Les conditions au contour sur la surface libre $f=f(t, r, \theta)$ s'expriment, en supposant que la seconde moyen soit le vide comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + w \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = u \quad (3.2)$$

$$F_x = p + \frac{f}{Fr^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right) = 0 \quad (3.3)$$

$$F_r = - \left(p + \frac{f}{Fr^2} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(2 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right) \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$F_\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(2 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2 \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (3.5)$$

où F_x , F_r , and F_θ ils sont les efforts sur la surface libre et $Fr=U/(gR)^{0.5}$ indique le nombre de Froude.

L'équation (1.2) représente la condition cinématique et fournit l'information que la vitesse est tangente, point pour point, à la surface libre pendant que les équations (1,3), (1,4), et (1.5) indiquent qu'à l'interface les efforts sont nuls.

Sur le fond par contre les suivantes conditions au contour sont imposées:

$$u = v = w = 0 \quad x = H \quad r \in [R_0, R] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.6)$$

et sur le trou de sortie :

$$p = const = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = H, \quad r \in [R_0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.7)$$

Lorsque la dépression de la surface libre est petite les conditions au contour précédemment dérivées peuvent être simplifiées ; pour des petites valeurs du nombre de Froude $Fr^2 \ll 1$ est possible un développement asymptotique en fonction du petit paramètre $\varepsilon = Fr^2$ comme suit:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \dots \\ \underline{v} &= \underline{v}_0 + \varepsilon \underline{v}_1 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

et en substituant (3.8) dans les équations de Navier- Stokes aux ordines zéro de l'expansion on obtient

$$f_0 = 0; \quad u_0 = 0; \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0. \quad (3.9)$$

La forme de la surface libre aux premier ordre est calculée comme la solution aux ordines zéro $f_1 = f_1(f_0, \underline{v}_0, p_0)$.

Les équations aux ordines zéro sont formellement égales à (3.1) et sont résolues sur le domaine de calcul cylindrique de la Figure 3.1 avec les

conditions au contour modifiées sur la surface libre (1.9) pour $r \in [0..R]$, $\theta \in [0..2\pi]$, et $x=0$

Les équations sont résolues numériquement avec une méthode hybride aux différences finies et spectral sur grille variable. L'écoulement de base donc est calculé pour des différences de nombres de Reynolds. La géométrie du récipient choisie pour les simulations est définie des suivants paramètres géométriques : $H=0.5$, $R=1$ and $R_o=0.1$.

Cela vaut la peine d'observer que les conditions aux limites choisies sont telles que l'écoulement présente deux plans de symétrie: le premier est à $\theta=\pi/2$ et coïncide avec les positions où la vitesse radiale est la plus grande et la composante tangentielle est nulle ; tandis que la seconde, perpendiculaire au premier est à $\theta=0$. Le but de ce choix est de reproduire quelques unes des caractéristiques de l'écoulement étudié expérimentalement dans l'expérience du prof. Kawakubo.

Dans la Figure 3,3 sont représentées pour $Re=26$ les lignes de courant contenues dans le plan à $\theta=\pi/2$.

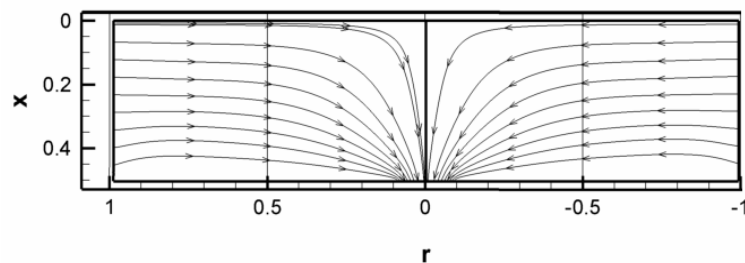


Figure 3.3. lignes de courant dans le plan $x-r$
 $r \in [0, R], x \in [0, H] \quad \theta = \pi/2, \theta = 3\pi/2$

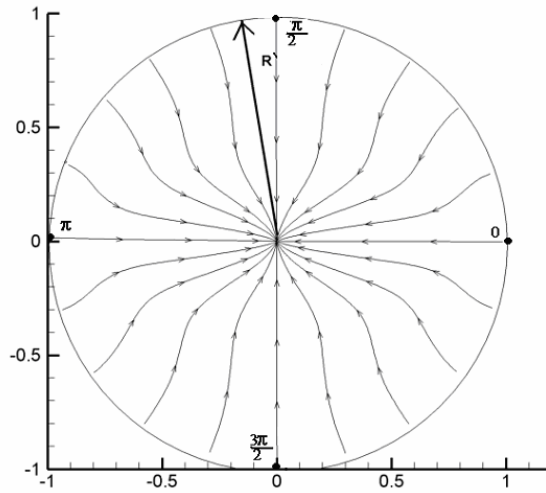


Figure 3.4. vue du dessus des lignes de courant à $x=0$ dans le plan $r-\theta$ per $Re=26$.

La figure 3,4 montre une vue du dessus des lignes de courant ; on peut identifier facilement deux plans de symétrie (perpendiculaires). Le fluide entre selon la distribution radiale de la Figure 3,2 et a une vitesse maximum pour $\theta = \pi/2$ et $3/2\pi$. La Figure 3.5 fournit une vision tridimensionnelle plus complète des lignes de courant

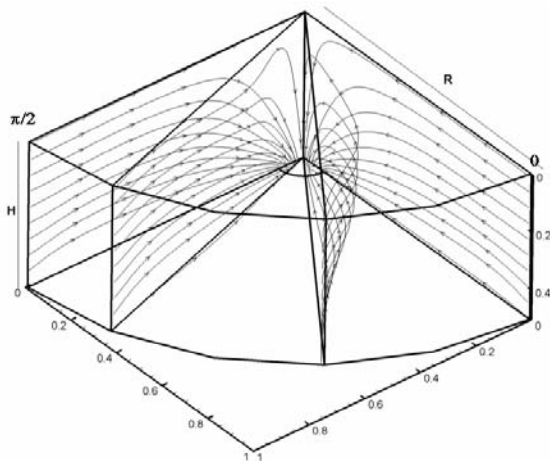


Figure 3.3. vue 3D des lignes de courant pour $Re=26$.

Chapitre 4

Vortex non axisymétrique (stabilité)

Afin d'analyser la possible existence d'une instabilité permettant d'engendrer un mouvement de rotation, et donc mener à la genèse d'un tourbillon, nous mènerons dans ce chapitre une analyse de stabilité linéaire globale tridimensionnelle.

Les équations instationnaires et non linéaires (3.1) sont linearisées autour de l'écoulement de base calculé dans le troisième chapitre.

Encore une fois l'écoulement peut être décomposé comme la somme d'un écoulement de base stationnaire et d'une composante instationnaire qui représente la perturbation:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, r, \theta, t) &= \underline{v}(x, r, \theta) + \underline{v}'(x, r, \theta, t) \\ \tilde{p}(x, r, \theta, t) &= p(x, r, \theta) + p'(x, r, \theta, t)\end{aligned}$$

Si la décomposition est substituée dans les équations de Navier-Stokes (3.1) en négligeant les termes d'ordre supérieur on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial(rv')}{r\partial r} + \frac{\partial w'}{r\partial\theta} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + 2\frac{\partial(uv')}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv'v')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(ruv')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(uw')}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u'w)}{\partial\theta} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{r^2 \partial^2 \theta} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial(uv')}{\partial x} + \frac{\partial(u'v)}{\partial x} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial(rv'v')}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(vw')}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(v'w)}{\partial\theta} + \frac{\partial p'}{\partial r} &= \\ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv')}{\partial r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial v'}{r^2 \partial^2 \theta} - 2\frac{\partial w'}{r^2 \partial\theta} \right) \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial(uw')}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{\partial(u'w)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv'w)}{\partial r} + 2\frac{1}{r}\frac{\partial(w'w')}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial\theta} + \frac{vw'}{r} + \frac{v'w}{r} &= \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv'w')}{\partial r} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial w'}{r^2 \partial^2 \theta} + 2\frac{\partial v'}{r^2 \partial\theta} \right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

La solution est obtenue en utilisant la méthode de correction de la pression semblable à celle utilisée pour l'écoulement de base dans le troisième chapitre. Les valeurs propres sont calculées avec une technique semblable à celle décrite dans le second chapitre même si maintenant les modes azimutaux sont tous couplés entre eux.

Une étude paramétrique est faite à fin de calculer la valeur critique du nombre de Reynolds qui déterminera le seuil d'instabilité de l'écoulement.

La Figure (4,1) montre la variation de la valeur propre la moins stable qui est un nombre réel. Comment peut être facilement observé λ est une fonction croissante du nombre de Reynolds. Pour des basses valeurs du nombre de Reynolds l'écoulement est stable tandis qu'au dessus du seuil $Re_c=26.7$ l'écoulement devient instable.

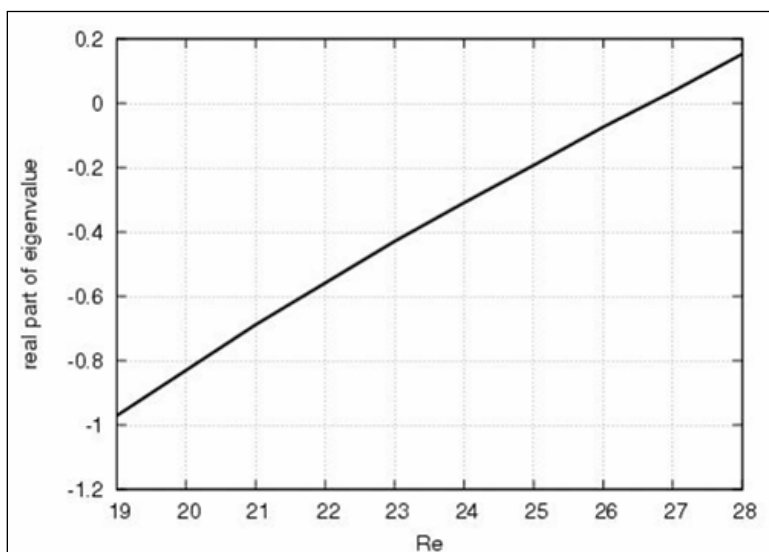
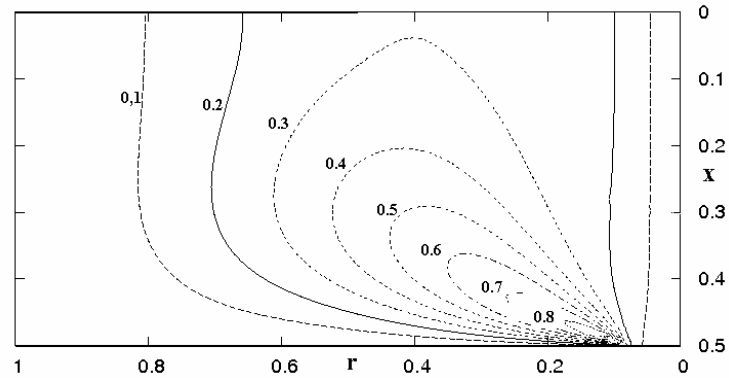


Figure 4,1 Valeur propre la moins stable en fonction du nombre de Reynolds.

Une importante caractéristique de l'instabilité est la présence d'une vitesse tangentielle à moyenne non nulle dans la le mode propre.

Dans la figure les 4,2 on représente les isocontours de la vitesse composante tangentielle $W_0(r,t)$ correspondant au terme axisymétrique de la série de Fourier : cette composante est responsable du mouvement de rotation.



Enfin, la Figure 4,3 représente le module de la vitesse de la fonction propre la plus instable.

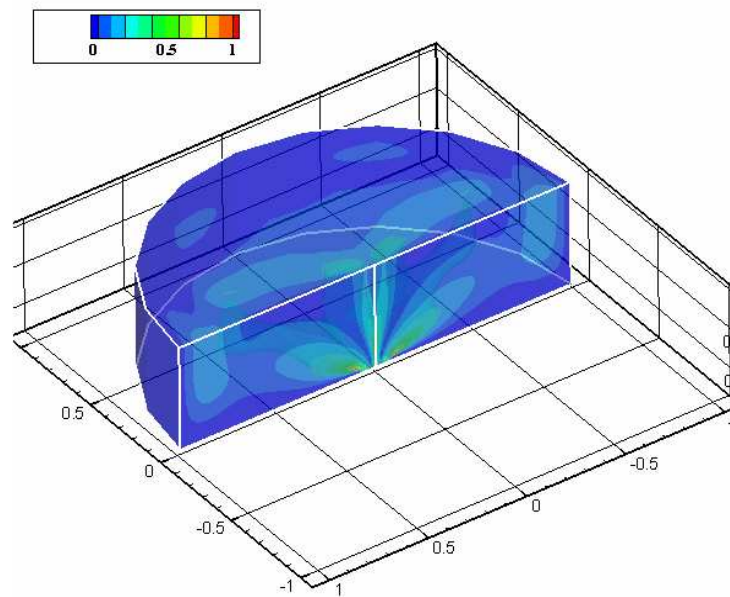


Figure 4.3. Fonction associée à la valeur propre

Chapitre 5

Expérience

Dans ce paragraphe le dispositif expérimental qui a été réalisé à l'institut de mécanique des fluides de Toulouse (IMFT) est décrit. L'expérience permet d'étudier l'écoulement du fluide dans un récipient de forme cylindrique et pourvu de deux entrées perméables latérales, dans une géométrie similaire à celle choisie pour les simulations numériques conduite dans les chapitres précédents. Les résultats obtenus permettent de mieux évaluer les caractéristiques de l'écoulement et sont un important terme de comparaison avec les simulations numériques précédemment conduites.

L'étude expérimentale a été effectuée à l'aide d'un montage expérimental composé de trois récipients reliés entre eux :

- noyau ;
- milieu extérieur ;
- chambre d'alimentation.

Le noyau de l'expérience est composé d'un cylindre creux dont la surface latérale comporte deux ouvertures symétriques pour permettre l'entrée du fluide sans introduire une rotation dans le fluide lui-même.

Au fin d'éviter d'introduire à travers les entrées de la vorticit  non désirée, on a réalisé un filtre composé de deux grilles métalliques de différente finesse ; le filtre à mailles larges (la dimension du côté d'une maille est 2mm) s'est rendue nécessaire pour soutenir le second (plus fin). La fonction de cette première grille est de régulariser l'écoulement en entrée et de préserver la forme cylindrique au niveau des ouvertures, chose qui n'aurait pas été autrement possible à l'aide du seul filtre "fin", constitué d'une grille métallique très déformable de 30 microns de côté.

L'écoulement en sortie s'effectue à travers un orifice circulaire sur le fond en position centrale. Dans la figure suivante est représenté le schéma du noyau de l'expérience (Fig 5.1).

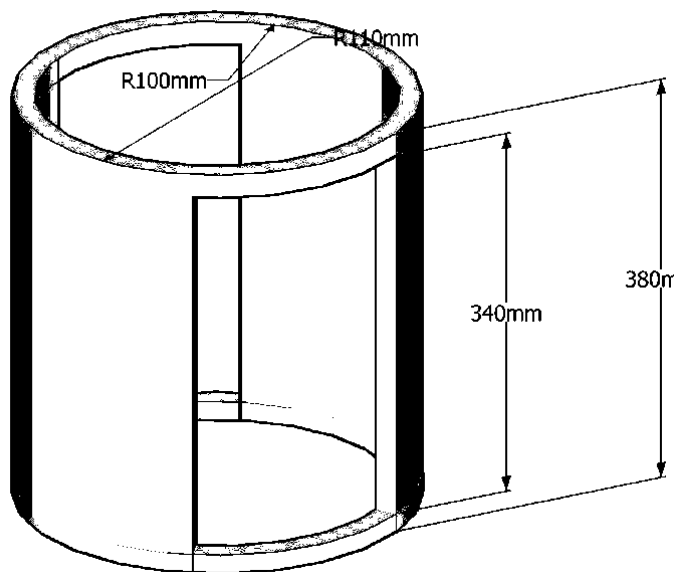


Fig.5.1 Vue en perspective du noyau de l'expérience ; les ouvertures (identiques) latérales sur lesquelles sont ensuite posés les filtres et qui permettent l'entrée du fluide à l'intérieur du cylindre sont clairement visibles

Le noyau de l'expérience est contenu dans un second récipient (indiquée avec le nombre 2 dans l'image suivante) avec la forme d'un parallélépipède creux qui permet l'alimentation du fluide à travers les entrées. L'alimentation continue est obtenue avec une troisième chambre (indiquée avec le nombre 3) d'alimentation dans laquelle le fluide converge à travers deux entrées reliées avec un réservoir (7), posé sous le dispositif. La valeur du débit d'eau peut être facilement réglé. Cette dernière chambre et le récipient décrit précédemment sont séparés d'un filtre de la même nature de celui utilisé pour filtrer l'entrée

du fluide dans le noyau de l'expérience. Au fin d'éviter que le débit en entrée n'introduise des vibrations non désirées les jets en entrée sont envoyés dans un cylindre (4) pourvu de nombreux petits perces posé en position horizontale sur le fond de la chambre d'alimentation et recouvert de matériel spongieux, afin d'amortir des perturbations qui s'introduisent à cause du mouvement induit de la pompe. Pour régler le niveau du fluide, est inséré un tuyau vertical (5) qui peut être réglée à différentes hauteurs en fixant de fait le niveau désiré et en renvoyant au réservoir le fluide en excès. La régulation du débit en sortie du cylindre à travers le canal de drainage (6) est obtenue avec une vanne non représentée par simplicité, à laquelle a été ajouté un régulateur fin du débit. La régulation du débit en entrée se produit au moyen de l'emploi combiné de deux vannes disposées de part et d'autre de la chambre d'alimentation et traverse justement le conduit réglable décrit auparavant.

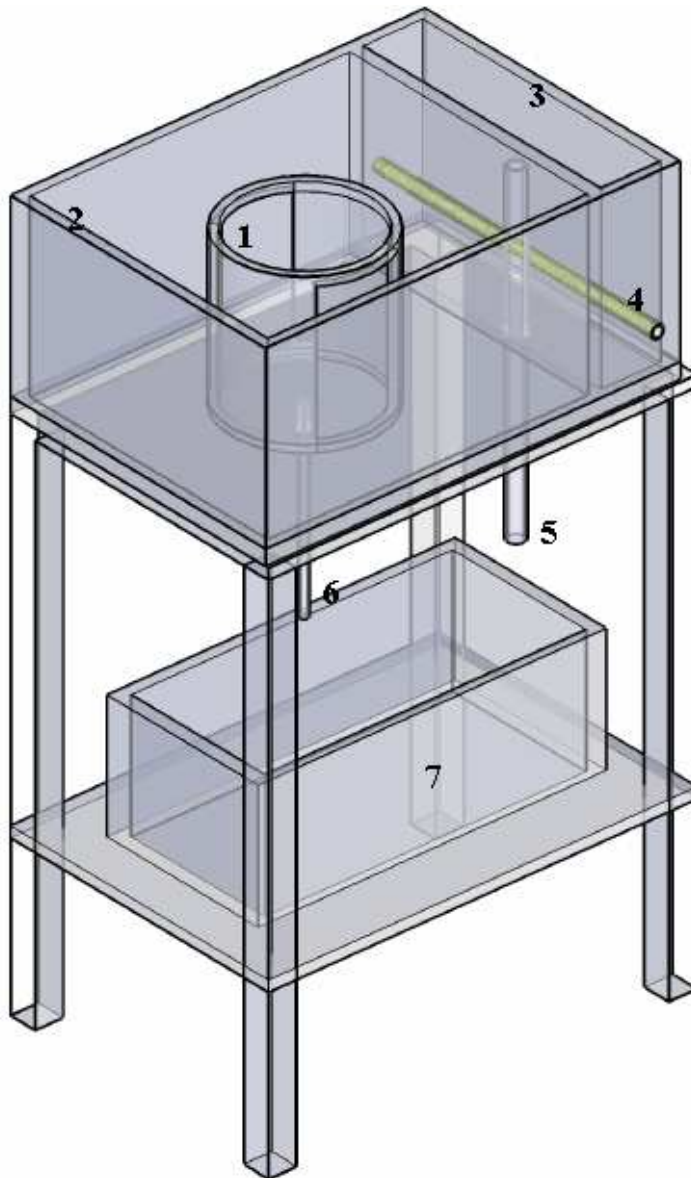


Fig 5,4 Appareil expérimental

1) noyau cylindrique

2) chambre extérieure d'alimentation

- 3) chambre d'alimentation dans laquelle l'eau provenant du réservoir (7) est introduite,
- 4) tube en PVC percé recouvert de matériel spongieux pour l'entrée du fluide (afin de limiter l'introduction de vibrations non désirées) ;
- 5) trop-plein en PVC : la régulation au moyen de la translation verticale ce tuyau permet de fixer le niveau de fluide présent dans le récipient.
- 6) canal de drainage, terminé par une vanne de régulation.

L'instabilité se manifeste avec l'apparition d'une rotation nette à l'intérieur du récipient cylindrique (l'apparition d'un tourbillon en pratique). La mesure de l'intensité de cette rotation a été réalisée avec les techniques de visualisation suivantes :

- Injection de colorant,
- Mesure de la vitesse de révolution d'un petit disque (15mm de diamètre) posé sur la surface libre sur l'axe de symétrie du tourbillon.

Avec une caméra vidéo qui fournit une vue du dessus du noyau cylindrique, on a estimé la vitesse angulaire centrale du tourbillon, en fonction du débit variable.

Les expériences étés sont menées en fixant un niveau H de fluide dans le récipient $H = 50mm$ tandis que le rayon du cylindre est $R = 100mm$ et celui du trou de sortie est $R_0 = 10mm$. La géométrie choisie permet de reproduire celle utilisée dans les simulations numériques des chapîtres précédents. En augmentant le nombre de Reynolds on observe la genèse d'un mouvement de rotation à l'intérieur du récipient central. Dans le graphique suivant est représenté rapportée la valeur observée de la vitesse angulaire au centre du tourbillon :

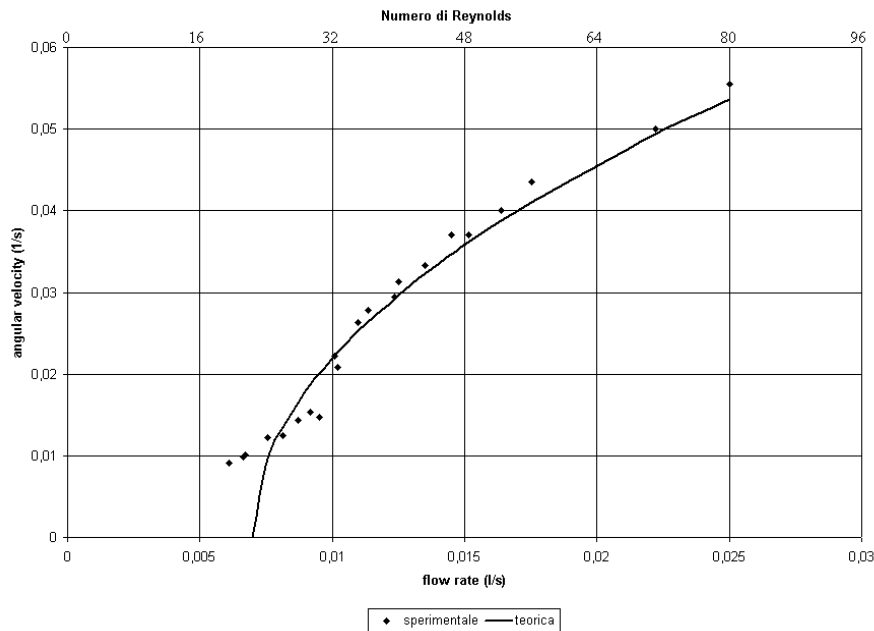


Fig.5.7 Graphique de stabilité : en ordonnées est rapportée la vitesse angulaire à proximité de l'axe de rotation du tourbillon, en abscisses le nombre de Reynolds. En augmentant du nombre de Reynolds on observe la genèse d'un mouvement de rotation à l'intérieur du domaine.

Sur la base des résultats rapportés dans le graphique précédent on peut estimer que l'instabilité apparaît au dessus d'un débit critique $Q = 0,007 \text{ l/s}$ qui correspond, en termes adimensionnels, au nombre de Reynolds :

$$\text{Re}_c = \frac{Q}{2\pi\nu H} \approx 21$$

Le résultat est en bon accord avec les résultats obtenus des simulations dans les chapîtres 3 et 4 dans lesquels on obtenait $\text{Re}_c \approx 27$.

La photographie suivante montre une vue du haut du récipient cylindrique et dans lequel il a été introduit colorant pour visualiser l'écoulement spiral traduisant la présence du tourbillon:

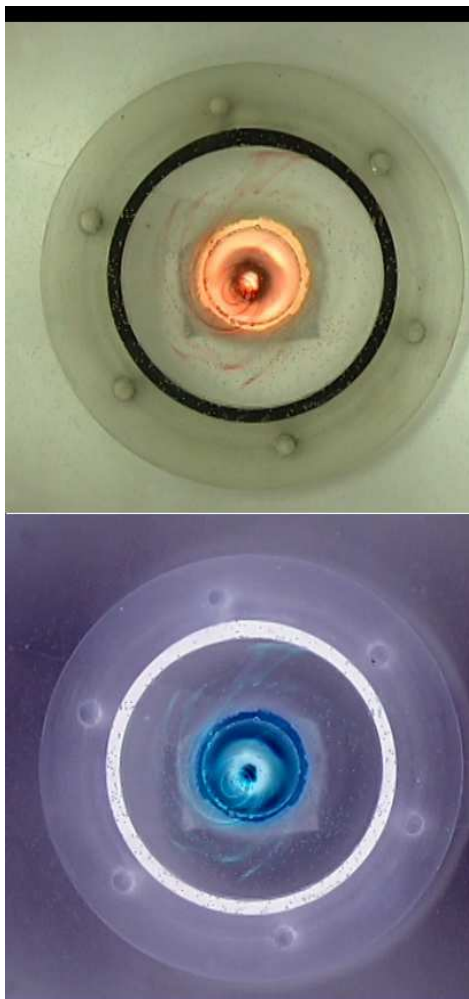


Fig.5.9 la photographie montre la présence du tourbillon dans la zone interne du noyau cylindrique, pour mieux mettre en évidence la rotation on représente en outre le négatif de la première image.

Conclusions

Dans ce travail on a étudié numériquement et expérimentalement la formation de tourbillons à surface libre, en approfondissant l'hypothèse que l'apparition du phénomène soit dû à une instabilité hydrodynamique.

Dans les deux premiers chapitres, on effectue l'analyse de stabilité linéaire d'écoulements axisymétriques. Les résultats, en accord avec ceux obtenus dans [2,3], montrent que de tels écoulement sont stables dans la gamme de nombres de Reynolds pour laquelle a été menée l'étude. Dans le troisième et quatrième chapitres, en se basant sur l'expérience menée par le prof. Kawakubo[1], l'étude a été étendue à des écoulement avec une géométrie non axisymétrique.

Pour une géométrie semblable à celle de l'expérience [1], dans laquelle l'écoulement possède non pas un axe mais plutôt un plan de symétrie, l'étude de stabilité linéaire a cette fois montré que pour $Rec=26.7$ l'écoulement présente une instabilité qui amorce un mouvement de rotation dans le fluide.

Le résultat des simulations semble confirmer que, sous certaines conditions en entrée, la naissance de tourbillons est donc liée à une instabilité hydrodynamique.

Une étude expérimentale, menée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) et décrite dans le cinquième chapitre, a été effectuée pour cette même géométrie cylindrique. Celle-ci a mis en évidence la formation d'un tourbillon pour $Rec=21$ et le résultat est en bon accord avec ceux obtenus des simulations numériques.

Les petites différences entre les valeurs du nombre de Reynolds critique obtenu entre l'enquête numérique et celle expérimentale peuvent être attribuées à des conditions d'entrée du fluide légèrement différentes dans les deux cas.

En conclusion, les résultats expérimentaux et numériques établis confirment la thèse que les tourbillons puissent être engendrés par un phénomène d'instabilité.

Les résultats obtenus montrent que, si l'écoulement reste instable pour certaines valeurs du débit, les procédés classiques pour la suppression des tourbillons ne sont pas suffisantes puisque même en conditions de symétrie on peut relever la naissance d'un mouvement rotatoire non lié à l'accumulation de vorticité mais plutôt à une instabilité.

En effet dans les centrales hydro-électriques le projet du bassin, l'orientation et le positionnement des conduites sont faites selon des règles ayant pour objectif principal de contrôler et supprimer les structures tourbillonnaires en agissant sur la géométrie du bassin et des divers éléments qui composent le barrage. On a en particulier souvent on recourt à des déviateurs et à des redresseurs de écoulement avec balais, afin de réduire les asymétries de l'écoulement à l'approche la zone du conduit de drainage.

Il est opportun par contre que le projet soit complété par une analyse qui établisse quelles valeurs des paramètres (typiquement le débit à travers la conduite forcée et la géométrie d'entrée du fluide) conduisent à une instabilité, même en présence de dispositifs de redressement.

L'étude ici présentée constitue la première confirmation par simulation et expérience menés en conditions comparables qu'une instabilité hydrodynamique peut mener à la formation d'un tourbillon. Elle constitue en outre une base pour les études suivantes qui viseront à établir plus en détails l'effet que l'instabilité joue dans le mécanisme de formation des tourbillons.

Un premier aspect qui mérite d'être approfondi est d'évaluer l'incidence qu'ont sur l'apparition du mouvement de rotation les variables telles que la géométrie de l'entrée du fluide, le rapport de forme et sous quelles conditions elles tardent ou favorisent la formation du tourbillon.

Un second champ d'enquête concerne la modélisation et l'analyse de stabilité de tourbillons pour lesquels la surface libre est de forme plus générale.

Cette typologie de tourbillons est en effet souvent relevée dans des problèmes de caractère pratique et la relation entre le champ de vitesse du tourbillon et la forme de sa surface représente une autre donnée importante du problème.

Bibliografia

Bibliographie

- [1] Kawakubo, T., Tsuchiya, Y., Sugaya, M., and Matsumura, K. (1978). Formation of a vortex around a sink: a kind of phase transition in a non-equilibrium open system. *Phys. Letters*, 68 , n. 1.
- [2] Sanmiguel-Rojas, E., Fernandez-Feria, R. (2006). Nonlinear instabilities in a vertical pipe flow discharging from a cylindrical container. *Phys. Fluids*, 18(2), 024101.
- [3] Sanmiguel-Rojas, E., Fernandez-Feria, R. (2005). Tesis doctoral “Sobre el fenomeno de la autorotacion”. Universidad de Malaga, Escuela tecnica Superior de Ingegneros Industriales, Spain
- [4] Andrade E.N da C., “Whirlpools, vortices and bath tubs” *New Scientist* 325, 302-304 (1963)
- [5] Pozirikidis “Introduction to theoretical and computational Fluid Dynamics”; Oxford University Press, 1997
- [6] H.Schlichting “ Boundary Layer theory” 7th edition ; Mc Graw-Hill, 1979
- [7] C.A.J Fletcher “Computational techniques for Fluid Dynamics 1 e 2 Vol. Springer-Verlag, 1991
- [8] J.D.Anderson Jr . “Computational Fluid Dynamics” Mc graw-Hill, 1995
- [9] L Gary Leal “Laminar Flow and convective transport Processes” Butterworth-Heinemann

- [10] B.K.Shivamoggi “ Theoretical fluid dynamics” Martinus Nijhoff Publishers, 1985
- [11] J.H Ferziger M.Peric “Computational Methods for fluid Dynamics” Springer, 2002
- [12] D.Pnueli C.Gutfinger “Meccanica dei Fluidi” Zanichelli, 2000
- [13] G.K Batchelor “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge University Press
- [14] F.trivellato E.Bertolazzi B.Firmiani “Finite Volume modelling of free surface draining vortices” Journal of Computational and Applied Mathematics Vol 103, 1999
- [15] J.Miles “A note on the Burgers-Rott vortex with a free surface” Vol 49 ZAMP 1998
- [16]A.Shapiro “ A centrifugal wave solution of Euler and Navier-Stokes equations” ZAMP Vol.52, 2001
- [17] M.Tome, J.Murakami,A Cunimato ed altri “ Numerical Simulation of Axisymmetric Free Surface Flow” Journal of Computational Physics Vol 157,2000;
- [18] Y.Zhao, H.H. Tan B.Zhan “A High-resolution Characteristics-Based Implicit Dual time Stepping VOF Method for Free Surface Flow Simulation on Unstructured Grids” Journal of Computational Physics Vol 183, 2002
- [19]E.H. van Brummelen H.C: Raven B.Koren ” Efficient Numerical Solution of Steady Free Surface Navier-Stokes Flow” Journal of Computational Physics Vol 174, 2001

[20] D.Lanser, J.Blom JVerwer “Time integration of the Shallow Water Equations in Spherical Geometry” Journal of Computational Physics Vol 171, 2001

[21] B.Hodeges R.Street “On simulation of turbulent Nonlinear Free Surface Flows” Journal of Computational Physics Vol 151, 1998

[22] F.Sousa ed altri “A front tracking/front capturing method for the simulation of 3D multi-fluid flows whit free surfaces” Journal of Computational Physics Vol 198, 2004

[23]J.Kim D.Kim H.Choi ”An immersed Boundary Finite Volume method for Simulations of flow in Complex Geometries” Journal of Computational Physics Vol 171, 2001

[24] Zhiyu Shao, Scott A .Yost “A portable numerical method for simulating 2D unsteady free-surface flow”

[25] Mark Sussman, Ann S. Almgren, John B. Bell, Phillip Colella, Louis H. Howell, and Michael L. Welcome “An Adaptive Level Set Approach for Incompressible Two-Phase Flows” Journal of Computational Physics, 148 (1999)

[26] Fang Wang “Development of Free Surface Tracking Algorithms for Fusion Welding Simulations”

[27] Youhei Morinishi , Oleg V. Vasilyev , Takeshi Ogi “Fully Conservative Finite Difference Scheme in Cylindrical Coordinates for Incompressible Flow Simulations”

[28] Norberto Mangiavacchi ed altri “simulation of 3-d free-surface flows with surface tension”

[29] Lundgren “the vertical flow above the drain-hole in a rotating vessel” Journal of Fluid Mechanics Vol 155, 1985

[30] A.Andersen “Vortex flows whit a free surface” 2002

[31] D. Vischer, W.Hanger “Dam Hydraulics” Wiley press 1998