THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *18 Juin 2015* **par :**

Solym Mawaki MANOU-ABI

Théorèmes limites et ordres stochastiques relatifs aux lois et processus stables

JURY

Jean-Christophe BRETON	Université de Rennes 1	Rapporteur
Patrick CATTIAUX	Université Paul Sabatier	Directeur
Laure COUTIN	Université Paul Sabatier	Examinatrice
Arnaud GUILLIN	Université Blaise Pascal	Examinateur
Aldéric JOULIN	INSA de Toulouse	Directeur
Christian LÉONARD	Université Paris X Nanterre	Rapporteur

École doctorale et spécialité :
MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées
Unité de Recherche :
Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)
Directeur(s) de Thèse :
Patrick CATTIAUX et *Aldéric JOULIN*
Rapporteurs :
Jean-Christophe BRETON et *Christian LÉONARD*

Remerciements

Je ne serai pas arrivé au bout de ce travail de recherche sans la collaboration de plusieurs personnes que je tiens à remercier dans ces lignes.
Je souhaite en premier lieu exprimer toute ma gratitude envers mes directeurs de thèse, Patrick Cattiaux et Aldéric Joulin. A travers eux, j'ai pu acquérir des qualités scientifiques. Leur rigueur, leur sincérité et leur dynamisme vis-à-vis de ce travail m'a beaucoup aidé pour mener cette thèse à son terme. J'aimerais donc les remercier pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral et pour toutes les heures qu'ils m'ont consacrées.

Je suis très honoré que Jean-Christophe Breton et Christian Léonard aient accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je les remercie pour le temps qu'ils ont consacré à mon travail.

Cette thèse a bénéficié de différentes sources de financement, je remercie à cet effet le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées, le jury d'attribution du prix Ibni 2011, Campus France pour la bourse d'excellence Eiffel et aussi l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT). Je remercie aussi Papa Ngom de l'Université Cheikh Anta Diop (Sénégal), pour sa collaboration administrative ayant permis de démarrer cette thèse.

Je tiens à remercier Laure Coutin pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse, je la remercie aussi pour son aide administrative dans le cadre de mon stage de Master 2 à l'IMT quelques années plus tôt.

Je remercie également Arnaud Guillin pour l'honneur qu'il me fait d'être dans mon jury de thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux personnels administratifs et informatiques de l'IMT et de l'Université Paul Sabatier pour les nombreuses fois où j'ai fait appel à eux; je pense à Marie-Laure Ausset, Tamara Azaiez, Céline Rosier, Françoise Michel, Catherine Stasiulis et également ceux que j'ai pu oublier.

Merci à tous les thésards et anciens thésards avec qui j'ai eu de nombreux échanges notamment Claire Boyer, Renand Gobard et Marius Kwemard. Merci à Sophie Dabo-Niang qui m'a toujours encouragé dans mon travail de thèse.

Je remercie chaleureusement ma famille d'ici et d'ailleurs, qui m'ont apporté le soutien affectif nécessaire tout au long de ces années de thèse. Merci à Chérita, Émilie, Éric, Éssowè, Georges-Hervé, Hervé et Samtou. A titre plus personnel et avec beaucoup de tendresse, merci à mon adorable Georgina qui partage ma vie.

Pour finir je ne saurais oublier, bien que je ne les cite pas, toutes celles et ceux dont la gentillesse, le sourire et l'attention m'aident à avancer dans la vie.

Aux deux étoiles qui brillent dans le Ciel et qui resteront toujours dans mon cœur.

Merci pour l'éducation que vous m'avez donnée.

Résumé

Cette thèse se compose de trois parties indépendantes, toutes en rapport avec les lois et processus stables.
Dans un premier temps, nous établissons des théorèmes de convergence (principe d'invariance) vers des processus stables. Les objets considérés sont des fonctionnelles additives de carrés non intégrables d'une chaîne de Markov à temps discret. L'approche envisagée repose sur l'utilisation des coefficients de mélange pour les chaînes de Markov.
Dans un second temps, nous obtenons des vitesses de convergence vers des lois stables dans le théorème central limite généralisé à l'aide des propriétés de la distance idéale de Zolotarev.
La dernière partie est consacrée à l'étude des ordres stochastiques convexes ou inégalités de comparaison convexe entre des intégrales stochastiques dirigées par des processus stables. L'idée principale sur laquelle reposent les résultats consiste à adapter au contexte stable le calcul stochastique forward-backward.

Mots-clés: Processus stable, loi stable, chaîne de Markov, théorème limite, vitesse de convergence, distance idéale, intégrale stochastique, ordre stochastique.

Abstract

This PhD Thesis is composed of three independent parts about stable laws and processes.
In the first part, we establish convergence theorems (invariance principle) to stable processes, for additive functionals of a discrete time Markov chain that are not assumed to be square-integrable. The method is based on the use of mixing coefficients for Markov chains.
In the second part, we obtain some rates of convergence to stable laws in the generalized central limit theorem by means of the Zolotarev ideal probability metric.
The last part of the thesis is devoted to the study of convex ordering or convex comparison inequalities between stochastic integrals driven by stable processes. The main idea of our results is based on the forward-backward stochastic calculus for the stable case.

Key words: Stable process, stable law, Markov chain, limit theorem, rate of convergence, ideal probability metric, stochastic integral, stochastic order.

Table des Matières

Chapitre 1

Présentation générale

Cette thèse a été réalisée à l'Université Paul Sabatier, Toulouse 3 (France) grâce à une cotutelle avec l'Université Cheikh Anta Diop (Sénégal). Les thèmes développés tournent autour des lois et processus α-stables, à savoir les théorèmes de convergence (principe d'invariance) vers des processus α-stables de fonctionnelles markoviennes de carrés non intégrables, l'étude des vitesses de convergence pour la distance idéale de Zolotarev dans le Théorème Central Limite (TCL) généralisé c'est-à-dire dans le cadre de la convergence vers des lois α-stables de sommes partielles de variables aléatoires (v.a.) indépendantes et identiquement distribuées (iid) de carrés non intégrables, et l'étude des ordres stochastiques convexes ou inégalités de comparaison convexe pour des intégrales stochastiques dirigées par des processus α-stables. Nous présentons dans ce chapitre introductif un état de la littérature puis les contributions de cette thèse.

1.1 Les théorèmes limites

L'étude des théorèmes limites est plus que jamais d'actualité, tant du point de vue des nombreuses applications issues de la modélisation statistique que pour des fins théoriques. Le TCL établit les conditions sous lesquelles la somme d'un grand nombre de v.a. iid est proche de la loi normale et le principe d'invariance en est la version fonctionnelle. Des généralisations de ces théorèmes limites vers des lois et processus α-stables ont été établies par certains chercheurs dont les précurseurs Kolmogorov et Lévy. Les lois et processus α-stables se sont révélés importants pour modéliser certains phénomènes de diffusion anormaux dans des disciplines liées aux mathématiques comme la physique, la finance et l'économie. La plus connue des lois α-stables est la loi normale correspondant au cas $\alpha = 2$. Une des difficultés des lois stables limitant leur utilisation dans la pratique est l'absence de formules explicites des densités de probabilité, sauf dans quelques cas bien précis comme par exemple la loi normale ou la loi de Cauchy correspondant à $\alpha = 1$. L'autre problème avec les lois stables est que pour $\alpha < 2$, il n'y a pas de variance et aussi de moment d'ordre 1 lorsque $\alpha \in (0, 1]$. Dans cette section qui constitue la première thématique de ma thèse, nous allons décrire des théorèmes de convergence de fonctionnelles additives markoviennes :

$$S_n(\Psi) = \sum_{k=0}^{n} \Psi(X_k), \tag{1.1.1}$$

où $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov supposée irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ et d'espace d'état $(E, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ désigne la tribu engendrée par les sous ensembles de E, la fonction Ψ étant définie sur l'espace d'état de la chaîne de Markov. Plus généralement, nous allons décrire la convergence de $\big(S_{[nt]}(\Psi), t \in [0,T]\big)$ dans $D[0,T]$ (l'espace de Skorokhod des fonctions définies sur $[0,T]$ continues à droite et admettant des limites à gauche (càdlàg[1])), T désignant un horizon fixé.
Dans tout ce manuscrit les éléments aléatoires que nous considérons sont définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1.1 Comportement en temps long des chaînes de Markov

Un processus aléatoire est dit de Markov si son évolution future est fondée uniquement sur son état présent i.e., conditionnellement à l'état présent, le futur et le passé sont indépendants. Les chaînes de Markov ont été introduites au début du 20ème siècle par le mathématicien russe Andrei Markov. Pour des détails sur les notions et propriétés sur les chaînes de Markov on pourra consulter les références : [HÖ2], [Num04], [LPW08] et [Woe09] . Cependant, pour les besoins de cette thèse il nous est apparu nécessaire de faire quelques rappels sur le comportement en temps long d'une chaîne de Markov. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov supposée irréductible, apériodique et positive récurrente, de mesure invariante μ, d'espace d'état E et de noyau de transition P.
Notons que si la loi initiale de la chaîne de Markov est la mesure invariante alors la loi de la chaîne est la même à tout instant : on dit que la chaîne est stationnaire. Cela correspond d'un point de vue physique à un état d'équilibre de la chaîne. Étant donné qu'une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive récurrente converge vers sa mesure invariante, quelle que soit la mesure initiale, il convient de trouver des bornes quantitatives pour lesquelles ce phénomène a lieu. Pour cela nous allons décrire des critères dits de Lyapunov. Nous supposons que l'espace d'état E est discret afin de simplifier la présentation.
Soit $\mathcal{L}$ le générateur de la chaîne défini par $\mathcal{L} = P - I$.

Définition 1.1.2 *On appelle fonction de Lyapunov une fonction $V \geq 1$ vérifiant la*

[1] abrégé de continu à droite avec limite à gauche

relation

$$\mathcal{L}V \leq -f + b1_{\{a\}},$$

où a et b sont des réels et f est une fonction minorée.

Donnons un exemple de fonction de Lyapunov.

$$\text{Posons} \qquad V_a^\kappa(x) = \mathbb{E}_x[e^{\kappa\tau_a}], \quad \kappa > 0, \quad x \in E,$$

avec $\tau_a = \inf\{n \geq 0; X_n = a\}$ et définissons le temps d'atteinte de a par
$T_a = \inf\{n \geq 1; X_n = a\}$.
Observons que $V_a^\kappa \geq 1$. Si l'on suppose que V_a^κ est finie alors on a,

$$\mathcal{L}V_a^\kappa \leq -(1 - e^{-\kappa})V_a^\kappa + b_\kappa 1_{\{a\}}, \quad \text{avec} \quad b_\kappa = \mathbb{E}_a[e^{\kappa T_a}]. \tag{1.1.3}$$

En effet remarquons que par la propriété de Markov, on a

$$PV_a^\kappa(x) = \mathbb{E}_x[V_a^\kappa(X_1)] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_1}[e^{\kappa\tau_a}]\right]$$

$$= \begin{cases} e^{-\kappa}V_a(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \mathbb{E}_a[e^{\kappa T_a}] & \text{si} \quad x = a. \end{cases}$$

L'existence des fonctions de Lyapunov permet de déterminer la nature des vitesses de convergence et d'assurer l'intégrabilité des temps d'atteinte de la chaîne. On peut s'en convaincre à travers le théorème suivant.

Notation. La distance en variation totale entre deux mesures de probabilité ν_1 et ν_2 notée $d_{VT}(\nu_1, \nu_2)$ est définie par

$$d_{VT}(\nu_1, \nu_2) = \sup_{A \in \mathcal{E}} |\nu_1(A) - \nu_2(A)|.$$

On notera aussi que $\mu(f)$ et $\mathrm{Var}_\mu(f)$ correspondent à :

$$\mu(f) := \int_E f d\mu, \quad \mathrm{Var}_\mu(f) = \mu(f^2) - (\mu(f))^2.$$

Théorème 1.1.4 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'état E et de noyau de transition P supposé irréductible, apériodique et positive récurrent. Soit μ sa mesure* *invariante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe une constante $\tilde{\tau} > 1$ *telle que :* $\mathbb{E}_x[\tilde{\tau}^{T_a}] < \infty$ *pour tout* $x \in E$*.*

(2) Il existe une fonction de Lyapunov V*, une constante positive* θ^* *et une constante réelle* b^* *telles que :*

$$\mathcal{L}V \leq -\theta^* V + b^* 1_{\{a\}}. \tag{1.1.5}$$

(3) Il existe une constante $\delta \in (0,1)$ *telle que pour tout* $x \in E$ *il existe* $C(x)$ *une constante dépendant de* x *et on a*

$$d_{VT}(P^n(x,.), \mu(.)) \leq C(x)\delta^n.$$

De plus si μ *est réversible alors les assertions précédentes sont équivalentes à :*

(4) il existe une constante positive $C_P < \infty$ *telle qu'on ait l'inégalité de Poincaré pour* P^2 *:*

$$Var_\mu(f) \leq C_P\, \mathcal{E}_2(f,f), \quad \forall f \in \mathbb{L}^2(\mu), \tag{1.1.6}$$

où $\mathcal{E}_2(f,f)$ *est la forme de Dirichlet associée à* P^2 *et définie par*

$$\mathcal{E}_2(f,f) = \langle (I - P^2)f, f\rangle.$$

(5) ***Condition de trou spectral*** *: il existe une constante* $\lambda^* > 0$ *telle que :*

$$Var_\mu(P^n f) \leq e^{-2\lambda^* n}\, Var_\mu(f), \quad \forall n \geq 0, \quad \forall f \in \mathbb{L}^2(\mu). \tag{1.1.7}$$

L'inégalité de Poincaré est associée à P^2 afin de contrôler la convergence de la chaîne vers la mesure invariante car sinon l'inégalité de Poincaré pour P est insuffisante. L'inégalité (1.1.7) est appelée condition de trou spectral en raison des liens étroits qu'elle possède avec la théorie spectrale. Notons que, même dans le cas où μ n'est pas réversible l'équivalence entre (1.1.6) et (1.1.7) est vérifiée. Les parties (1), (2) et (3) du théorème sont des résultats dans [MT93a]. Le lien entre l'inégalité de Poincaré et la condition de trou spectral est bien connu dans la littérature. Dans les lignes suivantes, nous proposons une démonstration simple de la relation (3) impliquant (5) lorsque X_0 suit la loi ν définie par $\nu(dx) = h(x)\mu(dx)$ avec $h \in \mathbb{L}^2(\mu)$.

Preuve. Supposons que μ est réversible et soit f une fonction bornée telle que $\mu(f) = 0$. Si f n'est pas identiquement nulle, $h = f_+/(\int f_+ d\mu)$ représente une densité de probabilité bornée. Notons que X_n suit la loi $P^n h(x)\mu(dx)$ et dans ce cas si (3) a lieu alors on a,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\mu(P^n f_+) &= \int_E (P^n f_+ - \mu(f_+))^2 \, d\mu \, \leq 2 \parallel f \parallel_\infty \int_E (|P^n f_+ - \mu(f_+)|) \, d\mu \\
&\leq 2 \parallel f \parallel_\infty \, \mu(f_+) \int_E (|P^n h - 1|) \, d\mu \\
&= 2 \parallel f \parallel_\infty \, \mu(f_+) \, d_{VT}(\mathcal{L}(X_n), \mu) \\
&\leq 2 \parallel f \parallel_\infty^2 \, \mu(C) \, \delta^n \, .
\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité on a utilisé le fait que la distance en variation totale est équivalente à la norme $\mathbb{L}^1$ des densités de probabilité. Il s'en suit en considérant les mêmes estimations pour f_- que

$$\mathrm{Var}_\mu(P^n f) \leq 2 \, (\mathrm{Var}_\mu(P^n f_+) + \mathrm{Var}_\mu(P^n f_-)) \leq 8\mu(C) \, \delta^n \, \parallel f \parallel_\infty^2 . \tag{1.1.8}$$

Soit maintenant le lemme suivant.

Lemme 1.1.9 *Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble dense de $\mathbb{L}^2(\mu)$ et supposons qu'il existe une constante $\varrho > 0$ telle que*

$$Var_\mu(P^n f) \leq c_f e^{-\varrho n} \quad \forall n \geq 0,$$

où $f \in \mathcal{C}$ et c_f est une constante positive dépendant de f. Alors pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ on a

$$Var_\mu(P^n f) \leq e^{-\varrho n} \, Var_\mu(f), \quad \forall n \geq 0.$$

Il est suggéré de se référer au Chapitre 2 de ce manuscrit à la Section 2.2.2 pour les détails de la preuve. Maintenant comme P est un opérateur symétrique dans $\mathbb{L}^2(\mu)$ alors grâce à ce lemme, ceci implique la relation (5). ∎

Intéressons-nous à un modèle de chaîne de Markov.

Exemple 1.1.10 ***La chaîne de naissance et de mort.***
La chaîne de naissance et de mort est une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble d'état $\mathbb{N}$ de noyau de transition P défini par :

$$P(x, x-1) := q_x, \quad P(x, x) := r_x, \quad P(x, x+1) := p_x,$$

avec

$$\begin{cases} p_x + q_x + r_x = 1 \\ q_0 = 0 \\ q_x > 0 \quad si \quad x > 0 \\ p_x > 0. \end{cases} \tag{1.1.11}$$

Les conditions $p_x, q_x > 0$ impliquent que tous les états communiquent, c'est-à-dire que la chaîne est irréductible. Si $r_0 > 0$ alors la chaîne est apériodique.

$$\textit{Posons} \quad \gamma_x = \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x}, \quad \gamma_0 = 1.$$

La chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty.$$

Une mesure invariante et réversible est donnée par $\mu(x) = \mu(0)\gamma_x$ où $\mu(0) := (\sum_{x\geq 0} \gamma_x)^{-1}$ est la constante de normalisation faisant de μ une mesure de probabilité.

On peut faire une illustration des conditions de Lyapunov dans le théorème précédent pour la chaîne de naissance et de mort. L'existence des fonctions de Lyapunov V telles que

$$\mathcal{L}V \leq -\theta^* V + b^* 1_{\{a\}}, \quad \theta^* > 0,$$

est équivalente à la condition

$$q_x \geq \frac{(1-\theta^*)a}{a-1} + a\, p_x, \quad \forall x \geq 1.$$

1.1.2 Convergence de fonctionnelles additives markoviennes de carrés intégrables

Nous considérons dans cette section les fonctionnelles additives markoviennes de carrés intégrables c'est-à-dire

$$S_n(\Psi) = \sum_{k=0}^{n} \Psi(X_k), \tag{1.1.12}$$

où $\Psi \in \mathbb{L}^2(\mu)$ et μ désignant la mesure invariante de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ supposée irréductible, apériodique et positive récurrente. L'étude des théorèmes de convergence dans ce contexte a fait l'objet d'une littérature abondante au milieu du 20ème siècle et il est bien connu que les v.a. gaussiennes et le processus de Wiener (mouvement brownien) apparaissent comme les objets limites de $S_n(\Psi)$ et de $(S_{[nt]}(\Psi), t \in [0,T])$. Nous utiliserons dans cette thèse deux techniques d'obtention de théorèmes limites : la technique de réduction en convergence de martingale et la technique du mélange.

L'approche par réduction en convergence de martingale

Le but est de montrer comment l'étude de la convergence d'une fonctionnelle additive associée à une chaîne de Markov se ramène à l'étude de la convergence de martingale. Pour cela, il faut résoudre l'équation de Poisson associée. Cette technique a été initiée par Gordin, dans l'article [Gor69]. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov possédant une mesure invariante μ. Supposons qu'il existe une solution g de l'équation de Poisson

$$(P-I)g = -\Psi, \tag{1.1.13}$$

pour une certaine fonction donnée Ψ.

$$\text{Soit} \quad Z_k = g(X_k) - Pg(X_{k-1}), \quad \forall k \geq 1.$$

Posons $M_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

Il est facile de vérifier que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration canonique $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ de la chaîne de Markov et que

$$S_{n-1}(\Psi) := \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(X_k) = M_n - g(X_n) + Pg(X_0). \tag{1.1.14}$$

Ainsi l'équation (1.1.14) traduit l'approche par réduction en convergence de martingale car le comportement asymptotique lorsque $n \to \infty$ de $S_{n-1}(\Psi)$ ou de $S_n(\Psi)$ se déduit de celui de la martingale M_n tant que le reste $R_n := -g(X_n) + Pg(X_0)$ tend vers zéro dans un sens convenablement choisi.

Notation. On note $\mathbb{P}_\mu$, la loi de la chaîne sachant que X_0 a pour loi μ.

Dans le cadre de la méthode de réduction en convergence de martingale, on déduit le résultat suivant à partir des théorèmes limites connus sur les martingales, par exemple dans les travaux : [Bil61], [Ibr63], [Bro71], [Hey74] et [Hel82].

Théorème 1.1.15 *Soit Ψ une fonction dans $\mathbb{L}^2(\mu)$ telle que $\mu(\Psi) = 0$ et supposons qu'il existe une solution $g \in \mathbb{L}^2(\mu)$ de l'équation de Poisson (1.1.13). Alors pour $n \to \infty$, sous la loi $\mathbb{P}_\mu$, $n^{-1/2}\left(S_n(\Psi) - n\mu(\Psi)\right)$ converge en loi vers une v.a. gaussienne centrée de variance $\sigma_g^2 := \mu(g^2) - \mu((Pg)^2)$.*

Un théorème central limite fonctionnel dans l'espace de Skorokhod (principe d'invariance) est aussi avéré sous les mêmes hypothèses, en particulier pour des processus de Markov à temps continu. On pourra consulter à cet effet les travaux : [Bha82], [Sep06] et [OLK12]. La solution de l'équation de Poisson n'existe pas toujours mais pour une chaîne irréductible, apériodique et positive récurrente, la solution, si elle existe, est donnée par le noyau potentiel

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \Psi,$$

tant que la série converge dans $\mathbb{L}^2(\mu)$. Il est facile de voir que la condition de trou spectral suffit pour garantir l'existence de g. Il existe aussi d'autres conditions basées sur des critères de sommabilité du semi-groupe associé dans [CCG12] assurant l'existence de la solution de l'équation de Poisson. Toutefois l'usage de la théorie spectrale dans $\mathbb{L}^2(\mu)$ lorsque μ est réversible permet d'aboutir à d'autres types de considération, en guise d'exemple mentionnons le résultat suivant tiré des travaux dans [KV86].

Théorème 1.1.16 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ supposée réversible. Soit $\Psi \in L^2(\mu)$ une fonction telle que $\mu(\Psi) = 0$. Si*

$$\sigma_\Psi^2 := \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n(\Psi)^2]}{n} = \mathbb{E}[\Psi^2(X_0)] + 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\Psi(X_0)\Psi(X_i)\right] < \infty,$$

alors sous la loi $\mathbb{P}_\mu$, pour $n \to \infty$, $n^{-1/2}(S_n(\Psi) - n\mu(\Psi))$ converge en loi vers une v.a. gaussienne centrée de variance σ_Ψ^2.

D'autres résultats analogues existent dans la littérature, voir par exemple [MW00], [DL03] et [Jon04].

Approche du mélange

Nous présentons dans cette approche basée sur l'utilisation des mesures de dépendance, la convergence des fonctionnelles markoviennes sous des conditions dites de mélange. Nous donnons ici quelques rappels sur trois types de coefficients de mélange. Pour toute tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, notons par $L^2(\mathcal{A})$ l'espace des variables aléatoires de carrés intégrables, $\mathcal{A}$-mesurable et soit A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Étant donné une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit les tribus $\mathcal{F}_j = \sigma(U_0, U_1, \ldots, U_j)$ et $\mathcal{G}_j = \sigma(U_j, U_{j+1}, \ldots)$.

1. Le coefficient de mélange fort $\alpha(n)$ est défini par

$$\alpha(n) = \sup_j \sup_{A,B} \{|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \; A \in \mathcal{F}_j, \; B \in \mathcal{G}_{j+n}\}.$$

   Nous dirons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement mélangeante si $\alpha(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

2. Le coefficient de ρ-mélange $\rho(n)$ est défini par

$$\rho(n) = \sup_j \sup_{F,G} \{ \; |Corr(F, G)| \, , \; F \in L^2(\mathcal{F}_j) \, , \; G \in L^2(\mathcal{G}_{n+j})\} \, ,$$

   où $\mathrm{Corr}(F, G)$ désigne le coefficient de corrélation entre les v.a. F et G défini par

$$\mathrm{Corr}(F, G) = \frac{\mathbb{E}[FG] - \mathbb{E}[F]\,\mathbb{E}[G]}{\sqrt{\mathrm{Var}(F)}\sqrt{\mathrm{Var}(G)}},$$

   où Var désigne la variance. On dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ρ-mélangeante si $\rho(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. Le coefficient de ϕ-mélange ou d'uniforme mélange $\phi(n)$ est défini par

$$\phi(n) = \sup_j \{ \sup_{A,B} |\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)| \; , \; A \in \mathcal{F}_j \; , \; B \in \mathcal{G}_{j+n}\}.$$

   On dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ϕ-mélangeante si $\phi(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Le lien entre ces coefficients de mélange est fourni par les relations :

$$2\alpha(n) \le \phi(n), \quad 4\alpha(n) \le \rho(n), \quad \text{et} \quad \rho(n) \le 2\sqrt{\phi(n)}.$$

Remarque 1.1.17 *Notons que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov stationnaire alors*

$$\alpha(n) = \sup_{A\in\sigma(U_0),\, B\in\sigma(U_n)} |\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|\,,$$

$$\rho(n) = \sup_{F\in\sigma(U_0),\, G\in\sigma(U_n)} |Corr(F,G)|,$$

et

$$\phi(n) = \sup_{A\in\sigma(U_0),\, B\in\sigma(U_n)} |\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)|\,.$$

Notons aussi que les coefficients de mélange de la suite $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour une certaine fonction mesurable f sont contrôlés par ceux de la suite sous-jacente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut décrire l'implication de ces conditions de mélange dans l'obtention des théorèmes de convergence pour des fonctionnelles additives markoviennes de carrés intégrables. Le résultat suivant est obtenu à partir des travaux sur les suites de v.a. mélangeantes dans [Ibr62], [Pel82], [Her84], [Her85], [Dou03] [Bra05] et [M06].

Théorème 1.1.18 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ. Soit $\Psi \in \mathbb{L}^2(\mu)$ une fonction telle que $\mu(\Psi) = 0$. Posons*

$$\sigma_\Psi^2 = \mathbb{E}[\Psi^2(X_0)] + 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\Psi(X_0)\Psi(X_i)\right] < \infty.$$

(A) Supposons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\Psi \in \mathbb{L}^{2+\delta}(\mu)$. Si la chaîne est fortement mélangeante et $\sum_n \alpha(n)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$ alors $\sigma_\Psi^2 < \infty$ et sous la loi $\mathbb{P}_\mu$, pour $n \to +\infty$, $n^{-1/2}\left(S_n(\Psi) - n\mu(\Psi)\right)$ converge en loi vers une v.a. gaussienne de variance σ_Ψ^2.

(B) On suppose que la chaîne est ρ-mélangeante et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n} < \infty$. Si $\sigma_\Psi^2 > 0$ alors sous la loi $\mathbb{P}_\mu$, pour $n \to +\infty$, $n^{-1/2}\left(S_n(\Psi) - n\mu(\Psi)\right)$ converge en loi vers une v.a. gaussienne de variance σ_Ψ^2.

(C) Supposons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\Psi \in \mathbb{L}^{2+\delta}(\mu)$. Supposons aussi que la chaîne est fortement mélangeante et $\sum_n \alpha(n)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$. Si $\sigma_\Psi^2 > 0$ alors pour $n \to +\infty$, $n^{-1/2}\left(S_{[nt]}(\Psi) - nt\mu(\Psi)\right)$ converge (sous $\mathbb{P}_\mu$) dans $D[0,T]$ vers $(\sigma_\Psi W_t, t \in [0,T])$ où W est un mouvement brownien standard.

Les parties (A) et (B) sont obtenues à partir des résultats dans [Ibr62], [Pel82], [Bra05] et [M06]. La partie (C) est établie à partir des travaux dans [Her84] ou [Her85]. Notons qu'il y a bien entendu d'autres types de résultats similaires que l'on pourra par exemple obtenir via les travaux ou références des travaux que nous avions cités.

1.1.3 Convergence de fonctionnelles additives markoviennes de carrés non intégrables

La situation est différente lorsque la fonction Ψ n'est plus dans $\mathbb{L}^2(\mu)$ ou $\mathbb{L}^p(\mu)$, $p \geq 2$. Dans le cas d'une somme partielle de v.a. iid $(V_n)_{n\geq 1}$, on obtient une convergence vers une v.a. α-stable, $\alpha \in (0, 2[$, tant que la v.a. V_1 est à variation régulière d'indice α (voir [GK68]).

Définition 1.1.19 *Une variable aléatoire V_1 est dite à variation régulière d'indice α s'il existe $c \in [0,1]$ telle que pour tout $x > 0$,*

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\mathbb{P}[V_1 > ux]}{\mathbb{P}[|V_1| > u]} = c\, x^{-\alpha} \quad \textit{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \frac{\mathbb{P}[V_1 < -ux]}{\mathbb{P}[|V_1| > u]} = (1-c)\, x^{-\alpha}\,.$$

Si V_1 est à variation régulière d'indice α, il existe une fonction à variation lente L (i.e. $\lim_{u\to+\infty} \frac{L(ut)}{L(u)} = 1$ pour tout $t > 0$) telle que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}[|V_1| \geq x] = x^{-\alpha} L(x)\,.$$

Soit maintenant $S_n(\Psi) = \sum_{k=0}^{n} \Psi(X_k)$ où $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ. Posons $U_k = \Psi(X_k)$ et notons que sous $\mathbb{P}_\mu$, la suite de v.a. $(U_k)_{k\geq 0}$ est identiquement distribuée et de loi μ_Ψ. Supposons que la v.a. $U_0 = \Psi(X_0)$ est à variation régulière d'indice $\alpha \in (0, 2)$ c'est-à-dire pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}[|\Psi(X_0)| \geq x] = \mu[|\Psi| \geq x] = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0.$$

On observe en particulier que $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$ pour $p < \alpha$, ceci permet donc de considérer le cas des fonctions Ψ de carrés non intégrables en considérant une condition de variation régulière.

Comme exemple de fonctions à variation lente on peut citer :

$$L(x) = \text{constante}, \quad L(x) = \log x, \quad L(x) = e^{-\sqrt{\log x}}, \quad x > 0.$$

Naturellement on s'attend à une convergence de la fonctionnelle additive markovienne $S_n(\Psi)$ vers une v.a. α-stable, (tout comme le cas indépendant) et il existe des résultats de convergence dans cette direction que nous allons présenter dans cette section. Avant tout, introduisons les notions de v.a. et processus stables.

Les variables aléatoires et processus stables

Soit ϑ une v.a. réelle et $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ des copies de ϑ supposées indépendantes.

Définition 1.1.20 *La loi de ϑ est dite stable s'il existe deux réels, C_n et D_n avec $C_n > 0$ tels que*

$$\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} C_n \vartheta + D_n, \quad n \geq 2.$$

On montre que le coefficient C_n est nécessairement de la forme $C_n = n^{1/\alpha}$, $\alpha \in (0, 2]$ (cf [Fel]). La constante α est appelée l'indice de stabilité. La v.a. ϑ est alors dite α-stable. Si $D_n = 0$ elle est dite strictement α-stable. Par exemple une v.a. gaussienne est donnée par $\alpha = 2$ et $D_n = 0$. Les v.a. α-stables appartiennent à la classe des v.a. infiniment divisibles, on introduit la représentation équivalente suivante dite de Lévy-Khintchine.

Définition 1.1.21 ***Représentation de Lévy-Khintchine***
Une v.a. ϑ est dite α-stable, $\alpha \in (0, 2)$, si sa fonction caractéristique est de la forme $\mathbb{E}[e^{iu\vartheta}] = e^{\psi_\vartheta(u)}$ où ψ_ϑ est l'exposant caractéristique donné par

$$\psi_\vartheta(u) = ibu + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1 - iux 1_{|x| \leq 1}) \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} (c_1 1_{x>0} + c_2 1_{x<0}) dx,$$

avec $c_1, c_2 \geq 0$ et $c_1 + c_2 > 0$.

Nous écrirons dans ce cas que ϑ est une v.a. α-stable de caractéristiques (b, c_1, c_2). Le cas strictement stable correspond à $b = 0$ tandis que le cas symétrique admet la paramétrisation $b = 0$ et $c_1 = c_2$. Plusieurs définitions des v.a. α-stables existent dans la littérature (voir par exemple [ST94]) mais elles sont essentiellement les mêmes, la différence résidant dans leur paramétrisation.
Une v.a. gaussienne G se distingue des autres v.a. stables par le comportement de sa queue de distribution. En effet pour G centrée réduite (pour simplifier),

$$\mathbb{P}[G > x] = \mathbb{P}[G \leq -x] \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

alors que lorsque $\alpha \in (0,2)$, les v.a. α-stables ont une queue asymptotiquement de type parétienne (en référence à la loi de Pareto) c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}[\vartheta > x] \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{-\alpha} C(b, c_1, c_2), \quad \mathbb{P}[\vartheta < -x] \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{-\alpha} C'(b, c_1, c_2),$$

où $C(b, c_1, c_2)$ et $C'(b, c_1, c_2)$ désignent des constantes dépendant des caractéristiques b, c_1 et c_2. On observe ainsi que les v.a. α-stables sont de carrés non intégrables quel que soit $\alpha \in (0,2)$ et plus encore, non intégrables pour $\alpha \in (0,1]$, contrairement à la v.a. gaussienne qui admet des moments de tout ordre.
Posons

$$\nu(dx) = \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}(c_1 1_{x>0} + c_2 1_{x<0})dx.$$

Nous dirons dans la suite qu'un exposant caractéristique ψ

(a) est de type I si

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1 - iux)\nu(dx),$$

(b) est de type II si

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx),$$

(c) est de type III si

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1 - iux 1_{\{|x|\leq 1\}})\nu(dx).$$

La notion de v.a. stable s'étend naturellement au cas d'espace de dimension supérieure. Nous clôturons ce paragraphe en introduisant les processus α-stables, $\alpha \in (0,2)$.

Définition 1.1.22 *Un processus α-stable, $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus càdlàg à accroissements indépendants et stationnaires partant de zéro tel que Z_1 soit une variable aléatoire α-stable.*

Nous allons maintenant présenter des résultats existants de convergence de fonctionnelles additives markoviennes vers des v.a. α-stables, $\alpha \in (0,2)$, obtenus dans [JKO09] par l'approche de réduction en convergence de martingale et les vitesses de convergence associées obtenues dans [KS12]. Ces résultats sont à notre connaissance les premiers obtenus dans la littérature.

L'approche par réduction en convergence de martingale

Nous décrivons pour commencer des résultats de convergence vers des processus α-stable dans l'espace de Skorokhod $D = D([0,T], \mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$. Cet espace décrit les trajectoires de processus stochastiques avec sauts et Skorokhod a proposé quatres topologies intéressantes (J_1, J_2, M_1 et M_2) dans son article fondateur [Sko56]. Parmi ces topologies la plus fine et proche de la topologie uniforme est la topologie J_1. On dit qu'une suite $X_n \in D$ converge vers $X \in D$ dans la topologie J_1 si $d_T(X_n, X) \to 0$ quand $n \to \infty$ où la distance d_T sur l'espace D est définie par

$$d_T(f,g) = \inf_{\lambda \in \Lambda_T} \left(\sup_{s \in [0,T]} |f(\lambda(s)) - g(s)| \vee \sup_{s \in [0,T]} |\lambda(s) - s| \right),$$

où f et g sont des fonctions définies sur D, l'ensemble Λ_T désignant l'ensemble des fonctions v strictement croissantes de $[0,T]$ vers $[0,T]$ telles que $v(0) = 0$ et $v(T) = T$. Si $T = +\infty$, on définit aussi la distance $d_\infty(f,g)$ sur l'espace D par

$$d_\infty(f,g) = \int_0^\infty e^{-t}(d_t(f,g) \vee 1)dt.$$

Le lecteur intéressé par les détails et aussi par les autres topologies de Skorokhod pourra par exemple consulter le livre [Whi02].

Traditionnellement, pour obtenir des théorèmes de convergence dans D, la topologie J_1 est la plus utilisée dans un schéma classique introduit dans [Pro56], [Ald78] et [Bil09] via le principe : critère de tension + identification de la limite. Une nouvelle direction pour l'étude des théorèmes limites a été initiée par Durett et Resnick dans [DR78] basée sur la convergence en loi de processus ponctuels vers des processus de Poisson. Grâce à ces considérations, les auteurs parviennent par des arguments de type "Continuous Mapping Theorem" à décrire des convergences vers des processus à accroissements indépendants et stationnaires comme les processus de Lévy. Cette méthode a produit de nouvelles preuves surprenantes dans l'espace de Skorokhod. La puissance de cette méthode est que cela s'applique non seulement à une classe générale de suites de v.a. dépendantes mais fournit aussi la convergence d'une vaste gamme de fonctionnelles (et pas seulement additives). Cette méthode a été détaillée dans [JKO09] pour la convergence des sommes partielles d'une suite de v.a. donnée. Donnons un aperçu général des conditions requises dans le cadre d'une suite de v.a. identiquement distribuée $(Z_n)_{n\geq 1}$ et adaptée à une filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ telle que pour toute fonction mesurable bornée f, la suite de v.a. $(\mathbb{E}[f(Z_n)|\mathcal{G}_{n-1}])_{n\geq 1}$ soit aussi identiquement distribuée. On introduit la condition suivante de variation régulière sur les queues de distribution :

$$\mathbb{P}[Z_1 \geq x] = x^{-\alpha}(c_1 + \mathcal{O}(1)), \quad \mathbb{P}[Z_1 \leq -x] = x^{-\alpha}(c_2 + \mathcal{O}(1)), \quad x \to +\infty, \quad (1.1.23)$$

avec $\alpha \in (0,2)$, la notation $\mathcal{O}$ étant celle de Landau communément utilisée.
On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(C-1)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[\Phi(\frac{Z_k}{n^{1/\alpha}})|\mathcal{G}_{n-1}\right] - \alpha t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)|x|^{-\alpha-1}c(x)dx\right| = 0,$$

pour toute fonction $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$[2] avec $t \geq 0$ et $c(x) = c_1 1_{x>0} + c_2 1_{x<0}$.

(C-2)

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\Phi(\frac{Z_1}{n^{1/\alpha}})|\mathcal{G}_0\right]\right\}^2 = 0.$$

Les détails des conditions (C-1) et (C-2) qui peuvent être vues comme l'analogue des conditions de convergence des variations quadratiques des martingales de carrés intégrables, se trouvent dans ([DR78], section 4).
Posons lorsque $\alpha \neq 1$, $M_0 = 0$ et

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad n \geq 1.$$

Le cas $\alpha = 1$ est un cas qui exige d'autres considérations particulières. Á cet effet on remplace $(Z_n)_{n\geq 1}$ par un tableau triangulaire $(Z_{k,n})_{k\leq n,\, n\geq 1}$ de variables identiquement distribuées et adaptées à la filtration $(\mathcal{G}_k)_{k\geq 0}$ puis on suppose que uniformément en n les conditions (1.1.23), (C-1) et (C-2) sont vérifiées pour $Z_{k,n}$, $k \leq n$, $n \geq 1$, puis on pose

$$\tilde{M}_n := \sum_{k=1}^{n} \left\{Z_{k,n} - \mathbb{E}\left[Z_{k,n} 1_{\{|Z_k^{(n)}|\leq x\}}|\mathcal{G}_{k-1}\right]\right\}, \quad \tilde{M}_0 := 0.$$

Á l'aide de ces critères on établit le résultat suivant (cf [JKO09], Théorème 5.1).

[2] $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$ signifie que Φ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ telle que $\Phi(0) = 0$.

Théorème 1.1.24 *On considère la suite de v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$ comme ci-dessus.*

- *Pour $\alpha \in (1,2)$, supposons que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de différence de martingale, c'est-à-dire que $\mathbb{E}\left[Z_n|\mathcal{G}_{n-1}\right] = 0$ p.s. Supposons aussi que les conditions (1.1.23), (C-1) et (C-2) sont vérifiées. Alors la suite de processus $(n^{-1/\alpha}M_{[nt]}, t \geq 0)$ converge dans $D([0,\infty[,\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ vers un processus de Lévy-α-stable $(Z_t)_{t\geq 0}$ de fonction caractéristique de la forme $\mathbb{E}[e^{iuZ_t}] = e^{\alpha t\psi(u)}$ avec ψ un exposant caractéristique de type I.*

- *Pour $\alpha \in (0,1)$, supposons que les conditions (1.1.23), (C-1) et (C-2) sont vérifiées. Alors la suite de processus $(n^{-1/\alpha}M_{[nt]}, t \geq 0)$ converge dans $D([0,\infty[,\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ vers un processus α-stable $(Z_t)_{t\geq 0}$ de fonction caractéristique de la forme $\mathbb{E}[e^{iuZ_t}] = e^{\alpha t\psi(u)}$ avec ψ un exposant caractéristique de type II.*

- *Pour $\alpha = 1$, remplaçons $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $(Z_{k,n})_{k\leq n, n\geq 1}$, et supposons que les conditions (1.1.23), (C-1) et (C-2) sont vérifiées uniformément en n. Alors la suite de processus $(n^{-1}\tilde{M}_{[nt]}, t \geq 0)$ converge dans $D([0,\infty[,\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ vers un processus 1-stable $(Z_t)_{t\geq 0}$ de fonction caractéristique de la forme $\mathbb{E}[e^{iuZ_t}] = e^{\alpha t\psi(u)}$ avec ψ un exposant caractéristique de type III.*

Il s'en suit le résultat de convergence suivant (cf [JKO09], Théorème 2.4) pour des fonctionnelles additives d'une chaîne de Markov par la méthode de réduction en convergence de martingale.

Théorème 1.1.25 *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ. Supposons que la chaîne vérifie la condition de trou spectral et que le noyau de transition P soit de la forme :*

$$P(x,dy) = p(x,y)\mu(dy) + Q(x,dy), \quad \forall x \in E, \tag{1.1.26}$$

où p est une fonction mesurable vérifiant :

$$\sup_{y\in E}\int_E p^2(x,y)\mu(dx) < \infty,$$

et Q un noyau de transition tel que :

$$Q(x, |\Psi| \geq v) \leq C\int_{\{|\Psi(y)|\geq v\}} p(x,y)\mu(dy), \quad \forall x \in E, v \geq 0,$$

où C est une constante positive.
Supposons aussi que la fonction Ψ vérifie pour $x > 0$ assez grand la condition :

$$\mu[\Psi \geq x] = x^{-\alpha}(c_1 + \mathcal{O}(1)) \quad et \quad \mu[\Psi \leq -x] = x^{-\alpha}(c_2 + \mathcal{O}(1)). \tag{1.1.27}$$

(1) Soit $\alpha \in (1,2)$ et Ψ telle que $\mu(\Psi) = 0$. Si $P\Psi \in L^{\alpha'}(\mu)$ pour un certain $\alpha' > \alpha$ alors sous $\mathbb{P}_\mu$, pour $n \to +\infty$, $n^{-1/\alpha}S_n(\Psi)$ converge en loi vers une v.a α-stable ϑ de fonction caractéristique $\mathbb{E}[e^{iu\vartheta}] = e^{\alpha\psi(u)}$ où ψ un exposant caractéristique de type I.

(2) Pour $\alpha \in (0,1)$, sous $\mathbb{P}_\mu$, pour $n \to +\infty$, $n^{-1/\alpha}S_n(\Psi)$ converge en loi vers une v.a α-stable ϑ de fonction caractéristique $\mathbb{E}[e^{iu\vartheta}] = e^{\alpha\psi(u)}$ où ψ un exposant caractéristique de type II.

(3) Soit $\alpha = 1$ et posons $\Psi_n = \Psi 1_{\{|\Psi| \leq n\}}$, $c_n = (c + o(1))\log(n)$. S'il existe un réel $\alpha' > 1$ tel que $(P\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans $\mathbb{L}^{\alpha'}(\mu)$ alors sous $\mathbb{P}_\mu$, pour $n \to +\infty$, $n^{-1}[S_n(\Psi) - nc_n]$ converge en loi vers une v.a. 1-stable ϑ de fonction caractéristique $\mathbb{E}[e^{iu\vartheta}] = e^{\alpha\psi(u)}$ où ψ un exposant caractéristique de type III.

Les auteurs imposent la condition de trou spectral pour assurer l'existence de la solution de l'équation de Poisson. Les conditions (1.1.26) et (1.1.27) du théorème permettent de vérifier les conditions (C-1) et (C-2). Notons qu'une autre approche de preuve basée sur le couplage a été également fournie par les auteurs.

Á présent disons quelques mots sur l'hypothèse de contraction stricte imposée dans le théorème, qui est du type : si $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$ alors $P\Psi \in \mathbb{L}^q(\mu)$ pour un certain $q > p$. C'est une propriété de bornitude de certains opérateurs markoviens nommée l'hypercontractivité que l'on décrit en termes d'inégalité de log-Sobolev dans le cas continu. Dans le cas des chaînes de Markov à temps discret et à valeurs dans un ensemble fini, des liens entre l'inégalité de log-Sobolev et l'hypercontractivité ont été établis dans [Mic97] et aussi dans le cas de l'ultracontractivité ($q = \infty$) via les inégalités de Nash dans [DSC96].

Exemple 1.1.28 *1. Un exemple de chaîne de Markov à temps discret issu d'un système d'oscillateur harmonique de diffusion d'énergie dans un réseau a été étudié dans [JKO09]. Il est prouvé que la chaîne vérifie la condition de trou spectral et que l'opérateur de transition P est hypercontractif. Pour une telle chaîne, il est également fourni des exemples de fonction Ψ vérifiant la condition (1.1.27).*

2. *Pour d'autres applications, on peut reprendre ici la chaîne de naissance et de mort, mais à valeurs dans un ensemble fini* $\{0, 1, \ldots, N\}$ *où* $N \in \mathbb{N}^*$*, et une condition suffisante nous assurant de l'ultracontractivité est :*

$$\sup_{1\leq x\leq N} \sum_{k=1}^{x} (\mu(k)p_k)^{-1} \, (\sum_{k=x}^{N} \mu(k))^{1-\frac{2}{p}} < +\infty,$$

pour $0 < p \leq 2$ *(cf. [Wan12]).*

   (i) Par exemple si on choisit

$$q_x = p_x = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{(x+1)^{2\alpha}}\right)\right]^{-1}, \; q_0 = p_N = 0, \quad \alpha \in (0, 2)$$

   la mesure invariante et réversible μ *est donnée par*

$$\mu(x) = \mu(0) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x^{2\alpha}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{(x+1)^{2\alpha}}\right)\right)$$

   où $\mu(0)$ *est la constante de normalisation.*

   (ii) On vérifie que pour une fonction Ψ *de la forme* $\Psi(x) = x^2, \quad x > 0$*, on a*

$$\mu[\Psi \geq z] = z^{-\alpha}(1 + \mathcal{O}(z^{-\alpha})) \quad z \to \infty,$$

   et la condition (1.1.27) est vérifiée.

Ces résultats de convergence ayant permis d'obtenir un TCL par la méthode de réduction en convergence de martingale, n'ont pas abouti à un principe d'invariance. Ainsi nous proposons au Chapitre 2 de cette thèse des résultats de convergence vers des processus α-stables (principe d'invariance) en utilisant l'approche du mélange qui comme mentionnée plus haut, est une autre technique permettant d'obtenir des théorèmes limites.

1.1.4 Vitesses de convergence associées

Un problème associé dans l'étude des théorèmes limites concerne les vitesses de convergence. Dans cette section, nous présentons des vitesses de convergence de $S_n(\Psi)$ vers des v.a α-stables entre leurs fonctions caractéristiques, connues dans l'article [KS12] précédemment cité. La méthode utilisée est la réduction en martingale avec des techniques d'analyse de Fourier. Les fonctions Ψ de la fonctionnelle additive $S_n(\Psi)$ vérifient la condition suivante :

$$\left|\mu[\Psi \geq x] - \frac{c_1}{x^\alpha}\right| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\alpha+\alpha_1}}\right) \quad \text{et} \quad \left|\mu[\Psi \leq -x] - \frac{c_2}{x^\alpha}\right| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\alpha+\alpha_1}}\right), \tag{1.1.29}$$

où $\alpha_1 \in (0, 2-\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$, $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$. Nous verrons par la suite qu'une telle condition signifie que $\Psi(X_0)$ est dans un "domaine d'attraction fort" d'une loi α-stable si $X_0 \sim \mu$. Supposons que la chaîne de Markov vérifie une condition de trou spectral et que l'opérateur P est de la forme :

$$P(x, dy) = p(x,y)\mu(dy), \quad p \in \mathbb{L}^q(\mu \otimes \mu), \quad q > 0, \quad q \text{ assez grand.} \tag{1.1.30}$$

Le résultat suivant a été établi dans [KS12], Théorème 4.4.

Théorème 1.1.31 *Sous les conditions précédentes, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\gamma \in (0, \frac{\alpha}{\alpha+1})$,*

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{iy\left(\frac{S_{[nt]}(\Psi)}{n^{1/\alpha}}\right)}\right] - e^{t\alpha\psi(y)}\right| \leq C(1+|y|)^5(t+1)\left(\frac{1}{n^{\alpha_1/\alpha}} + \frac{1}{n^\gamma}\right), \quad y \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ n \geq 1,$$

où ψ est un exposant caractéristique de type I.

En d'autres termes sous $\mathbb{P}_\mu$, en prenant $t = 1$, la fonctionnelle additive $S_n(\Psi)$ renormalisée, converge en loi vers une v.a. α-stable de fonction caractéristique de la forme $e^{\alpha\psi(u)}$ avec ψ un exposant caractéristique de type I et une vitesse de convergence de l'ordre de $n^{-\gamma}$ pour tout $\gamma \in \left(0, \frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$ et pour tout $\alpha_1 \in (0, 2-\alpha)$. Les auteurs ont également décrit des vitesses de convergence vers des v.a. gaussiennes et aussi des vitesses de convergence de certaines fonctionnelles de processus markoviens de sauts.

En guise d'application, on peut s'intéresser encore à la chaîne de Markov issue des systèmes d'oscillateurs harmoniques dans l'exemple précédent. Ce modèle de chaîne de Markov a été aussi étudié dans [KS12] avec des exemples d'illustration de fonctions vérifiant la condition (1.1.27). L'exemple sur les chaînes de naissance et de mort peut servir d'illustration.

1.2 Ordres stochastiques convexes ou inégalités de comparaison convexe

Dans cette thématique de recherche, nous étudions les ordres stochastiques convexes ou inégalités de comparaison convexe. Soit X et Y deux v.a., l'ordre convexe $\leq_{cx}$ entre les variables aléatoires X et Y est défini par $X \leq_{cx} Y$ si et seulement si

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi(Y)\right], \tag{1.2.1}$$

pour toute fonction convexe φ pour laquelle l'espérance existe. L'ordre $\leq_{cx}$ définit une relation d'ordre stochastique et est une inégalité de comparaison convexe entre les v.a. X et Y. On peut considérer d'autres types d'ordres stochastiques ou inégalités de comparaison en considérant d'autres familles de fonctions φ. On pourra consulter le livre [SS07] pour la théorie sur les ordres stochastiques.

Motivation

Les inégalités de comparaison convexe ont été introduites pour la première fois dans [Hoe56] et [Hoe63]. On y montre qu'une inégalité de comparaison convexe a lieu entre une somme de v.a. indépendantes de lois de Bernoulli (B_k^e) de paramètres p_k avec $k = 1, \ldots, n$ et une v.a. Binomiale $B_{n,\bar{p}}$, où $\bar{p}$ désigne la moyenne arithmétique des p_k, plus précisément on a

$$\mathbb{E}[\varphi(\sum_{i=1}^{n} B_i^e)] \leq \mathbb{E}[\varphi(B_{n,\bar{p}})],$$

pour toute fonction convexe φ. Ce résultat a été appliqué pour obtenir des bornes de déviation de sommes de v.a. admettant des moments exponentiels. En effet, remarquons par exemple qu'en prenant dans (1.2.1) $\varphi(x) = \exp(\theta x)$, $\theta > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \geq x] &\leq \inf_{\theta>0} e^{-\theta x}\mathbb{E}[e^{\theta X}] \\
&\leq \inf_{\theta>0} e^{-\theta x}\mathbb{E}[e^{\theta Y}] \\
&\leq \inf_{\theta>0} e^{[L_Y(\theta)-\theta x]},
\end{aligned}$$

où L_Y désigne la transformée de log-Laplace de Y. On voit donc l'intérêt d'une telle estimation lorsque L_Y peut être contrôlée. Les inégalités de comparaison convexe permettent aussi d'obtenir des inégalités classiques telles que l'inégalité maximale de

Rosenthal et de Kolmogorov ou l'inégalité de Talagrand. Une autre application, dans le domaine des mathématiques financières concerne les prix d'option où les fonctions convexes $\varphi(x) = (x-K)^+$ ou $\varphi(x) = (K-x)^+$ où $x, K \in \mathbb{R}$, appelées fonctions de payoff interviennent dans le calcul du prix d'une option européenne. Soient X_T et Y_T deux actifs à une date fixée T. Lorsque $X_T \leq_{icx} Y_T$ (notation qui correspond au cas où la fonction convexe φ dans (1.2.1) est en plus croissante) alors on a

$$\mathbb{E}[(X_T - K)^+] \leq \mathbb{E}[(Y_T - K)^+].$$

Ainsi si on dispose des informations sur le calcul de $\mathbb{E}[(Y_T - K)^+]$ alors on peut apporter une meilleure estimation sur $\mathbb{E}[(X_T - K)^+]$ et vice versa. Notons aussi qu'en théorie des risques financiers, les risques sont généralement modélisés par des v.a. et les inégalités de comparaison convexe permettent de formuler des décisions, nous renvoyons à [RS70] pour des détails à ce sujet. Il est aussi important de noter que les inégalités de comparaison convexe permettent d'obtenir des estimations entre v.a. sous certaines distances de probabilité telles que les distances de Wasserstein, de Zolotarev et bien d'autres distances. On pourra se référer aux travaux dans [BV02] pour des détails sur ce genre d'application.

Dans la littérature, les inégalités de comparaison font l'objet de nombreuses publications et travaux de recherche. Dans le cadre des processus stochastiques, on peut citer les travaux [Kle02] et [KR05] de Thierry Klein qui a obtenu des résultats dans le cadre des processus de saut pur à temps discret ou continu par des techniques de calcul stochastique. Des résultats de comparaison convexe ont été établis pour des valeurs terminales de processus à trajectoires continues ou discontinues (martingales, semi-martingales et processus de diffusion mixte) entre autres dans les papiers : [BGW96], [Hob98], [KJPS98], [Mar99], [BJ00], [BR06], [KMP06], [BR07], [BP07], [ABP08] et [BLP13]. Les méthodes reposent sur deux techniques différentes : l'une basée sur une approche dite de "propagation de la convexité" et une autre basée sur un calcul stochastique faisant intervenir des processus rétrogrades.

Techniques d'obtention des inégalités de comparaison convexe

Dans un premier temps, nous décrivons brièvement la méthode de la propagation de la convexité et dans un second temps nous décrivons la méthode du calcul stochastique faisant intervenir les processus rétrogrades, cette dernière faisant l'intérêt de notre étude.

Approche dite de propagation de la convexité

Permettons-nous ici de retracer les grandes lignes des idées développées dans les papiers [BGW96], [Hob98], [KJPS98], [Mar99], [BJ00], [GM02] et [BR06]. La méthode est basée sur une hypothèse de propagation de la convexité. L'hypothèse de propagation de la convexité concerne l'opérateur $\mathcal{G}(t,.)$ défini par

$$\mathcal{G}(t,x) = \mathbb{E}[\varphi(Y_T)/Y_t = x], \quad x \in \mathbb{R},$$

où $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ sont deux semimartingales telles que $X_0 = Y_0$.
Observons que si φ est une fonction convexe alors $\mathcal{G}(T,.) = \varphi(.)$ est aussi convexe et on parle de la propagation de la convexité si l'opérateur $\mathcal{G}(t,.)$ reste convexe pour tous les temps rétrogrades (backward) $t \in [0,T]$. Grâce à cette hypothèse de propagation de la convexité, Nicole El Karoui et ses co-auteurs montrent par exemple dans [KJPS98] que si les semimartingales X et Y sont données sous la forme :

$$X_T = x + \int_0^T h(X_s)dW_s \quad \text{et} \quad Y_T = x + \int_0^T H_s dW_s \quad x \in \mathbb{R},$$

alors pour toute fonction convexe φ on a $\mathbb{E}[\varphi(X_T)] \leq \mathbb{E}[\varphi(Y_T)], \quad x \in \mathbb{R}$, tant que $|H_s| \leq |h(X_s)|$, $s \in [0,T]$. Le processus $(W_t)_{t\in[0,T]}$ désigne un mouvement brownien, $(H_t)_{t\in[0,T]}$ un processus de carré intégrable et h une fonction de carré intégrable. En mathématiques financières, le phénomène de propagation de la convexité est bien connu dans les modèles de diffusion unidimensionnels par la théorie des flots stochastiques dans [BGW96], [Hob98], [KJPS98] et [GM02]. Une généralisation de leur technique a été établie dans [GM02] fournissant des inégalités de comparaison convexe des valeurs terminales de semimartingales unidimensionnelles. Dans un cadre multidimensionnel, en supposant la propagation de la convexité, des résultats ont été obtenus dans [BR06] et [BR07] y compris dans le cadre des processus de diffusion avec sauts et des modèles de diffusion exponentielles. Leur approche repose sur une équation backward de Kolmogorov qui est une équation intégro-différentielle vérifiée par l'opérateur de propagation $\mathcal{G}(t,x)$. La principale idée consiste à exprimer $\mathcal{G}(t,X_t)$ en fonction des caractéristiques différentielles de $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ à partir d'une équation d'évolution qu'on obtient par la formule d'Itô lorsque $\mathcal{G}(t,.)$ est de classe C^2. Ensuite par l'équation backward de Kolmogorov et en ordonnant convenablement les caractéristiques différentielles de $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(Y_t)_{t\in[0,T]}$, on montre par exemple que $\mathcal{G}(t,X_t)$ est une surmartingale (essentiellement parce que $\frac{\partial^2\mathcal{G}(t,x)}{\partial x^2} \geq 0$ si la propagation de la convexité a lieu). Et la propriété de surmartingale entrainerait

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T)] = \mathbb{E}[\mathcal{G}(T, X_T)] \leq \mathbb{E}[\mathcal{G}(0, X_0)] = \mathbb{E}[\varphi(Y_T)].$$

Ainsi on obtient une inégalité de comparaison convexe entre les variables terminales X_T et Y_T. Il existe également des comparaisons générales sous d'autres hypothèses de propagation suivant la nature de la fonction φ, et en général le prix à payer reste le même, à savoir nature de la propagation + comparaison des caractéristiques différentielles des processus ou encore de celles de leurs logarithmes stochastiques. L'hypothèse de propagation de la convexité est prouvée dans les modèles de diffusion en considérant des approximations discrètes comme par exemple les schémas d'Euler. La propagation de la convexité a été aussi étudiée dans [Mar99] pour des modèles markoviens. Toutefois il est à noter que dans le cadre de modèles non markoviens, la propagation de la convexité est souvent mise en défaut (cf [ET07], section 4).

Approche par le calcul stochastique forward-backward

Nous présentons dans cette partie la méthode du calcul stochastique forward-backward. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une filtration croissante et $(M_t)_{t\in[0,T]}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale. Soit également $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$ une filtration décroissante et $\tilde{M}$ une $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale, i.e.

$$\mathbb{E}[\tilde{M}_s|\tilde{\mathcal{F}}_t] = \tilde{M}_t, \quad s \leq t \leq T.$$

On dira dans la suite que $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale forward et $(\tilde{M}_t)_{t\in[0,T]}$ une $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale backward. On suppose que M a des trajectoires càdlàg et $\tilde{M}_t$ des trajectoires càglàd[3] et on désigne par M^c et $\tilde{M}^c$ les parties continues de M et $\tilde{M}$. Les variations quadratiques des parties continues $\langle M^c, M^c\rangle$ et $\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle$ sont définies par,

$$\langle M^c, M^c\rangle_t = [M, M]_t - \sum_{0<s\leq t} |\Delta M_s|^2,$$

$$\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t = [\tilde{M}, \tilde{M}]_t - \sum_{0\leq s<t} |\tilde{\Delta} \tilde{M}_s|^2.$$

On rappelle que les crochets droits $[.,.]$ sont définis comme des limites en probabilité,

$$[M, M]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}|^2,$$

[3] abrégé de continu à gauche avec limite à droite

$$[\tilde{M},\tilde{M}]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_{n-1}} |\tilde{M}_{t_i^n} - \tilde{M}_{t_{i+1}^n}|^2,$$

sur toute suite de subdivisions emboitées $\{0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \ldots \leq t_{k_n}^n\}$ de l'intervalle $[0,t]$.

On introduit les sauts dits forward et backward :

$$\Delta M_t = M_t - M_{t-},$$

$$\tilde{\Delta}\tilde{M}_t = \tilde{M}_t - \tilde{M}_{t+}.$$

On désigne par μ^M et $\mu^{\tilde{M}}$ les mesures aléatoires associées respectivement aux sauts de M et $\tilde{M}$, définies par

$$\mu^M(dt,dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\Delta M_s \neq 0\}} \delta_{(s,\Delta M_s)}(dt,dx),$$

$$\mu^{\tilde{M}}(dt,dx) = \sum_{s>0} 1_{\{\tilde{\Delta}\tilde{M}_s \neq 0\}} \delta_{(s,\tilde{\Delta}\tilde{M}_s)}(dt,dx),$$

où $\delta_{(s,x)}$ désigne la mesure de Dirac au point $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On désigne par ν^M et $\nu^{\tilde{M}}$ les mesures duales prévisibles associées aux mesures μ^M et $\mu^{\tilde{M}}$ respectivement. Rappelons que ν^M désigne l'unique (à indistinguabilité près) mesure prévisible telle que pour tout processus prévisible J le processus

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} J(t,x)\mu^M(dt,dx) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} J(t,x)\nu^M(dt,dx)$$

soit une martingale (locale).
Les paires

$$\left(\nu^M(dt,dx), \langle M^c, M^c\rangle_t\right) \quad \text{et} \quad \left(\nu^{\tilde{M}}(dt,dx), \langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t\right),$$

sont appelées respectivement les caractéristiques locales des martingales M et $\tilde{M}$. On pourra se référer par exemple au livre [JM76] du moins pour le cas forward.

Formule d'Itô forward-backward

Nous allons maintenant introduire une formule d'Itô entre martingales forward et backward, qui sera appliquée pour établir des inégalités de comparaison convexe.

Théorème 1.2.2 *Soient* $(M_t)_{t\in[0,T]}$ *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-martingale forward càdlàg et* $(\tilde{M}_t)_{t\in[0,T]}$ *une* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$*-martingale backward caglad. On suppose que la martingale* $(M_t)_{t\in[0,T]}$ *est* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$*-adaptée et que* $(\tilde{M}_t)_{t\in[0,T]}$ *est* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *adaptée. Pour toute fonction* $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$*, on a :*

$$\begin{aligned}
f(M_t,\tilde{M}_t) &= f(M_s,\tilde{M}_s)+\int_{s^+}^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-},\tilde{M}_u)\,dM_u+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_u,\tilde{M}_u)d\langle M^c,M^c\rangle_u\\
&- \int_s^{t^-}\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u,\tilde{M}_{u+})\,\tilde{d}\tilde{M}_u-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(M_u,\tilde{M}_u)d\langle\tilde{M}^c,\tilde{M}^c\rangle_u\\
&+ \sum_{s<u\le t}\left(f(M_{u-}+\Delta M_u,\tilde{M}_u)-f(M_{u-},\tilde{M}_u)-\Delta M_u\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-},\tilde{M}_u)\right)\\
&- \sum_{s\le u<t}\left(f(M_u,\tilde{M}_{u+}+\tilde{\Delta}\tilde{M}_u)-f(M_u,\tilde{M}_{u+})-\tilde{\Delta}\tilde{M}_u\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u,\tilde{M}_{u+})\right),
\end{aligned}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ *désigne la dérivée partielle de* f *par rapport à ses* k^{iemes}*-coordonnées,* $k=1,2$*.*

Nous appelons cette formule, la formule d'Itô forward-backward et elle s'étend également aux semimartingales de la forme :

$$M_t+\int_0^t D_s ds,\quad \text{et}\quad \tilde{M}_t+\int_t^T \tilde{D}_s ds,$$

où les processus $(D_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{D}_t)_{t\in[0,T]}$ sont respectivement $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptés. Les symboles d et $\tilde{d}$ sont des différentielles d'Itô forward et backward, par exemple $\int_0^T H_t\tilde{d}\tilde{M}_t$ signifie une limite en probabilité des sommes du type :

$$\sum_{i=1}^{p_n} H_{t_i^n}(\tilde{M}_{t_{i-1}^n}-\tilde{M}_{t_i^n})$$

où (t_i^n), $i=1,\dots,p_n\in\mathbb{N}$ est une subdivision de l'intervalle $[0,T]$. Pour les détails de la preuve de ce théorème, nous renvoyons à l'article fondateur [KMP06]. Notons que l'hypothèse d'adaptation croisée dans le théorème n'est pas anodine. En effet, cela permet de donner un sens aux intégrales

$$\int_{s^+}^t\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-},\tilde{M}_u)\,dM_u,\quad \int_s^{t^-}\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u,\tilde{M}_{u+})\,\tilde{d}\tilde{M}_u.$$

Toutefois, cette hypothèse peut être réalisée en grossissant les filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$. Par exemple

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^M \vee \mathcal{F}_0^{\tilde{M}}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_T^M \vee \mathcal{F}_t^{\tilde{M}},\ t \in [0,T],$$

où $(\mathcal{F}_t^M)_{t\in[0,T]}$ et $(\mathcal{F}_t^{\tilde{M}})_{t\in[0,T]}$ désignent respectivement les filtrations canoniques de M et $\tilde{M}$. Supposons maintenant que les caractéristiques locales de M et $\tilde{M}$ sont différentiables ou absolument continues, c'est-à-dire

$$\nu^M(dt,dx) := \nu_t(dx)dt, \quad d\langle M^c, M^c\rangle_t := H_t^2 dt,$$

$$\nu^{\tilde{M}}(dt,dx) := \tilde{\nu}_t(dx)dt, \quad d\langle \tilde{M}^c, \tilde{M}^c\rangle_t := \tilde{H}_t^2 dt.$$

On a

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_u, \tilde{M}_u) d\langle M^c, M^c\rangle_u = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_u, \tilde{M}_u) H_u^2 du,$$

de même pour le cas backward en remplaçant H par $\tilde{H}$. Observons que,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s<u\leq t}\left(f(M_{u-}+\Delta M_u, \tilde{M}_u) - f(M_{u-}, \tilde{M}_u) - \Delta M_u \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-}, \tilde{M}_u)\right) \\
= &\int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(M_{u-}+x, \tilde{M}_u) - f(M_{u-}, \tilde{M}_u) - x \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-}, \tilde{M}_u)\right) \mu^M(dt,dx),
\end{aligned}$$

de même pour la partie backward en remplaçant μ^M par $\mu^{\tilde{M}}$.
En prenant l'espérance dans la formule d'Itô forward-backward, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(M_t, \tilde{M}_t)] &= \mathbb{E}[f(M_s, \tilde{M}_s)] + \mathbb{E}\left[\int_{s^+}^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-}, \tilde{M}_u)\right] dM_u - \mathbb{E}\left[\int_s^{t^-} \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u, \tilde{M}_{u+})\, \tilde{d}\tilde{M}_u\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_u, \tilde{M}_u) H_u^2 du\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(M_u, \tilde{M}_u) \tilde{H}_u^2 du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(M_{u-}+x, \tilde{M}_u) - f(M_{u-}, \tilde{M}_u) - x \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-}, \tilde{M}_u)\right) \mu^M(du,dx)\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(M_u, \tilde{M}_{u+}+y) - f(M_u, \tilde{M}_{u+}) - y \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u, \tilde{M}_{u+})\right) \mu^{\tilde{M}}(du,dy)\right].
\end{aligned}$$

En introduisant les mesures duales prévisibles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(M_t,\tilde{M}_t)] &= \mathbb{E}[f(M_s,\tilde{M}_s)] + \mathbb{E}\left[\int_{s^+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-},\tilde{M}_u)\, dM_u\right] - \mathbb{E}\left[\int_{s}^{t^-} \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u,\tilde{M}_{u+})\, \tilde{d}\tilde{M}_u\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_u,\tilde{M}_u) H_u^2 du\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(M_u,\tilde{M}_u) \tilde{H}_u^2 du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(M_{u-}+x,\tilde{M}_u) - f(M_{u-},\tilde{M}_u) - x\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-},\tilde{M}_u)\right) \nu_u(du)dx\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(M_u,\tilde{M}_{u+}+y) - f(M_u,\tilde{M}_{u+}) - y\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u,\tilde{M}_{u+})\right) \tilde{\nu}_u(du)dy\right].
\end{aligned}$$

Notons que, sous certaines conditions sur f et les martingales M et $\tilde{M}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\int_{s^+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_{u-},\tilde{M}_u)\, dM_u\right] = 0,$$

$$\mathbb{E}\left[\int_{s}^{t^-} \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_u,\tilde{M}_{u+})\, \tilde{d}\tilde{M}_u\right] = 0.$$

Posons $f(x,y) = \varphi(x+y)$ où φ est une fonction convexe donnée de classe C^2. On montre sous certaines conditions sur les caractéristiques locales que :

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t+\tilde{M}_t)] \leq \mathbb{E}[\varphi(M_s+\tilde{M}_s)], \quad s \leq t \leq T. \tag{1.2.3}$$

D'une part si la martingale $\tilde{M}$ est telle que $\mathbb{E}[\tilde{M}_t/\mathcal{F}_t^M] = 0$ p.s., alors par application de l'inégalité de Jensen on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(M_t)] &= \mathbb{E}\left[\varphi(M_t + \mathbb{E}[\tilde{M}_t/\mathcal{F}_t^M])\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi(M_t+\tilde{M}_t)/\mathcal{F}_t^M\right]\right] = \mathbb{E}[\varphi(M_t+\tilde{M}_t)].
\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (1.2.3) devient,

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t)] \leq \mathbb{E}[\varphi(M_s+\tilde{M}_s)], \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

en particulier pour $s = 0$ en supposant que p.s. $M_0 = 0$ on obtient

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t)] \leq \mathbb{E}[\varphi(\tilde{M}_0)], \quad 0 \leq t \leq T,$$

en d'autres termes pour tout $t \in [0, T]$, $M_t \leq_{cx} \tilde{M}_0$.
D'autre part en prenant $s = 0$ et $t = T$ et en supposant que les martingales $(M_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{M}_t)_{t\in[0,T]}$ sont issues de 0, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(M_T)] \leq \mathbb{E}[\varphi(\tilde{M}_0)].$$

On obtient ainsi, une inégalité de comparaison convexe entre les v.a. M_T et $\tilde{M}_0$. Pour fixer les idées, considérons en guise d'exemple des processus M et $\tilde{M}$ de la forme :

$$M_t = M_0 + \int_0^T H_t dW_t + \int_0^T J_{t-}(dN_t - \lambda_t)dt,$$

$$\tilde{M}_t = \tilde{M}_0 + \int_t^T \tilde{H}_u \tilde{d}\tilde{W}_u + \int_t^T \tilde{J}_{u+}(\tilde{d}\tilde{N}_u - \tilde{\lambda}_t)dt,$$

où $(N_t)_{t\in[0,T]}$, $(\tilde{N}_t)_{t\in[0,T]}$ sont des processus ponctuels de compensateurs respectifs $(\lambda_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{\lambda}_t)_{t\in[0,T]}$, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ sont des mouvements browniens standard ; $(H_t)_{t\in[0,T]}$ et $(J_{t-})_{t\in[0,T]}$ sont des processus de carrés intégrables et adaptés pour la filtration engendrée par W et N ; $(\tilde{H}_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\tilde{J}_{t+})_{t\in[0,T]}$ des processus de carrés intégrables et adaptés pour la filtration engendrée par $\tilde{W}$ et $\tilde{N}$.
On sait dans ce cas que :

$$\nu(dt, dx) = \lambda_t \delta_{J_t}(dx)dt := \nu_t(dx)dt$$

$$\tilde{\nu}(dt, dx) = \tilde{\lambda}_t \delta_{\tilde{J}_t}(dx)dt := \tilde{\nu}_t(dx)dt.$$

On montre sous l'hypothèse d'adaptation croisée dans le théorème précédent que si l'une des conditions suivantes est réalisée

(1)
$$0 \leq J_t \leq \tilde{J}_t, \quad H_t| \leq |\tilde{H}_t|, \quad \lambda_t J_t \leq \tilde{\lambda}_t \tilde{J}_t, \quad t \in [0, T],$$

(2)
$$J_t \leq \tilde{J}_t, \quad |H_t| \leq |\tilde{H}_t|, \quad \lambda_t J_t^2 \leq \tilde{\lambda}_t \tilde{J}_t^2, \quad t \in [0, T],$$

avec φ et φ' convexes.

(3)

$$J_t \leq 0 \leq \tilde{J}_t, \quad K_t^2 + \lambda_t J_t^2 \leq \tilde{H}_t^2 + \lambda_t \tilde{J}_t^2$$

avec φ convexe et φ' aussi,

alors l'inégalité (1.2.3) a lieu.
Cette méthode du calcul stochastique forward-backward a produit une littérature abondante notamment dans le cadre des processus résultant de représentations en termes d'intégrales stochastiques par rapport aux mesures aléatoires de Poisson, des intégrales de Lévy-Itô, des martingales normales, voir aussi des représentations via la formule de Clark-Ocone. On peut citer en particulier le résultat suivant fournissant des critères de comparaison convexe d'une variable aléatoire ayant une représentation faisant intervenir des processus ponctuels et le mouvement brownien, avec des variables aléatoires gaussiennes et de Poisson.

Théorème 1.2.4 *Soit F une v.a. centrée de la forme:*

$$F = \int_0^\infty H_t dW_t + \int_0^\infty J_{t-}(dN_t - \lambda_t)dt$$

où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus ponctuel de compensateur $(\lambda_t)_{t\geq 0}$, $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, $(J_t)_{t\geq 0}$ et $(H_t)_{t\geq 0}$ des processus de carrés intégrables adaptés pour la filtration engendrée par W et N.
On désignera par $N(z_0)$ une v.a. de Poisson compensée d'intensité $z_0 > 0$ indépendante de $W(v_0)$ une v.a. gaussienne centrée de variance v_0.

$$\textit{Posons} \quad a := || \int_0^\infty |H_t|^2 dt||_\infty, \ \textit{et} \ b := || \int_0^\infty J_t \lambda_t dt||_\infty,$$

$$c := || \int_0^\infty J_t^2 \lambda_t dt||_\infty, \ \textit{et} \ d := || \int_0^\infty |H_t|^2 dt + \int_0^\infty J_t^2 \lambda_t dt||_\infty.$$

(i) Supposons que $0 \leq J_t \leq k$ pour un certain $k > 0$. On a

$$\mathbb{E}[\varphi(F)] \leq \mathbb{E}[\varphi(W(a) + kN(b/k^2))],$$

pour toute fonction convexe φ.

(ii) Supposons que $J_t \leq k$ pour un certain $k > 0$. On a

$$\mathbb{E}[\varphi(F)] \leq \mathbb{E}[\varphi(W(a) + kN(c/k^2))],$$

pour toute fonction convexe φ telle que φ' soit aussi convexe.

(iii) Supposons que $J_t \leq 0$. On a

$$\mathbb{E}[\varphi(F)] \leq \mathbb{E}[\varphi(W(d))]$$

pour toute fonction convexe φ telle que φ' soit aussi convexe.

Pour les détails de la preuve nous renvoyons à [KMP06], Théorème 4.1.

Dans le cadre des représentations faisant intervenir des processus avec sauts, la plupart des résultats connus exigent des sauts bornés comme par exemple dans le théorème précédent. Ceci exclut les processus à sauts non bornés comme les processus α-stables.

Ainsi, nous proposons d'établir des inégalités de comparaison convexe dans le cadre des représentations de variables aléatoires faisant intervenir des intégrales stochastiques dirigées par des processus α-stables, $\alpha \in (1, 2)$, en utilisant le calcul forward-backward.

1.3 Contributions de cette thèse

L'étude des théorèmes de convergence vers des processus α-stables donne lieu au Chapitre 2 et présente des théorèmes de convergence de $(S_{[nt]}(\Psi), t \in [0, T])$ vers des processus α-stables, $\alpha \in (0, 2)$, dans l'espace de Skorokhod $D[0, T]$. Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Patrick Cattiaux et a donné lieu à un article publié dans le journal ESAIM : Probability and Statistics, voir [CMA14].

Motivé par les propriétés d'idéalité de la distance de Zolotarev, nous établissons au chapitre 3 des vitesses de convergence vers des variables aléatoires α-stables, dans le TCL généralisé, c'est-à-dire dans le cadre des sommes partielles de variables aléatoires iid de carrés non intégrables. Ce chapitre fait l'objet d'un travail en cours.

Au Chapitre 4, nous établissons des ordres convexes ou inégalités de comparaison convexe pour des intégrales stochastiques dirigées par des processus α-stables, $\alpha \in (1, 2)$. Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Aldéric Joulin et a donné lieu à un article publié dans le journal Stochastics, voir [JMA15].

Á présent, nous allons faire un résumé des résultats obtenus aux Chapitres 2, 3 et 4.

Chapitre 2 : Théorèmes limites pour certaines fonctionnelles à queue lourde d'une chaîne de Markov à temps discret

L'approche du mélange

Une nouvelle technique dans le contexte de la théorie des valeurs extrêmes pour établir des théorèmes de convergence dans $D[0,T]$ a été initiée par Leadbetter et Rootzen dans [Lea88]. Suite à ces travaux cette méthode a été utilisée par de nombreux auteurs dans une variété de situations notamment dans le cadre des suites de variables aléatoires mélangeantes. Dans le cas $\alpha \in (0,2)$ nous avions eu recours à ces techniques développées dans [Dav83], [DJ89a], [DH95], [Kri10], [Ba11] et [BK12], pour des suites de variables aléatoires mélangeantes. Ces techniques nous révèlent essentiellement qu'un théorème limite a lieu dans l'espace de Skorokhod sous des conditions dites "anti-clustering" qui sont familières en théorie des valeurs extrêmes appelées aussi conditions D' de Leadbetter.
Dans le cadre d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ supposée irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ, nous nous sommes inspirés de ces outils pour la description des processus limites de type α-stable dans $D[0,T]$ munie de la topologie J_1 pour des fonctionnelles de la forme :

$$T_n(t) = \frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=0}^{[nt]} \Psi(X_k) - ntc_n\right) = \frac{1}{b_n} S_{[nt]}(\Psi) - \frac{tnc_n}{b_n}, \quad t \in [0,T],$$

où Ψ est une fonction à variation régulière sous la mesure invariante μ, c'est-à-dire qu'il existe une fonction à variation lente L telle que

$$\mu[|\Psi| \geq x] = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0. \tag{1.3.1}$$

Les coefficients b_n et c_n sont définis par les relations :

$$\lim_{n\to\infty} n\mu[|\Psi| > b_n] = 1 \quad \text{et} \quad c_n = \mu\left[\Psi \mathbb{1}_{|\Psi|\leq b_n}\right].$$

Dans le cas où Ψ est symétrique sous μ, alors on prendra $c_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Nous pouvons contrôler le terme $\frac{n\,c_n}{b_n}$ précédent, grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.3.2 *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *ou* $\alpha \in (1,2)$ *et supposons de plus que* $\mu(\Psi) = 0$ *si* $\alpha \in (1,2)$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,c_n}{b_n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(2c-1)\,.$$

De cette proposition remarquons que si $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus α-stable de caractéristiques locales $(b, c, 1-c)$ obtenu comme processus limite de $\left(S_{[n.]}(\Psi) - n.c_n\right)/b_n$, alors le processus limite de $\frac{S_{[nt]}(\Psi)}{b_n}$ est un processus α-stable de caractéristiques locales $\left(b + \frac{\alpha}{\alpha-1}\,(2c-1), c, 1-c\right)$. Rappelons que dans le cas symétrique, $c = 1/2$.

Soit $U_j = \Psi(X_j)$ et notons que sous $\mathbb{P}_\mu$ la suite de v.a. $(U_j)_{j\geq 0}$ est identiquement distribuée et elle vérifie la condition dite anti-clustering si :

$$\lim_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_0| > \varepsilon\, b_n\,,\,|U_j| > \varepsilon\, b_n\right] = 0 \quad , \quad \forall\,\varepsilon > 0\,. \tag{1.3.3}$$

Nous énonçons le résultat suivant en se basant sur la littérature des travaux précédemment cités.

Théorème 1.3.4 *Soit Ψ une fonction vérifiant la condition de variation régulière (1.3.1) et telle que $\mu(\Psi) = 0$ dans le cas où Ψ est μ-intégrable. Supposons que la condition d'anti-clustering (1.3.3) est vérifiée. Supposons de plus que,*

(1) si $\alpha \in (0,1)$, la chaîne de Markov est fortement mélangeante,

(2) si $\alpha \in (1,2)$ la chaîne est ρ-mélangeante et $\sum_{n\geq 1}\frac{\rho(n)}{n} < +\infty$,

(3) si $\alpha = 1$, la fonction Ψ est symétrique, c'est-à-dire que sous $\mathbb{P}_\mu$, $\Psi(X_0)$ et $\Psi(-X_0)$ ont la même loi.

Alors $\left(\frac{1}{b_n}\,S_{[nt]}\right)_{t\in[0,T]}$ converge (sous $\mathbb{P}_\mu$), dans l'espace de Skorokhod $D[0,T]$ vers un processus α-stable $(Z_t)_{t\in[0,T]}$.

Dans le cas $\alpha = 1$, si Ψ n'est pas symétrique on remplacera $S_{[nt]}(\Psi)$ par $T_n(t)$.
Notons qu'on peut remplacer la condition d'anti-clustering (1.3.3) par la condition plus faible suivante qui s'avère aussi nécessaire : $\forall\varepsilon > 0$, il existe des suites $r(n)$ et $l(n)$ tendant vers l'infini telles que $l(n) = o(r(n))$, $r(n) = o(n)$, $n\,\alpha(l(n)) = o(r(n))$ où $\alpha(.)$ est le coefficient de mélange fort, et

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_\mu\left[\max_{1\leq j\leq r(n)}|U_j| > \varepsilon\, b_n\,|\,|U_0| > \varepsilon\, b_n\right] = 0\,. \tag{1.3.5}$$

Maintenant pour une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive récurrente de mesure invariante μ, on sait que $P^n f$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini pour une fonction f telle que $\mu(f) = 0$. On peut donc étudier la vitesse et l'espace dans lequel ces convergences ont lieu. La définition suivante introduit une manière de contrôler ces vitesses de convergence à l'équilibre.

Définition 1.3.6 *Pour tous r et $p \geq 1$, on définit*

$$\alpha_{r,p}(n) = Sup \left\{ \| P^n f \|_{L^p(\mu)} , \, f : \| f \|_{L^r(\mu)} = 1 \; et \; \mu(f) = 0 \right\} .$$

Il en est de même pour $\alpha^*_{p,r}(n)$ correspondant au semi-groupe adjoint P^{*n}.

On peut discuter de l'implication de ces vitesses d'ergodicité sur les conditions de mélange de la chaîne de Markov. Á cet effet nous établissons le résultat suivant.

Proposition 1.3.7 *Notons $[n]$ la partie entière de n. On a,*

(I-1) $\quad \alpha^2_{\infty,2}(n) \vee (\alpha^*)^2_{\infty,2}(n) \leq 4\alpha(n) \leq \alpha_{\infty,2}([n/2])\, \alpha^*_{\infty,2}([n/2])$.

(I-2) $\alpha^2_{2,2}(n) = (\alpha^*)^2_{2,2}(n) \leq \rho(n) \leq \, c\,\alpha_{2,2}(n) \quad avec\, c > 0$.

(I-3) $\quad \phi(n) \leq \alpha^2_{1,\infty}([n/2])$.

L'idée essentielle de la preuve consiste à utiliser des représentations en termes de covariance des coefficients de mélange, par exemple on a

$$4\alpha(n) \;=\; \sup_{F,G} \{\mathrm{Cov}(F,G),\; F \text{ est } \mathcal{F}_0 (resp.\, G \text{ est } \mathcal{G}_n) \text{ mesurable et bornée par } 1\},$$

$$\phi(n) \;=\; \sup_{F,G} \{\mathrm{Cov}(h(F),h(G)),\; F \text{ est } \mathcal{F}_0 (resp.\, G \text{ est } \mathcal{G}_n) \text{ mesurable et } ||h||_\infty \leq 1,\; \mathbb{E}|G| \leq 1\},$$

et d'utiliser ensuite la propriété de Markov et les inégalités de Cauchy-Schwarz ou de Hölder.
De cette proposition on conclut que l'ergodicité et le mélange sont essentiellement des notions similaires. On peut trouver des critères pour s'assurer des diverses conditions d'ergodicité.

- Observons que la condition de trou spectral est suffisante pour que la chaîne soit ρ-mélangeante. De plus la condition de trou spectral permet de vérifier la condition de sommabilité : $\sum_{n\geq 1} \frac{\rho(n)}{n} < +\infty$.

- On a obtenu que $\phi(n) \leq \alpha^2_{1,\infty}([n/2])$, i.e. que la chaîne est ϕ-mélangeante si P^n envoie l'espace $\mathbb{L}^1$ dans $\mathbb{L}^\infty$ pour n assez grand. Cette propriété est connue sous l'appellation d'ultracontractivité que l'on décrit par certaines inégalités fonctionnelles (voir [DSC96] et [Mic97]).

- Le taux ergodique $\alpha_{\infty,2}$ ou $\alpha^*_{\infty,2}$ est décrit dans le cas continu dans [RW01] via les inégalités de Poincaré faible[4] mais en faisant usage des dérivées. Dans le cas discret, cela équivaut encore à l'inégalité de Poincaré faible mais en général on ne sait pas si $\alpha_{\infty,2}$ et $\alpha^*_{\infty,2}$ ont le même comportement ou s'ils sont égaux. Notons que dans certains modèles de chaînes de Markov on peut connaître le comportement asymptotique des coefficients $\alpha_{\infty,2}$ ou $\alpha^*_{\infty,2}$.

Les conditions d'ergodicité étant liées aux conditions de mélange, il suffit de chercher les conditions sous lesquelles la condition d'anti-clustering est vérifiée.
Observons que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_0| > \varepsilon\, b_n\right]\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_j| > \varepsilon\, b_n\right] &= \left(\frac{\mathbb{P}^2_\mu\left(|U_0| > \varepsilon\, b_n\right)}{\mathbb{P}^2_\mu\left(|U_0| > b_n\right)}\right)\frac{[n/k]}{n}\, n^2\,\mathbb{P}^2_\mu\left[|U_0| > b_n\right] \\ &\leq \frac{1}{k}\left(\frac{\mathbb{P}^2_\mu\left[|U_0| > \varepsilon\, b_n\right]}{\mathbb{P}^2_\mu\left[|U_0| > b_n\right]}\right)\end{aligned}$$

de sorte que

$$\limsup_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_0| > \varepsilon\, b_n\right]\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_j| > \varepsilon\, b_n\right] \leq \varepsilon^{-\alpha}\,\frac{1}{k}\,,$$

et finalement

$$\lim_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_0| > \varepsilon\, b_n\right]\,\mathbb{P}_\mu\left[|U_j| > \varepsilon\, b_n\right] = 0\,.$$

[4] L'inégalité de Poincaré faible est un contrôle de la variance par la forme de Dirichlet à un facteur additif près.

Par conséquent une condition suffisante pour établir la condition d'anti-clustering est la suivante :

$$\lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{[n/k]} n \operatorname{Cov}_\mu \left(\mathbb{1}_{|U_0|>\varepsilon\, b_n},\ \mathbb{1}_{|U_j|>\varepsilon\, b_n} \right) = 0 \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{1.3.8}$$

Nous avons ensuite montré que la condition de trou spectral et une contraction stricte de l'opérateur de transition P (hypercontractivité) permet de vérifier la condition d'anti-culstering. Ainsi, nous énonçons notre résultat principal qui est un nouveau théorème de convergence correspondant au cas $\alpha \in (1,2)$ dans l'espace de Skorokhod muni de la topologie J_1.

Théorème 1.3.9 *Soit Ψ telle que $\int \Psi d\mu = 0$, et vérifiant la condition de variation régulière (1.3.1). Supposons que la chaîne vérifie la condition de trou spectral et que $P|\Psi|$ ou $P^*|\Psi|$ est dans $\mathbb{L}^{\alpha+\beta}$ pour un certain $\beta > 0$. Alors $\left(S_{[nt]}(\Psi)/b_n\right)_{t\in[0,T]}$ converge (sous $\mathbb{P}_\mu$) dans l'espace de Skorokhod $D[0,T]$ vers un processus α-stable $(Z_t)_{t\in[0,T]}$.*

Plus généralement pour $\alpha \in (0,2)$ on a :

Théorème 1.3.10 *Soit Ψ vérifiant la condition de variation régulière (1.3.1) telle que $\mu(\Psi) = 0$ pour $\alpha \in (1,2)$ et dans le cas où $\alpha = 1$ supposons que Ψ est une fonction symétrique sous $\mathbb{P}_\mu$. On suppose que la chaîne de Markov vérifie la condition de trou spectral. Si pour un certain $p \leq \alpha$ avec $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$ et que $P(|\Psi|^p)$ ou $P^*(|\Psi|^p)$ est dans $\mathbb{L}^{1+\beta}(\mu)$ pour un certain $\beta > 0$, alors $\left(S_{[nt]}(\Psi)/b_n\right)_{t\in[0,T]}$ converge (sous $\mathbb{P}_\mu$) dans l'espace de Skorokhod $D[0,T]$ vers un processus α-stable $(Z_t)_{t\in[0,T]}$.*

La nouveauté de ces résultats réside d'une part dans leur caractère fonctionnel et d'autre part dans l'approche par la technique du mélange, généralisant ainsi les résultats énoncés dans le Théorème 1.1.25.

Remarque 1.3.11 *Dans le cas $\alpha \in (0,1)$, on peut remplacer la condition de trou spectral par la condition de mélange fort ou encore par la condition $\sum_n \alpha_{\frac{1+\beta}{\beta},q}(n) < +\infty$ pour $q > 1+\beta$ et en choisissant $p > \alpha(1-q^{-1})$.*

On peut en guise d'applications s'intéresser aux chaînes de Markov décrites plus haut. Notons toutefois que dans le cadre de la marche aléatoire réfléchie la condition nécessaire d'anti-clustering (1.3.5) ne se réalise pas.

En conclusion, la méthode de mélange s'est révélée importante pour obtenir un principe d'invariance et en perspective cette technique permettra sans doute d'aboutir à des résultats de convergence des fonctionnelles additives associées à des processus de Markov à temps continu.

Chapitre 3 : Sur l'utilisation des distances idéales dans l'obtention des vitesses de convergence dans le TCL généralisé

Soit Σ l'espace des v.a. réelles.

Définition 1.3.12 *On appelle distance en probabilité dans Σ, une application $d(.,.)$ définie sur l'espace $\Sigma \times \Sigma \to [0,\infty]$ telle que pour toutes v.a. réelles X, Y et Z, les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(1)

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1 \Rightarrow d(X,Y) = 0,$$

(2)

$$d(X,Y) = d(Y,X),$$

(3)

$$d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y).$$

Si les lois marginales P_X et P_Y suffisent pour déterminer les valeurs de $d(X,Y)$ alors la distance d est dite simple.

Définition 1.3.13 *Une distance simple d est dite idéale si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(4)

$$d(X+Z, Y+Z) \leq d(X,Y),$$

pour Z indépendante de X et Y. (Régularité)

(5)

$$d(cX, cY) = |c|^r d(X,Y), \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

(Homogénéité de degré r)

On dira que d est une distance idéale de degré r.

Comme exemple de distance idéale de degré r on peut citer la distance suivante.

Exemple 1.3.14 *Soit $r > 0$ de la forme $r = m + \beta$ avec $\beta \in]0, 1]$ et m un entier naturel. On définit une distance simple en posant*

$$\zeta_r(X, Y) = \sup_{f \in \Lambda_r} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|,$$

où Λ_r est l'ensemble des fonctions bornées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables à l'ordre m, de dérivées $f^{(m)}$ continues et vérifiant l'inégalité

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq |x - y|^{\beta}, \quad \beta = r - m. \tag{1.3.15}$$

On appellera ζ_r la distance idéale de Zolotarev de degré r. Nous allons décrire des conditions dites de domaine d'attraction d'une v.a. α-stable, qui nous permettra d'obtenir des vitesses de convergence vers des v.a. α-stables dans le TCL généralisé pour la distance idéale de Zolotarev.

Définition 1.3.16 *Une v.a. X est dans le domaine d'attraction d'une v.a. α-stable de caractéristiques locales c_1 et c_2 si*

$$\mathbb{P}[X > x] = \frac{c_1 + h(x)}{x^{\alpha}}, \quad \mathbb{P}[X \leq -x] = \frac{c_2 + h(-x)}{x^{\alpha}}, \quad x > 0, \tag{1.3.17}$$

où h est une fonction tendant vers zéro lorsque $x \to +\infty$.
Si de plus la fonction h est telle que $h(x) = \mathcal{O}(|x|^{-\gamma_\alpha})$ avec $\gamma_\alpha > 0$ alors on dira que la v.a. X est dans le domaine d'attraction fort de la v.a. α-stable de caractéristiques locales c_1 et c_2 avec un indice d'attraction γ_α :

$$\mathbb{P}[X > x] - \frac{c_1}{x^{\alpha}} = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{\alpha+\gamma_\alpha}}), \quad \mathbb{P}[X \leq -x] - \frac{c_2}{|x|^{\alpha}} = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{\alpha+\gamma_\alpha}}), \quad x > 0. \tag{1.3.18}$$

Notons que toute v.a. α-stable Θ de caractéristiques locales c_1 et c_2 est dans son propre domaine d'attraction fort. En effet il est bien connu que lorsque $x \to +\infty$ (cf. [Mij86]) :

$$\mathbb{P}[\Theta > x] = \frac{c_1}{|x|^{\alpha}} + \frac{c_2}{|x|^{2\alpha}} + \mathcal{O}(\frac{1}{|x|^{3\alpha}}), \quad \mathbb{P}[\Theta < -x] = \frac{c_2}{|x|^{\alpha}} + \frac{c_1}{|x|^{2\alpha}} + \mathcal{O}(\frac{1}{|x|^{3\alpha}}), \tag{1.3.19}$$

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid et ϑ une v.a. α-stable symétrique. Rappelons que l'on a l'identité en loi suivante :

$$\vartheta \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n}{n^{1/\alpha}}, \quad \forall n \geq 1, \tag{1.3.20}$$

où $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ sont des v.a. indépendantes de même loi que ϑ, que l'on peut supposer indépendantes de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$. Soit d une distance idéale de degré r. La distance d étant simple, nous avons

$$d(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n} V_k, \vartheta) = d\left(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n} V_k, n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\right).$$

Pour $n = 2$ en utilisant l'inégalité triangulaire, les propriétés de régularité et d'homogénéité de la distance idéale d de degré r, on a

$$\begin{aligned}
d\left(2^{-1/\alpha}(V_1+V_2), 2^{-1/\alpha}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right) &\leq d\left(2^{-1/\alpha}(V_1+V_2), 2^{-1/\alpha}(\vartheta_2+V_1)\right) \\
&\quad + d\left(2^{-1/\alpha}(\vartheta_2+V_1), 2^{-1/\alpha}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right) \\
&\leq 2^{-\frac{r}{\alpha}}\left(d(V_1,\vartheta_1) + d(V_2,\vartheta_2)\right) \\
&\leq 2^{1-\frac{r}{\alpha}} d(V_1,\vartheta_1) \\
&= 2^{1-\frac{r}{\alpha}} d(V_1,\vartheta).
\end{aligned}$$

On montre par récurrence sur n, à l'aide des propriétés d'idéalité de la distance d que

$$\begin{aligned}
d\left(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n} V_k, n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\right) &\leq n^{-\frac{r}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n} d\left(V_k,\vartheta_k\right) \\
&= n^{1-\frac{r}{\alpha}}\, d(V_1,\vartheta_1) \\
&= n^{1-\frac{r}{\alpha}}\, d(V_1,\vartheta) \\
&= C\, n^{1-\frac{r}{\alpha}},
\end{aligned}$$

tant que la constante $C := d(V_1,\vartheta)$ est finie.

Par exemple pour $\alpha = 2$ (ϑ est donc une v.a. gaussienne) on peut choisir la distance idéale de Zolotarev de degré $r = 3$. Cela fournit une vitesse de convergence de l'ordre de $n^{-1/2}$, semblable au théorème de Berry-Esseen (cela requiert l'existence de moments d'ordre 3 de la v.a V_1).

On peut également choisir $\alpha \in (0,2)$ et $d = \zeta_r$ avec $r \in]\alpha, 2]$ pour obtenir des vitesses de convergence vers des v.a α-stables. Il suffirait pour un tel cas d'exiger des conditions de domaine d'attraction fort pour contrôler la finitude de la constante $C = \zeta_r(V_1, \vartheta)$. Nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 1.3.21 *Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid intégrables et posons*

$$\tilde{S}_n = n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} (V_k - \mathbb{E}[V_k]).$$

Supposons que V_1 est dans le domaine d'attraction fort d'une v.a. α-stable symétrique ϑ avec $\alpha \in (1,2)$, d'indice d'attraction $\gamma_\alpha > r - \alpha$ avec $r \in (\alpha, 2]$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\zeta_r(\tilde{S}_n, \vartheta) \leq C\, n^{\frac{\alpha - r}{\alpha}}.$$

En conséquence de ce Théorème on obtient des vitesses de convergence entre les fonctions caractéristiques de $\tilde{S}_n$ et ϑ. En effet, posons

$$\chi_t(\tilde{S}_n, \vartheta) = \left| \mathbb{E}[e^{it\tilde{S}_n}] - \mathbb{E}[e^{it\vartheta}] \right|, \quad t \in \mathbb{R},$$

et notons qu'en utilisant la définition de la distance idéale ζ_2, on a

$$\chi_t(\tilde{S}_n, \vartheta) \leq t^2 \zeta_2(\tilde{S}_n, \vartheta),$$

car la fonction $f_t(x) = e^{itx}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, est bornée et la dérivée f_t' lipschitzienne de constante t^2. On obtient ainsi le Corollaire suivant.

Corollaire 1.3.22 *Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid intégrables et posons*

$$\tilde{S}_n = n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} (V_k - \mathbb{E}[V_k]).$$

Supposons que V_1 est dans le domaine d'attraction fort d'une v.a. α-stable symétrique ϑ avec $\alpha \in (1,2)$, d'indice d'attraction $\gamma_\alpha > 2 - \alpha$. Alors il existe une constante $C(t) > 0$ telle que

$$\chi_t(\tilde{S}_n, \vartheta) \leq\ C(t)\, n^{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}.$$

En conclusion, l'utilisation des distances idéales permet d'obtenir des vitesses de convergence dans le TCL généralisé. En guise de perspectives nous souhaiterions étendre ces techniques pour d'autres distances idéales comme la distance de Wasserstein et la distance en variation totale dans le cadre des v.a. indépendantes non identiquement distribuées, des v.a. dépendantes comme les martingales et les chaînes de Markov.

Chapitre 4 : Ordre convexe ou inégalités de comparaison convexe pour des intégrales stochastiques stables

L'objectif du Chapitre 4 est d'établir des inégalités de comparaison convexe pour des intégrales stochastiques dirigées par des processus α-stables, $\alpha \in (1,2)$. L'approche utilisée repose sur le calcul stochastique forward-backward dans le cas stable.

L'approche par le calcul stochastique forward-backward

Soit un processus strictement α-stable $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ où $\alpha \in (1,2)$. La mesure de Lévy de $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est donnée par

$$\nu(dx) := \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} \left(c_+ 1_{\{x>0\}} + c_- 1_{\{x<0\}}\right).$$

Exemple 1.3.23 ***Un exemple de comparaison convexe.***
Considérons des v.a. X_T et Y_T données par

$$X_T := e^{-\theta T} X_0 + \int_0^T e^{-\theta(T-t)} dZ_t,$$

$$Y_T := e^{-\kappa T} X_0 + \int_0^T e^{-\kappa(T-t)} dZ_t$$

où Z est un processus α-stable symétrique et X_0 une variable aléatoire centrée et θ, κ deux réels donnés. On montre sans faire usage du calcul forward-backward que si $\theta \geq \kappa$ alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T)] \leq \mathbb{E}[\varphi(Y_T)],$$

pour toute fonction convexe φ pour laquelle l'espérance existe.

Ainsi on aimerait se tourner vers d'autres exemples d'application qu'on souhaiterait généraliser. Le processus $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z_s, s \in [0,t])$- martingale. Soit K

un processus $\mathcal{F}^Z$-prévisible appartenant à l'espace $L^2(\Omega \times [0,T])$, i.e.,

$$\int_0^T \mathbb{E}[K_t^2]\, dt < +\infty.$$

Par la décomposition de Lévy-Itô, l'intégrale stochastique $X_T := \int_0^T K_s\, dZ_s$ est bien définie et intégrable. De plus,

$$\forall t \in [0,T] \quad X_t := \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t^Z] = \int_0^t K_s\, dZ_s, \quad t \in [0,T],$$

est une $\mathcal{F}^Z$-martingale. Rappelons qu'un processus rétrograde ou backward (strictement) α-stable $(\tilde{Z}_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus (strictement) α-stable évoluant en temps rétrograde ou backward sur $[0,T]$. Naturellement il a les mêmes propriétés que le processus forward Z, en particulier c'est une $\mathcal{F}_t^{\tilde{Z}} := \sigma(\tilde{Z}_s : t \leq s \leq T)$ martingale rétrograde ou backward, i.e. $\mathbb{E}[\tilde{Z}_s|\mathcal{F}_t^{\tilde{Z}}] = \tilde{Z}_t, \quad s \leq t \leq T$. Nous considérons sa mesure de Lévy de la forme :

$$\tilde{\nu}(dx) := \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} \left(\tilde{c}_+\, 1_{\{x>0\}} + \tilde{c}_-\, 1_{\{x<0\}}\right).$$

Notons que l'indice $\alpha \in (1,2)$ est le même que précédemment. Soit $\tilde{K}$ un processus $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$-prévisible appartenant aussi à l'espace $L^2(\Omega\times[0,T])$. On définit l'intégrale stochastique stable backward $\tilde{X}_0 := \int_0^T \tilde{K}_s\, \tilde{d}\tilde{Z}_s$ de la même manière que précédemment. La différentielle d'Itô correspondante $\tilde{d}$ signifiant que la limite en probabilité est prise sur les sommes de type

$$\sum_{i=1}^{p_n} \tilde{K}_{t_i^n}\, (\tilde{Z}_{t_{i-1}^n} - \tilde{Z}_{t_i^n}),$$

pour toutes subdivisions (t_i^n) de $[0,T]$. La v.a. $\tilde{X}_0$ est intégrable et

$$\tilde{X}_t := \mathbb{E}[\tilde{X}_0|\mathcal{F}_t^{\tilde{Z}}] = \int_t^T \tilde{K}_s\, \tilde{d}\tilde{Z}_s, \quad t \in [0,T],$$

est une $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$-martingale backward. Nous supposons dans la suite que Z et $\tilde{Z}$ sont indépendants.

Nous allons maintenant introduire des décompositions d'intégrales stochastiques stables. La méthode de décomposition s'inspire des travaux dans [Kal92]. Nous allons faire une présentation dans le cas forward, le cas backward étant similaire. Observons pour commencer que la mesure de Lévy ν du processus strictement α-stable Z est de la forme

$$\nu \;=\; c_+ \nu_+ + c_- \nu_-,$$

où ν_+ et ν_- sont des mesures sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, de densité $|x|^{-\alpha-1}$. Ainsi la propriété d'auto-similarité de Z entraîne la représentation suivante

$$Z \;=\; c_+^{1/\alpha}\, Z' - c_-^{1/\alpha}\, Z'',$$

où Z', Z'' sont des processus strictement α-stables indépendants et de mesure de Lévy ν_+. En d'autres termes cette décomposition est obtenue en séparant les sauts positifs et négatifs de Z. Par conséquent,

$$\begin{aligned} X_t \;&=\; \int_0^t c_+^{1/\alpha} K_s\, dZ'_s - \int_0^t c_-^{1/\alpha} K_s\, dZ''_s \\ &=\; \int_0^t c_+^{1/\alpha} K_s^+\, dZ'_s + \int_0^t c_-^{1/\alpha} K_s^-\, dZ''_s - \int_0^t c_+^{1/\alpha} K_s^-\, dZ'_s - \int_0^t c_-^{1/\alpha} K_s^+\, dZ''_s. \end{aligned}$$

Nous rappelons que $K_t^+ = \max(K_t, 0)$ et $K_t^- = -\min(K_t, 0)$. La décomposition de Kallenberg de l'intégrale stochastique $X_t = \int_0^t K_t dZ_t$ s'écrit comme suit :

$$X_t \;=\; \int_0^t \gamma_s\, d\hat{Z}'_s - \int_0^t \lambda_s\, d\hat{Z}''_s,$$

où

$$\gamma_t := c_+^{1/\alpha}\, K_t^+ + c_-^{1/\alpha}\, K_t^- \quad \text{et} \quad \lambda_t := c_+^{1/\alpha}\, K_t^- + c_-^{1/\alpha}\, K_t^+$$

et les processus $\hat{Z}', \hat{Z}''$ donnés par,

$$\hat{Z}'_t \;=\; \int_0^t 1_{\{K_s \geq 0\}}\, dZ'_s + \int_0^t 1_{\{K_s < 0\}}\, dZ''_s \quad \text{et} \quad \hat{Z}''_t \;=\; \int_0^t 1_{\{K_s < 0\}}\, dZ'_s + \int_0^t 1_{\{K_s \geq 0\}}\, dZ''_s,$$

sont indépendants et de même loi que Z', Z''. Comme dit ci-dessus une décomposition similaire a lieu pour l'intégrale stochastique backward $\tilde{X}_t$ et posons pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{\gamma}_t := \tilde{c}_+^{1/\alpha}\, \tilde{K}_t^+ + \tilde{c}_-^{1/\alpha}\, \tilde{K}_t^- \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_t := \tilde{c}_+^{1/\alpha}\, \tilde{K}_t^- + \tilde{c}_-^{1/\alpha}\, \tilde{K}_t^+.$$

Ces considérations permettent d'aboutir au résultat suivant.

Théorème 1.3.24

$$\textit{Si p.s. } \gamma_t \le \tilde{\gamma}_t \quad \textit{et} \quad \lambda_t \le \tilde{\lambda}_t, \quad t \in [0,T] \tag{1.3.25}$$

alors on a

$$\mathbb{E}[\varphi\left(X_t + \tilde{X}_t\right)] \le \mathbb{E}[\left(\varphi(X_s + \tilde{X}_s\right)], \quad 0 \le s \le t \le T. \tag{1.3.26}$$

En particulier l'inégalité de comparaison convexe suivante a lieu :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T K_t dZ_t\right)\right] \le \mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t\right)\right],$$

pour toute fonction convexe φ pour laquelle l'espérance existe.

La preuve de ce théorème repose sur la formule d'Itô forward-backward pour la somme $X_t + \tilde{X}_t$ puis en prenant l'espérance on fait intervenir des caractéristiques associées aux intégrales stochastiques X_t et $\tilde{X}_t$.
Le théorème précédent décrit les conditions sous lesquelles l'intégrale stochastique stable forward est dominée suivant l'ordre convexe par l'intégrale stochastique stable backward. On peut considérer des processus backward $\tilde{Z}$ de la forme

$$\tilde{Z}_t := Z'_{T-t}, \ t \in [0,T]$$

avec Z' une copie indépendante de Z, et choisir par exemple

$$\tilde{K}_t := k(t), \quad t \in [0,T],$$

avec k une fonction déterministe de carré intégrable. Notons maintenant que, par stationnarité et indépendance des accroissements de Z' (ou Z) on obtient

$$\int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^T k(t) dZ'_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^T k(t) dZ_t,$$

pour arriver à la version suivante :

Théorème 1.3.27 *Soit Z un processus strictement stable d'indice $\alpha \in (1,2)$. Soient $K \in L^2(\Omega \times [0,T])$ un processus $\mathcal{F}^Z$ prévisible et $k \in L^2([0,T])$ une fonction détermin-*

iste. Posons pour tout $t \in [0,T]$

$$\gamma_t := c_+^{1/\alpha} K_t^+ + c_-^{1/\alpha} K_t^- \quad et \quad \tilde{\gamma}_t := c_+^{1/\alpha} k^+(t) + c_-^{1/\alpha} k^-(t),$$

$$\lambda_t := c_+^{1/\alpha} K_t^- + c_-^{1/\alpha} K_t^+ \quad et \quad \tilde{\lambda}_t := c_+^{1/\alpha} k^-(t) + c_-^{1/\alpha} k^+(t),$$

Si p.s.

$$\gamma_t \le \tilde{\gamma}_t \quad et \quad \lambda_t \le \tilde{\lambda}_t, \quad t \in [0,T], \tag{1.3.28}$$

alors l'inégalité de comparaison convexe suivante a lieu:

$$\mathbb{E}\varphi\left(\int_0^T K_t dZ_t\right) \le \mathbb{E}\varphi\left(\int_0^T k(t) dZ_t\right),$$

pour toute fonction convexe φ *pour laquelle l'intégrale existe.*

Notons que si les inégalités dans (1.3.28) sont renversées alors l'inégalité de comparaison précédente est aussi renversée. Remarquons aussi que sous les conditions précédentes, si de plus A est un processus $\mathcal{F}^Z$-adapté et h une fonction déterministe telle que $A_t \le h(t),\ t \in [0,T]$ p.s. alors

$$\mathbb{E}\varphi\left(\int_0^T K_t dZ_t + \int_0^T A_t dt\right) \le \mathbb{E}\varphi\left(\int_0^T k(t) dZ_t + \int_0^T h(t) dt\right),$$

pour toute fonction convexe croissante φ. Cette extension permet par exemple de se passer de la propriété de stricte stabilité sur Z. En effet, en considérant simplement un processus α-stable $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, on sait qu'il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}$ telle que $(Z_t - \kappa t)_{t\in[0,T]}$ soit un processus strictement α-stable et on choisit par exemple $A_t = \kappa K_t$ et $h(t) = \kappa k(t)$. Pour clôturer ce paragraphe disons quelques mots sur les conditions du théorème précédent.

(1) La condition (1.3.28) est simple à considérer dans les situations suivantes :

- Le processus stable Z est symétrique et on suppose que, p.s. $|K_t| \le |k(t)|$ pour tout $t \in [0,T]$.
- Les processus K et k sont de même signe et de signe constant, et $K_t \le k(t)$ p.s. pour tout $t \in [0,T]$.

(2) La classe de fonctions convexes φ pour laquelle les inégalités de comparaison

convexe précédentes ont lieu inclut la classe de fonctions convexes φ telles que

$$\lim_{x\to\infty} |x|^{-p}\varphi(x) < \infty, \quad 1 \le p < \alpha.$$

Par exemple pour $\varphi(x) = |x|^p$ on montre que

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T)] \ = \ \int_0^{+\infty} p\, x^{p-1}\, \mathbb{P}\left(|X_T| > x\right) dx \ \le 1 + M \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-p+1}} < \infty.$$

Notons enfin qu'il serait intéressant en guise de perspective d'étudier les inégalités de comparaison convexe dans le cadre des équations différentielles stochastiques dirigées par des processus α-stables ou encore d'autres types d'inégalités de comparaison.

Chapitre 2

Limit theorems for some functionals with heavy tails of a discrete time Markov chain

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans le journal ESAIM : Probability and Statistics.

Sommaire

Abstract

Consider an irreducible, aperiodic and positive recurrent discrete time Markov chain $(X_n, n \geq 0)$ with invariant distribution μ. We shall investigate the long time behaviour of some functionals of the chain, in particular the additive functional $S_n(\Psi) = \sum_{i=1}^{n} \Psi(X_i)$ for a possibly non square integrable function Ψ. To this end we shall link ergodic properties of the chain to mixing properties, extending known results in the continuous time case. We will then use existing tools and results of convergence to stable distributions, obtained in [DJ89b, TK10, Kri10, BK12] for stationary mixing sequences. Contrary to the usual $\mathbb{L}^2$ framework studied in [CCG12], where weak forms

of ergodicity are sufficient to ensure the validity of the Central Limit Theorem, we will need here strong ergodic properties: the existence of a spectral gap, hyperboundedness (or hypercontractivity). These properties are also discussed. Finally we give explicit examples.

2.1 Introduction

On some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, consider a discrete time Markov chain $\{X_n, n \geq 0\}$ which is irreducible, aperiodic and positive recurrent with invariant probability measure μ, assumed to be ergodic. As usual we denote by $\mathbb{P}_x$ the conditional distribution of $\mathbb{P}$ knowing that $X_0 = x$. Let Ψ be a μ integrable function such that $\int \Psi d\mu = 0$. According to the ergodic theorem the normalized additive functional

$$\frac{S_n(\Psi)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Psi(X_i)$$

goes to 0 as n goes to infinity, both in $\mathbb{L}^1(\mu)$ and $\mathbb{P}_\mu$ almost surely.

When $\Psi \in \mathbb{L}^2(\mu)$, it is expected that $S_n(\Psi)/\sqrt{n}$ (or $S_n(\Psi)/\sqrt{\mathrm{Var}_\mu(S_n(\Psi))}$) converges in distribution to some Gaussian limit (Central Limit Theorem). We refer to [CCG12] for an account of the impressive literature on the subject, as well as results including an anomalous behaviour of the variance (i.e. $\mathrm{Var}_\mu(S_n(\Psi))$ is not of order n), or an anomalous rate of convergence (i.e. different of the two aforementioned normalization rates). The functional version (convergence of the full law of the process to some Brownian motion) is also discussed therein. We shall recall some of the relevant results in our situation in section 2.3.

As noticed in [CCG12], the key tool is the rate of convergence of $||P^n\Psi||_{\mathbb{L}^2(\mu)}$ to 0. This rate of convergence is connected to the mixing properties of the sequence $\Psi(X_n)$ so that one can use the massive literature relying mixing and central limit properties.

In the context of [CCG12], the chain comes from a time continuous Markov process, so that this rate of convergence is studied by using recent results on various functional inequalities. At some point, the derivation of these inequalities strongly uses the time continuous setting, allowing us to consider time derivatives.

In particular, if $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$ for some $p > 2$, one can use weak Poincaré inequalities furnishing a quick enough but non exponential decay of the variance of $P^n\Psi$, controlled by the initial $\mathbb{L}^p(\mu)$ norm of Ψ. When Ψ does not belong to any $\mathbb{L}^p(\mu)$ for $p > 2$, one has to assume the existence of a spectral gap.

The goal of the next section 2 is, after recalling standard mixing properties, to extend the relevant inequalities to the discrete time setting. In particular we extend the notion of weak Poincaré inequality yielding non exponential decays for the $\mathbb{L}^2$ norm of $P^n\Psi$. This can be used to mimic what is done in [CCG12] in the situation of a discrete time Makov chain.

If Ψ is not square integrable, the situation for the additive functional, is much more delicate, even in the i.i.d. case. CLT analogues have been proved by Gnedenko, the limiting distribution being a stable one, but require rigid assumptions on the tails of $\Psi(X_i)$. A few extensions to weakly dependent cases, essentially mixing cases, have been obtained in [DJ89b, JK89, TK10, BK12, Kri10], for both the usual and the functional versions. Let us also mention the recent [JKO09] dealing with Markov chains and the very recent [Ba11] which contains some new results on the general stationary case but merely difficult to explicitly explain in our situation.

It is thus natural to show how to apply these mixing results to the case of a Markov chain. Other methods (martingale method, coupling...) are available (see [JKO09]).

Our results for this problem, contained in section 3, substantially improve upon the ones in [JKO09] on many points, but not on all (see the detailed discussion in remark 3.10 and the final section). But, presumably, the main interest here is the method. Actually, once the correspondance between ergodicity and mixing is understood, the only thing to do in order to apply stable convergence results for mixing sequences, is to check the so called "anti-clustering" condition. It is at this point that the contraction property introduced in [JKO09] (i.e. $P\Psi$ belongs to a strictly smaller Lebesgue space than Ψ itself) appears as a natural assumption in order to control covariances.

The price to pay at least if $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$ for $1 \leq p < 2$, as in [JKO09] or for the

$\mathbb{L}^2$ case is that we have to assume the existence of a spectral gap. This is due to the fact that, contrary to the case $p > 2$, we have to precisely control the tails, not only from above but also from below since what is required is an equivalent for these tails; i.e. controlling the $\mathbb{L}^p$ norm of $P^n\Psi$ by the stronger $\mathbb{L}^{p'}$ norm of Ψ for some $p' > p$ is not enough to get the correct rate of convergence to a stable distribution. Notice that deviation bounds are studied in [CG08].

The aforementioned contraction property for Ψ is not easy to prove for one chosen function. A stronger form of this contraction property, is that P maps continuously $\mathbb{L}^p(\mu)$ into $\mathbb{L}^{p'}(\mu)$ for some (or for all) $p' > p$. This is a well known property called "hyperboundedness" (or hypercontractivity). For continuous time semi-groups this property is equivalent to a logarithmic Sobolev inequality. Again in the discrete time setting, these connections are not so clear. The final section is devoted to describe typical situations where we can show hyperboundedness. The standard situation of the usual birth and death chain on the half line is finally described. In this case, generically, the stable invariance principle does not hold.

Acknowledgements. The authors are indebted to two anonymous referees for their valuable comments and criticism on a first version of this paper.

2.2 Mixing and quantitative ergodicity for Markov chains

As said in the introduction we shall recall in this section the relationship between mixing and quantitative ergodic properties of the chain. We then will give some explicit conditions ensuring the control of the decay to equilibrium, in terms of functional inequalities.

2.2.1 Mixing and quantitative ergodicity

Recall some usual mixing coefficients :

Definition 2.2.1 *Let $\mathcal{F}_j$ (resp. $\mathcal{G}_j$)) be respectively the backward (or the past) and the forward (or the future) σ-fields generated by X_n for $0 \leq n \leq j$ (resp. $j \leq n$).*

- *The strong mixing coefficient $\alpha(n)$ is defined as :*

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= \sup_j \left\{ \sup_{A,B} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \ , \ A \in \mathcal{F}_j \ , \ \ B \in \mathcal{G}_{j+n} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \sup_j \left\{ \sup_{F,G} \ |Cov(F,G)| \, , \ F \ \mathcal{F}_j (resp. \, G \ \mathcal{G}_{n+j}) \ \textit{measurable and bounded by } 1 \right\} .\end{aligned}$$

  If $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$*, the process is strongly mixing.*

- *The φ-mixing coefficient $\varphi(n)$ is defined as:*

$$\varphi(n) = \sup_j \left\{ \sup_{A,B} |\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)| \ , \ A \in \mathcal{F}_j \ , \ B \in \mathcal{G}_{j+n} \right\} .$$

  If $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$*, the process is φ-mixing or uniformly mixing.*

- *The ρ-mixing coefficient $\rho(n)$ is defined as the maximal correlation coefficient, i.e.*

$$\rho(n) = \sup_j \left\{ \sup_{F,G} \; Corr(F,G)\,,\; F \in L^2(\mathcal{F}_j)\,,\; G \in L^2(\mathcal{G}_{n+j}) \right\} .$$

If $\lim_{n\to\infty} \rho(n) = 0$ *the process is ρ-mixing.*

Of course for strictly stationary sequences (i.e. such that, for all $n \geq 0$, the law of $(X_{n+j})_{j\geq 0}$ is the same as the one of $(X_j)_{j\geq 0}$) the supremum on j is irrelevant.
It is worth noticing that the mixing coefficients of $Z_n = \Psi(X_n)$ are smaller than the corresponding ones for X_n. Also recall that

$$2\,\alpha(n) \leq \varphi(n) \quad , \quad 4\,\alpha(n) \leq \rho(n) \quad , \quad \rho(n) \leq 2\,\sqrt{\varphi(n)}\,. \tag{2.2.2}$$

Let $(X_n)_{n\geq 0}$ be an irreducible, aperiodic and positive recurrent Markov chain with unique invariant probability measure μ. We denote by P the transition kernel of the chain. Recall that P is a bounded operator in all $\mathbb{L}^p(\mu)$'s ($p \geq 1$), with operator norm equal to 1 (i.e. a contraction). We also introduce the adjoint operator P^*, defined by

$$\int f\, Pg\, d\mu = \int g\, P^* f\, d\mu$$

for f and g square integrable w.r.t. μ, which is again a contraction.
The following definition introduces some way to control the ergodic decay to equilibrium.

Definition 2.2.3 *For $r, p \geq 1$ we define*

$$\alpha_{r,p}(n) = Sup \left\{ \parallel P^n g \parallel_{L^p(\mu)} \,,\; \forall g : \parallel g \parallel_{L^r(\mu)} = 1 \;\; and \;\; \int g\, d\mu = 0 \right\} .$$

We define similarly $\alpha^*_{p,r}(n)$.

There are of course some relationships between these decay rates. Indeed, if we look at the operator

$$Qf = Pf - \int f d\mu$$

it is easily seen that $Q^n f = P^n f - \int f d\mu$. Of course the operator norm of Q acting on $\mathbb{L}^p$ spaces satisfies $|||Q|||_{r,p} \leq 2\,\alpha_{r,p}$ and $|||Q|||_{p,p} \leq 2$ for all $1 \leq p \leq +\infty$. Hence, according to Riesz-Thorin interpolation theorem

$$\alpha_{r,p} \leq 2\,\alpha^t_{r_1,p_1}\,\alpha^{1-t}_{r_2,p_2}$$

if

$$\frac{1}{r} = \frac{t}{r_1} + \frac{1-t}{r_2} \text{ and } \frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2} \quad \text{for some } 0 \leq t \leq 1\,.$$

Of course

$$\alpha^*_{r,p} = \alpha_{\frac{p}{p-1},\frac{r}{r-1}}\,.$$

Remark 2.2.4 *Though it is not really important in most applications, one cannot directly use the Riesz-Thorin interpolation theorem with P in restriction to the subspace of zero mean functions, contrary to what is done in some papers. That is why an extra factor 2 (the operator norm of Q) has to appear. For a more accurate discussion see [CGR10].*

In order to compare mixing properties and rate of convergence for the stationary chain (i.e. assuming that X_0 is distributed according to μ), consider F and G, respectively $\mathcal{F}_j$ and $\mathcal{G}_{j+n}$ measurable and centered (for instance $F = \mathbb{1}_A - \mu(A)$ and $G = \mathbb{1}_B - \mu(B)$). Define f (resp. g) by $\mathbb{E}_\mu(F|X_j) = f(X_j)$ (resp. $\mathbb{E}_\mu(G|X_{j+n}) = g(X_{j+n})$). Then

$$\mathrm{Cov}_\mu(F,G) = \int P^n f\, g\, d\mu = \int P^{n/2} f\, (P^*)^{n/2} g\, d\mu\,, \tag{2.2.5}$$

the latter being true provided n is even. Since f and g are still centered we immediately deduce (as in [CCG12])

Proposition 2.2.6 *For all n, if $[n/2]$ denotes the integer part of n,*

(1) $\alpha^2_{\infty,2}(n) \vee (\alpha^*)^2_{\infty,2}(n) \leq 4\alpha(n) \leq \alpha_{\infty,2}([n/2])\,\alpha^*_{\infty,2}([n/2])$.

(2) *Either $\alpha_{2,2}(n) = 1$ for all n or $\alpha_{2,2}(n) \leq c\,e^{-\lambda n}$ for some $\lambda > 0$. In the second case*

$$\alpha^2_{2,2}(n) = (\alpha^*)^2_{2,2}(n) \leq \rho(n) \leq c\,\alpha_{2,2}(n)\,.$$

(3) $\varphi(n) \leq \alpha^2_{1,\infty}([n/2])$.

Proof. For the left hand side of (1) we may choose $F = P^n f(X_0)$ and $G = f(X_n)$ for a centered f bounded by 1. It follows $\int (P^n f)^2\, d\mu = \mathrm{Cov}(F, G) \leq 4\alpha(n)$. The right hand side is immediate, thanks to (2.2.5) and the fact that α is non increasing.

For (2) first note the equality $\alpha_{2,2}(n) = \alpha^*_{2,2}(n)$. Hence $\alpha_{2,2}(k)\, \alpha^*_{2,2}(k) = \alpha_{2,2}(2k)$. Now, using the Markov property it is immediate that if $\alpha_{2,2}(n_0) = e^{-\lambda} < 1$ for some n_0, $\alpha_{2,2}(n) \leq c\, e^{-n\lambda}$ for all n. Hence, $\alpha_{2,2}(k+1)\, \alpha^*_{2,2}(k) \leq c\, \alpha_{2,2}(2k+1)$. The right hand side of (2) follows, using (2.2.5). The left hand side is similar to (1).

For (3) just use the first equality in (2.2.5). ∎

One can improve the results in the symmetric case (the proof is left to the reader)

Proposition 2.2.7 *Assume that in addition μ is symmetric, i.e. $\int f\, Pg\, d\mu = \int g\, Pf\, d\mu$ for nice f and g. Then*

(1) $\alpha^2_{\infty,2}(n+1) \leq 4\alpha(2n+1) \leq 4\alpha(2n) = \alpha^2_{\infty,2}(n)$.

(2) $\alpha^2_{2,2}(n+1) \leq \rho(2n+1) \leq \rho(2n) = \alpha^2_{2,2}(n)$.

2.2.2 Functional inequalities in the discrete time setting

To conclude this section we shall give explicit criteria for the estimation of the convergence rate. These criteria (and much more) are well known in the continuous time case. In the latter situation proofs are often based on differentiation in time.

We begin with the renowned spectral gap estimate which is trivial in this situation

Proposition 2.2.8 *Under the previous assumptions for the chain, the following are equivalent*

(1) $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu),\ Var_\mu(Pf) \leq e^{-2\lambda}\, Var_\mu(f)$,

(2) $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ *and all* n, $Var_\mu(P^n f) \leq e^{-2\lambda\, n}\, Var_\mu(f)$,

(3) *there exists* C *such that* $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu)$,

$$Var_\mu(f) \leq C\, \langle (I - P^*P)f, f\rangle := \int (f - P^*Pf)\, f\, d\mu\,.$$

The inequality in (3) is called a Poincaré inequality, and if it holds, $e^{-\lambda} = \frac{C-1}{C}$.

We shall now prove the analogue of lemma 2.12 in [CGZ13]

Lemma 2.2.9 *Assume that μ is symmetric. Let $\mathcal{C}$ be a dense subset of $\mathbb{L}^2(\mu)$. Suppose that there exists $\beta > 0$, and, for any $f \in \mathcal{C}$, a constant c_f such that:*

$$\forall n, \quad Var_\mu(P^n f) \leq c_f e^{-\beta n}.$$

Then

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mu), \forall n, \quad Var_\mu(P^n f) \leq e^{-\beta n}\, Var_\mu(f).$$

In particular, in the symmetric situation, if $\alpha_{\infty,2}(n) \leq c\, e^{-\beta\, n}$, then $\alpha_{2,2}(n) \leq e^{-\beta\, n}$.

Proof. Thanks to symmetry,

$$\begin{aligned} \langle P^n f, P^n f\rangle &= \langle P^{n+1} f, P^{n-1} f\rangle \\ &\leq \langle P^{n+1} f, P^{n+1} f\rangle^{1/2} \langle P^{n-1} f, P^{n-1} f\rangle^{1/2}. \end{aligned}$$

If $h(n) = \ln(\langle P^n f, P^n f\rangle) + \beta\, n$, it follows that

$$h(n) \leq \frac{1}{2}\, h(n+1) + \frac{1}{2}\, h(n-1)\,,$$

which is some convexity property similar to lemma 2.11 in [CGZ13]. In particular, if for some n and some $\varepsilon > 0$ it holds $h(n) \geq h(n-1) + \varepsilon$, this convexity property implies $h(n+1) \geq h(n) + \varepsilon$, hence h growths linearly at infinity. Replacing $f \in \mathcal{C}$ by $f - \int f\, d\mu$, we deduce from the hypothesis that h is bounded. Hence, h is non increasing, $h(n) \leq h(0)$, and the lemma is proved. ∎

It can be shown that this result is not true in the non-symmetric case.

It can be interesting to obtain some non exponentially decreasing controls of $\alpha_{\infty,2}$. This can be done in terms of weak Poincaré inequalities similar to the continuous time case where they were introduced in [RW01].

To understand what happens remark that for a centered f,

$$\text{Var}_\mu(f) = \langle (I - P^* P) f, f\rangle + \text{Var}_\mu(Pf)\,. \tag{2.2.10}$$

In the symmetric case, according to the convexity property in Lemma 2.2.9,

$$\langle Pf, Pf\rangle \leq \langle f, f\rangle^{1/2} \langle P^2 f, P^2 f\rangle^{1/2} \leq \frac{1}{2}\,\langle f, f\rangle + \frac{1}{2}\,\langle P^2 f, P^2 f\rangle$$

so that

$$\langle (I - P^*P)f, f\rangle \geq \langle (I - P^*P)Pf, Pf\rangle \,.$$

We may thus iterate in (2.2.10) and obtain

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &\leq n\,\langle (I - P^*P)f, f\rangle + \mathrm{Var}_\mu(P^n f) \qquad (2.2.11)\\ &\leq n\,\langle (I - P^*P)f, f\rangle + \alpha^2_{\infty,2}(n)\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty \ . \end{aligned}$$

Since $\alpha^2_{\infty,2}$ is non increasing, we may take the linear interpolation of this function between n and $n+1$, i.e.

$$\alpha^2_{\infty,2}(s) = (n+1-s)\alpha^2_{\infty,2}(n) + (s-n)\alpha^2_{\infty,2}(n+1)$$

which is still non increasing, and then consider the left inverse of this function, denoted by β. It thus holds for all $0 < s \leq 1$,

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \beta(s)\,\langle (I - P^*P)f, f\rangle + s\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty \ . \qquad (2.2.12)$$

This kind of inequality is called a weak Poincaré inequality.

Conversely, assume that (2.2.12) is true for some non increasing function β. We do no more need any symmetry assumption. Then, thanks to the contraction property of P, for any centered and bounded f it holds

$$\begin{aligned} \langle P^n f, P^n f\rangle &\leq (1-(1/\beta(s)))\,\langle P^{n-1}f, P^{n-1}f\rangle + (s/\beta(s))\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty \\ &\leq (1-(1/\beta(s)))^n\,\langle f, f\rangle + (s/\beta(s))\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty \sum_{j=0}^{n-1}(1-(1/\beta(s)))^j \\ &\leq (1-(1/\beta(s)))^n\,\langle f, f\rangle + s\,(1-(1-(1/\beta(s)))^n)\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty \\ &\leq (1-(1/\beta(s)))^n\,\langle f, f\rangle + s\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty \ . \end{aligned}$$

We thus have for any bounded f,

$$\mathrm{Var}_\mu(P^n f) \leq (s + (1-(1/\beta(s)))^n)\ \parallel f - \int f\,d\mu \parallel^2_\infty ,$$

for all $0 < s \leq 1$; so that optimizing on s we obtain

$$\alpha^2_{\infty,2}(n) \leq 2\, s_n \quad \text{where } s_n \text{ is defined by } \; (1-(1/\beta(s_n)))^n = s_n\,. \tag{2.2.13}$$

Let us summarize what we have obtained.

Proposition 2.2.14 *If (2.2.12) holds for some non increasing function β, then $\alpha_{\infty,2}(n)$ goes to 0 as $n \to \infty$ as explained in (2.2.13).*
Conversely, in the symmetric situation, any decay to 0 of $\alpha_{\infty,2}(n)$ will imply some weak Poincaré inequality (2.2.12).

Note that a similar result holds for the adjoint operator P^* which satisfies the same weak Poincaré inequality (since $\langle (I-P^*P)f,f\rangle = \langle (I-PP^*)f,f\rangle$).
In general however, we do not know whether $\alpha_{\infty,2}$ and $\alpha^*_{\infty,2}$ are equal or have the same behaviour. This is discussed in Remark 4.6 in [CCG12]. In particular it is shown therein that if they are slowly decreasing, $\alpha_{\infty,2}$ and $\alpha^*_{\infty,2}$ are of the same order.

Remark 2.2.15 *Instead of looking at P^*P one can use another "symmetrization" i.e. $Q = \frac{1}{2}(P+P^*)$ which is often used to introduce the continuous time semi-group $Q_t = e^{t(Q-I)}$ whose generator is $L = Q - I$. In this case, the associated weak Poincaré inequality is*

$$Var_\mu(f) \leq \beta(s)\langle -Lf,f\rangle + s||f - \int f d\mu||^2_\infty .$$

Note that this weak Poincaré inequality is weaker than (2.2.12).
Indeed if (2.2.12) is satisfied, it holds for all centered f's,

$$\langle Pf,Pf\rangle \leq \frac{\beta(s)-1}{\beta(s)}\langle f,f\rangle + \frac{s}{\beta(s)}||f||^2_\infty .$$

Hence

$$\begin{aligned}\langle Pf,f\rangle &\leq \langle Pf,Pf\rangle^{\frac{1}{2}}\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\frac{\beta(s)-1}{\beta(s)}\right)^{\frac{1}{2}}\langle f,f\rangle + \left(\frac{s}{\beta(s)}\right)^{\frac{1}{2}}||f||_\infty\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\frac{\beta(s)-1}{\beta(s)}\right)^{\frac{1}{2}}\langle f,f\rangle + \left(\frac{s}{\beta(s)}\right)^{\frac{1}{2}}||f||^2_\infty ,\end{aligned}$$

so that

$$\left(1-\left(\frac{\beta(s)-1}{\beta(s)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) Var_\mu(f) \leq \langle -Lf, f\rangle + \left(\frac{s}{\beta(s)}\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_\infty^2.$$

We thus obtain that μ satisfies a weak Poincaré inequality, with $\langle -Lf, f\rangle$ as energy form with constant $C' = \frac{\sqrt{C}}{(\sqrt{C}-\sqrt{C-1})}$.
Nevertheless, in the symmetric situation, both Poincaré inequalities coincide. Indeed

$$Var_\mu(f) \leq C\langle -Lf, f\rangle = C\langle (I-P)f, f\rangle$$

means that, for all $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ with μ zero mean,

$$\langle Pf, f\rangle \leq \frac{C-1}{C}\langle f\rangle,$$

so that the operator norm of P restricted to the closed hyperplane $\int f d\mu = 0$ is less than $(C-1)/C$. It follows that in restriction to this hyperplane,

$$\langle Pf, Pf\rangle \leq \left(\frac{C-1}{C}\right)^2 \langle f, f\rangle,$$

hence the Poincaré inequality

$$Var_\mu(f) \leq C^* \langle (I-P^2)f, f\rangle$$

holds with $C^* = C^2/(2C-1)$. So up to the constants, both Poincaré inequalities are the same. $\diamond$

2.3 Convergence to stable distributions

In this section we shall study the asymptotic behaviour of $S_n(\Psi) = \sum_{i=1}^n \Psi(X_i)$, where $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$ for some $0 \leq p < 2$. For simplicity we shall sometimes write $\Psi(X_i) = Z_i$. In particular, under $\mathbb{P}_\mu$, the sequence $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is strictly stationary. Recall that if $\Psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$ we assume in addition that $\int \Psi \, d\mu = 0$.
When $\Psi \in \mathbb{L}^2(\mu)$, it is expected that $n^{-\frac{1}{2}} S_n(\Psi)$ converges in distribution to some

Gaussian law. Actually the stronger functional CLT, telling that the process

$$t \mapsto n^{-\frac{1}{2}} S_{[nt]}(\Psi)$$

converges in distribution (for the usual topology of continuous paths) to a Brownian motion (with a positive variance) holds as soon as

$$\sum_n n^{-\frac{1}{2}} \parallel P^n \Psi \parallel_{\mathbb{L}^2(\mu)} < +\infty \, , \tag{2.3.1}$$

provided the chain is strongly mixing. For this result and much more sophisticated ones we refer to the survey paper [MPU06] and to [CCG12]. Notice that if $\Psi \in \mathbb{L}^p(\mu)$, $p \geq 2$, the previous condition is satisfied as soon as $\sum_n n^{-\frac{1}{2}} \alpha_{p,2}(n) < +\infty$; in particular, according to the discussion after Definition 2.2.3 as soon as $\sum_n n^{-\frac{1}{2}} \alpha_{\infty,2}^{\frac{p-2}{p}}(n) < +\infty$. If Ψ does not belong to any $\mathbb{L}^p$ space for $p > 2$, the (2.3.1) is useful under the ρ-mixing assumption, hence if the chain has a spectral gap (in $\mathbb{L}^2$).

For $p < 2$ the situation is much more delicate. We first have to recall some definitions

Definition 2.3.2 *Z_1 is regularly varying of index $\alpha > 0$ if there exists some $c \in [0,1]$ such that for all $x > 0$,*

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_1 > ux)}{\mathbb{P}(||Z_1| > u)} = c\, x^{-\alpha} \quad \textit{and} \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_1 < -ux)}{\mathbb{P}(||Z_1| > u)} = (1-c)\, x^{-\alpha} \, .$$

If Z is regularly varying, there exists a slowly varying function L (i.e. $\lim_{u \to +\infty} \frac{L(ut)}{L(u)} = 1$ for all $t > 0$) such that for all $x > 0$, $\mathbb{P}(|Z_1| > x) = x^{-\alpha} L(x)$. In particular $Z_1 \in \mathbb{L}^\alpha$ if and only if

$$\int_1^{+\infty} x^{-1} L(x) \, dx < +\infty.$$

Otherwise $Z_1 \in \mathbb{L}^{\eta'}$ for all $\eta' < \alpha$.

If we write $\mathbb{P}(Z_1 > x) = x^{-\alpha} L_+(x)$, we see that if Z_1 is regularly varying of index α,

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{L_+(u)}{L(u)} = c \, .$$

It follows that L_+ is also slowly varying, the same for the analogous L_-. *From now on we assume that $Z_1 = \Psi(X_1)$ is regularly varying of index α.*

Now choose b_n such that

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|Z_1| > b_n) \;=\; 1\,. \tag{2.3.3}$$

As we shall recall below, convergence to stable laws (or processes) for mixing sequences require some kind of centering, namely we shall consider

$$T_n \;=\; S_n(\Psi) \;-\; n\,\mathbb{E}_\mu\left[Z_1\,\mathbb{1}_{|Z_1|\le b_n}\right] \tag{2.3.4}$$

$$\;=\; S_n(\Psi) \;-\; n\,c_n, \tag{2.3.5}$$

or

$$T_n(t) = S_{[nt]}(\Psi) \;-\; nt\,c_n\,,$$

and look at the convergence of T_n/b_n or $T_n(.)/b_n$. It is thus interesting to look at the asymptotic behaviour of

$$\frac{n\,c_n}{b_n} \;=\; \frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[Z_1\,\mathbb{1}_{|Z_1|\le b_n}\right]\,.$$

When $0<\alpha<1$ this is done in [Kri10] remark 2.17, where it is shown that

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,c_n}{b_n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(2c-1)\,.$$

(recall that c is defined in definition 2.3.2.)
The proof is a simple application of Karamata's theorem.
Now assume that $1\le\alpha<2$ and that $\int\Psi d\mu = 0$. We thus have

$$\frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[Z_1\,\mathbb{1}_{|Z_1|\le b_n}\right] \;=\; -\,\frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[Z_1\,\mathbb{1}_{|Z_1|> b_n}\right]\,.$$

But

$$\frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[Z_1^+\,\mathbb{1}_{|Z_1|> b_n}\right] = n\mathbb{P}(Z_1^+ > b_n) + \frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[(Z_1^+ - b_n)^+\right],$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[(Z_1^+ - b_n)^+\right] &= \int_{b_n}^{+\infty} \frac{n}{b_n}\,\mathbb{P}_\mu(Z_1^+ > u)\,du \\
&= \int_1^{+\infty} n\,\mathbb{P}_\mu(Z_1^+ > u\,b_n)\,du \\
&= \int_1^{+\infty} n\,b_n^{-\alpha}\,L(b_n)\,u^{-\alpha}\,\frac{L_+(u\,b_n)}{L(b_n)}\,du \\
&= (n\,b_n^{-\alpha}\,L(b_n))\int_1^{+\infty} u^{-\alpha}\,\frac{L_+(u\,b_n)}{L(b_n)}\,du\,.
\end{aligned}$$

Since $\frac{L_+(u\,b_n)}{L(b_n)} \to c$ as $n \to +\infty$,we may use the bounded convergence theorem and obtain that the previous goes to $c/(\alpha-1)$ provided $\alpha > 1$. Hence, using Definition 2.3.2, we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n}\,\mathbb{E}_\mu\left[Z_1^+\,\mathbb{1}_{|Z_1|>b_n}\right] = c + \frac{c}{\alpha-1} = \frac{c\alpha}{\alpha-1}.$$

Summing up with the similar estimate for Z_1^-, we thus have shown

Proposition 2.3.6 *Assume that Z_1 is regularly varying of index $\alpha \in (0,2)$ but $\alpha \neq 1$. Assume in addition that $\mathbb{E}_\mu(Z_1) = 0$ if $\alpha > 1$. Then*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,c_n}{b_n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(2c-1)\,.$$

If Z_1 is symmetric, $c_n = 0$ for all n.

Remark 2.3.7 *The calculation above, for $\alpha > 1$, allows us to replace the symmetry assumption in [DJ89b] by the weaker $\mathbb{E}_\mu(Z_1) = 0$ (see condition (v) p.478 of [DJ89b]).*

Now we recall definitions for stable distributions and processes. We follow the presentation in [Kri10]. We shall say that X has a α-stable distribution with characteristics (b, c_-, c_+), if its characteristic function satisfies $\mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = e^{\psi(t)}$ with

$$\psi(t) = ibt + \int \left(e^{itu} - 1 - itu\,\mathbb{1}_{|u|\le 1}\right)\,|u|^{-1-\alpha}\,(c_-\,\mathbb{1}_{u<0} + c_+\,\mathbb{1}_{u>0})\,du\,. \tag{2.3.8}$$

A α-stable process Y_t is a cadlag stochastic process starting from 0, with independent and stationary increments, and such that the distribution of Y_1 is α-stable. We refer to [Kri10, JKO09, TK10] (among others) for more details.

The results in [DJ89b, Kri10, BK12, TK10] deal with the convergence of $\frac{1}{b_n} T_n$ or $\frac{1}{b_n} T_n(.)$ (recall (2.3.4)) to a stable distribution or a stable process (for the Skorokhod topology), with characteristics $(b, c, 1-c)$.

According to Proposition 2.3.6, except for $\alpha = 1$, we may replace T_n by $S_n(\Psi)$ up to a change in the characteristics, where b is replaced by $b + \frac{\alpha}{|\alpha-1|}\,(2c-1)$. Recall that in the symmetric case, $c = 1/2$.

The following anti-clustering type condition introduced in [Dav83], appears in both [DJ89b] (condition (x) p.483) and [Kri10] (condition $\mathcal{D}'$):

$$\lim_{k\to+\infty}\ \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_1| > \varepsilon\, b_n\,,\, |Z_j| > \varepsilon\, b_n\right) \,=\, 0 \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{2.3.9}$$

Remark that

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_1| > \varepsilon\, b_n\right)\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_j| > \varepsilon\, b_n\right) &= \left(\frac{\mathbb{P}^2_\mu\left(|Z_1| > \varepsilon\, b_n\right)}{\mathbb{P}^2_\mu\left(|Z_1| > b_n\right)}\right)\frac{[n/k]}{n}\, n^2\,\mathbb{P}^2_\mu\left(|Z_1| > b_n\right)\\ &\le \frac{1}{k}\left(\frac{\mathbb{P}^2_\mu\left(|Z_1| > \varepsilon\, b_n\right)}{\mathbb{P}^2_\mu\left(|Z_1| > b_n\right)}\right)\end{aligned}$$

so that

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_1| > \varepsilon\, b_n\right)\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_j| > \varepsilon\, b_n\right) \le \varepsilon^{-\alpha}\,\frac{1}{k}\,,$$

and finally

$$\lim_{k\to+\infty}\ \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_1| > \varepsilon\, b_n\right)\,\mathbb{P}_\mu\left(|Z_j| > \varepsilon\, b_n\right) = 0\,.$$

Hence we may replace (2.3.9) by

$$\lim_{k\to+\infty}\ \limsup_{n\to+\infty}\ \sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{1}_{|Z_1|>\varepsilon\, b_n}\,,\ \mathbb{1}_{|Z_j|>\varepsilon\, b_n}\right) = 0 \quad , \quad \forall\, \varepsilon>0\,. \tag{2.3.10}$$

We finally state the convergence result which is contained in Proposition 3 of [DJ89b] in the case of variables, and Theorem 3.7 (p.97) of [Kri10] for processes. We formulate the result in our Markov chain framework

Theorem 2.3.11 *Let $(X_n)_{n\geq 0}$ be an irreducible, aperiodic and positive recurrent Markov chain with unique invariant probability measure μ. Let Ψ be such that $Z_1 = \Psi(X_1)$ is regularly varying of index $\alpha \in (0,2)$. If Ψ is μ integrable we also assume that $\int \Psi d\mu = 0$. For b_n defined by (2.3.3), we first assume that (2.3.10) holds. In addition we assume*

(1) If $\alpha \in (0,1)$, the chain is strongly mixing,

(2) if $\alpha \in (1,2)$ the chain has a spectral gap,

(3) if $\alpha = 1$, Ψ is symmetric, i.e. under $\mathbb{P}_\mu$, $\Psi(X_1)$ and $\Psi(-X_1)$ have the same distribution.

Then $\frac{1}{b_n} S_{[nt]}(\Psi) = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{[nt]} f(X_j)$ converges (under $\mathbb{P}_\mu$), for the Skorokhod topology on any time interval $[0,T]$ to some α-stable process.

We already discussed the form of the characteristics of the stable limit.
For $\alpha = 1$, if Ψ is not symmetric, we have to replace $S_n(\Psi)$ by T_n.

Remark 2.3.12 *In general the difference between the assumptions in [DJ89b] and [Kri10] concerns the case $\alpha \in (1,2)$, where all authors assume that Z is ρ-mixing, but with ρ satisfying $\sum_j \rho(2^j) < +\infty$ in [DJ89b], and $\sum_j \rho([2^{j/3}]) < +\infty$ in [Kri10] (see p.76, proposition 2.19) . Actually both conditions are the same and equivalent to $\sum_n \frac{\rho(n)}{n} < +\infty$ as it is easy to see.*
In our situation of course, ρ-mixing implies that $\rho(n) = e^{-n\lambda}$ as we have seen in Proposition 2.2.6 so that this condition is satisfied.

Actually one can reinforce Theorem 2.3.11 as follows

Theorem 2.3.13 *In Theorem 2.3.11, one can replace (2.3.10) by the following weaker condition: there exists $r_n = o(n)$ growing to infinity such that*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=2}^{r(n)} n\, Cov_\mu\left(\mathbb{1}_{|Z_1|>\varepsilon\, b_n},\, \mathbb{1}_{|Z_j|>\varepsilon\, b_n}\right) = 0 \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{2.3.14}$$

This condition is condition (3.18) in [Kri10]. One can also replace (2.3.14) by the following weaker condition: $\forall \varepsilon > 0$, there exists $r(n)$ and $l(n)$ going to infinity, such that $l(n) = o(r(n))$, $r(n) = o(n)$, $n\,\alpha(l(n)) = o(r(n))$ where α is the mixing coefficient, and

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\mu\left(\max_{2\le j\le r(n)} |Z_j| > \varepsilon\, b_n\,|\,|Z_1| > \varepsilon\, b_n\right) = 0\,. \tag{2.3.15}$$

Furthermore as soon as all other assumptions in Theorem 2.3.11 are satisfied, (2.3.15) is also necessary for the convergence to a stable process. This is the main theorem in [TK10] (also see theorem 3.4 in [BK12]).

We conclude this section by giving explicit sufficient conditions for (2.3.10) (hence Theorem 2.3.11) to hold.

Theorem 2.3.16 *In the situation of Theorem 2.3.11 we assume that $\alpha \in (1, 2)$ and that the chain has a spectral gap. If $P|\Psi|$ or $P^*|\Psi|$ belongs to $\mathbb{L}^{\alpha+\beta}(\mu)$ for some $\beta > 0$, then condition (2.3.10) is satisfied and the conclusion of Theorem 2.3.11 holds true.*

Proof. Write $g(u) = \mathbb{1}_{u>\varepsilon\, b_n} - \mathbb{P}(|Z_1| > \varepsilon\, b_n)$. We have

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{1}_{|Z_1|>\varepsilon\, b_n}\,,\, \mathbb{1}_{|Z_j|>\varepsilon\, b_n}\right) &= \mathbb{E}_\mu\left(g(Z_1)\, \mathbb{1}_{|Z_j|>\varepsilon\, b_n}\right) \\
&= \int (P^*)^{j-2} g\, P(\mathbb{1}_{|\Psi|>\varepsilon\, b_n})\, d\mu \\
&\le \int |(P^*)^{j-2} g|\, P(|\Psi|/\varepsilon\, b_n)\, d\mu \\
&\le \frac{1}{\varepsilon\, b_n}\, \| \,(P^*)^{j-2} g\, \|_{\mathbb{L}^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\mu)}\, \|\, P|\Psi|\, \|_{\mathbb{L}^{\alpha+\beta}(\mu)}\,,
\end{aligned}$$

after using Hölder's inequality. Now since the chain has a spectral gap, we know that $\alpha^*_{2,2}(j) \le c\, e^{-\lambda j}$ for some $\lambda > 0$. It follows that $\alpha^*_{p,p}(j) \le 2c\, e^{-\lambda j\, \frac{2(p-1)}{p}}$ for all $1 < p < +\infty$, in particular for $p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}$. We denote by $\rho^*_p(j)$ this quantity for p as before. We have thus

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{I}_{|Z_1|>\varepsilon b_n}\,,\,\mathbb{I}_{|Z_j|>\varepsilon b_n}\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon\, b_n}\,\rho_p^*(j-2)\,\parallel g\parallel_{\mathbb{L}^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\mu)}\parallel P|\Psi|\parallel_{\mathbb{L}^{\alpha+\beta}(\mu)}\\ &\leq \frac{C(\Psi)}{\varepsilon\, b_n}\,\rho_p^*(j-2)\,\left(\mathbb{P}_\mu(|Z_1|>\varepsilon\, b_n)\right)^{1-\frac{1}{\alpha+\beta}}\\ &\leq \frac{C(\Psi)}{\varepsilon\, b_n}\,\rho_p^*(j-2)\,\left(\varepsilon^{-\alpha}\, b_n^{-\alpha}\, L(\varepsilon\, b_n)\right)^{1-\frac{1}{\alpha+\beta}}\\ &\leq \frac{C(\Psi)}{\varepsilon\, b_n}\,\rho_p^*(j-2)\,\left(\varepsilon^{-\alpha}\,\frac{1}{n}\,\frac{L(\varepsilon\, b_n)}{L(b_n)}\right)^{1-\frac{1}{\alpha+\beta}}.\end{aligned}$$

Finally, since $\frac{L(\varepsilon\, b_n)}{L(b_n)}$ is bounded (w.r.t. n for a fixed ε) we have obtained that

$$\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{I}_{|Z_1|>\varepsilon b_n}\,,\,\mathbb{I}_{|Z_j|>\varepsilon b_n}\right) \leq \frac{C(\Psi,\alpha,\beta,\varepsilon)}{b_n}\,\rho_p^*(j-2)\,n^{-1+\frac{1}{\alpha+\beta}}\,. \tag{2.3.17}$$

Finally

$$\sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{I}_{|Z_1|>\varepsilon b_n}\,,\,\mathbb{I}_{|Z_j|>\varepsilon b_n}\right) \leq C(\Psi,\alpha,\beta,\varepsilon)\,\frac{n^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}{b_n}\,\sum_{j=1}^{+\infty}\rho_p^*(j-2)\,.$$

But b_n satisfies $n^{-\frac{1}{\alpha}}\, b_n\, L^{-\frac{1}{\alpha}}(b_n)=1$, so that, since L is slowly varying, $b_n^{-1}\, n^\theta \to 0$ as $n\to+\infty$ as soon as $\theta<\frac{1}{\alpha}$. It follows that

$$\limsup_{n\to+\infty}\sum_{j=2}^{[n/k]} n\,\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{I}_{|Z_1|>\varepsilon b_n}\,,\,\mathbb{I}_{|Z_j|>\varepsilon b_n}\right)=0\,,$$

so that (2.3.10) is satisfied.

Exchanging P and P^* the same holds if $P^*|\Psi|\in\mathbb{L}^{\alpha+\beta}$. ■

The next result deals with the $\alpha<1$ case.

Theorem 2.3.18 *In the situation of Theorem 2.3.11 we assume that $\alpha\in(0,1]$ and that the chain has a spectral gap. If for some $\eta'\leq\alpha$ $\Psi\in\mathbb{L}^{\eta'}(\mu)$ and $P(|\Psi|^{\eta'})$ or $P^*(|\Psi|^{\eta'})$ belongs to $\mathbb{L}^{1+\beta}(\mu)$ for some $\beta>0$ such that $\eta'>\alpha/(1+\beta)$, then condition (2.3.10) is satisfied and the conclusion of Theorem 2.3.11 holds true.*

Proof. The proof follows the same lines as the previous one. The first inequality becomes

$$\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{1}_{|Z_1|>\varepsilon\, b_n}\,,\,\mathbb{1}_{|Z_j|>\varepsilon\, b_n}\right) \leq \frac{1}{(\varepsilon\, b_n)^{\eta'}}\ \parallel (P^*)^{j-2} g \parallel_{\mathbb{L}^{\frac{1+\beta}{\beta}}(\mu)} \parallel (P|\Psi|^{\eta'}) \parallel_{\mathbb{L}^{1+\beta}(\mu)}\,,$$

yielding

$$\mathrm{Cov}_\mu\left(\mathbb{1}_{|Z_1|>\varepsilon\, b_n}\,,\,\mathbb{1}_{|Z_j|>\varepsilon\, b_n}\right) \leq \frac{C(\Psi,\alpha,\beta,\varepsilon)}{(b_n)^{\eta'}}\,\rho^*_p(j-2)\, n^{\frac{-\beta}{1+\beta}}\,, \tag{2.3.19}$$

this time with $p = 1+\beta$. The conclusion follows, thanks to the assumption $\eta' > \alpha/(1+\beta)$. ∎

Remark 2.3.20 *In the previous Theorem we do not need the ρ-mixing condition. We can replace it by $\sum_j \alpha_{(1+\beta)/\beta,q}(j) < +\infty$ for some $q > 1+\beta$ but this time the condition becomes $\eta' > \alpha\,(1-\frac{1}{q})$.*

Remark 2.3.21 *We can compare our results with Theorems 2.4 and 2.8 in [JKO09]. On one hand, first, these authors assume that $L = 1$ and that the spectral gap exists, while for $\alpha < 1$ we can relax this assumption as described in the preceding Remark. Second we do not assume their Condition 2.3. In the sequel we are using the notations in [JKO09]. Notice that if the invariant measure π is symmetric, this condition with $Q = 0$ implies (because of (2.9) therein) that P^2 has a bounded kernel with respect to π. Indeed $P^2(x, dy) = p_2(x, y)\pi(dy)$ with*

$$p_2(x,y) = \int p(x,z)p(z,y)\pi(dz) \leq \left(\int p^2(x,z)\pi(dz)\right)^{1/2}\left(\int p^2(z,y)\pi(dz)\right)^{1/2} \leq C(2).$$

Hence the chain generated by P^2 is ultra bounded, i.e. continuously maps $\mathbb{L}^1$ functions into bounded ones. Hence, all $P^k\Psi$ for $k \geq 2$ will be bounded.

On the other hand our assumption relies on $P|\Psi|$ instead of $P\Psi$ (this is certainly mainly irrelevant), and for $\alpha < 1$ we add a similar assumption on Ψ which is not present in Theorem 2.4 of [JKO09]. The calculation of the characteristics of the limit seem also to slightly differ, but they are not expressed in the same way.

Finally our results cover the functional limit case (invariance principle).

Remark 2.3.22 *One can be disappointed to have to assume the existence of a spectral gap (though the situation in the* $\mathbb{L}^2$ *case is similar). Actually the contraction property is a much stronger assumption, as recently shown by Miclo [Mic13],*

Theorem 2.3.23 *If* P *is symmetric, ergodic and maps continuously* $\mathbb{L}^2(\mu)$ *into* $\mathbb{L}^p(\mu)$ *for some* $p > 2$*, then there exists a spectral gap.*

The continuous time version of this result is contained in [Cat04]. We shall see in the next section that interpolation will then show that, for all $q > 1$*,* P *maps continuously* $\mathbb{L}^{q'}(\mu)$ *into* $\mathbb{L}^p(\mu)$ *for some* $q' > p$*.*

2.4 Examples

In this section we shall study some examples and counter-examples.

2.4.1 Hyperboundedness

Let us discuss the contraction property, i.e. the fact that P maps continuously $\mathbb{L}^p$ into $\mathbb{L}^{p'}$ for some $p' > p$. In a continuous time setting this property is known as the hyperboundedness of the associated semi-group and is equivalent to a log-Sobolev inequality (see [Aa00]).

In the discrete time setting this property was not really studied for itself, presumably because except for finite state space, there is no chance for the log-Sobolev inequality

$$\int f^2 \ln\left(\frac{f^2}{\int f^2 d\mu}\right) d\mu \leq C_L \langle (I - \frac{1}{2}(P+P^*))f, f\rangle + D_L \int f^2 d\mu$$

to be satisfied.

Hence there are mainly two generic situations in which we can obtain this property

(1) $P = P_T$ for some $T > 0$, where $(P_t)_{t\geq 0}$ is a μ-reversible continuous time hyperbounded Markov process. In this case μ will satisfy a log-Sobolev inequality where $I - \frac{1}{2}(P+P^*)$ is replaced by the infinitesimal generator of P_t. One can of course replace P by $Q = \frac{1}{2}(P+P^*)$.

If P_t is a diffusion process, μ has to be invariant, not necessarily reversible. In a similar way, we can look at numerical schemes (like Euler scheme) for approximating hypercontractive diffusion processes, since in many situations the hyper-contractivity property is preserved.

(2) Assume that

$$P(x,dy) = p(x,y)\mu(dy), \quad \text{with} \quad p \in \mathbb{L}^q(\mu\otimes\mu),$$

for some large enough q.

Let us give some more precise examples.

For situation (1) consider for simplicity the diffusion process in $\mathbb{R}^d$ with infinitesimal generator $\triangle - \bigtriangledown V.\bigtriangledown$ and reversible measure $e^{-V}dx$. If V is uniformly convex at infinity (i.e. $\xi.HessV(x)\xi \geq C\xi^2$ for some C and all $|x|\geq R$) it is known that the associated semi-group is hypercontractive, i.e. hyperbounded with operator norm equal to 1. It follows that $P = P_T$ maps continuously $\mathbb{L}^2$ into $\mathbb{L}^{2+\beta(T)}$ for some $\beta(T) > 0$ and all $T > 0$. Using Riesz-Thorin interpolation theorem, we see that for all $p \geq 2$, P_T maps continuously $\mathbb{L}^p$ into $\mathbb{L}^{p+\beta(p,T)}$ for some $\beta(p,T) > 0$. By duality we thus have that, for all $\eta \in (1,2)$, P_T is bounded from $\mathbb{L}^\eta$ into $\mathbb{L}^\gamma$ for some $\gamma > \eta$, hence we may apply the results of the previous section. The final arguments using interpolations is of course available in all hyperbounded situations.

For situation (2), we have for a non-negative $f \in \mathbb{L}^2$ and $\gamma > 2$,

$$\begin{aligned} ||Pf||^\gamma_{\mathbb{L}^\gamma} &= \int \left(\int p(x,y)f(y)\mu(dy)\right)^\gamma \mu(dx) \\ &\leq \left(\int f^2 d\mu\right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\int \left(\int p^2(x,y)\mu(dy)\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mu(dx)\right) \\ &\leq \left(\int f^2 d\mu\right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\int p^\gamma(x,y) d\mu\otimes d\mu\right) \end{aligned}$$

Hence provided $x \to \int p^2(x,y)\mu(dy)$ belongs to $\mathbb{L}^\gamma$, in particular if $p \in \mathbb{L}^\gamma(\mu\otimes\mu)$, we may apply the same argument as in the previous paragraph.

Notice that this assumption is much weaker than assumption (2.9) in [JKO09] where it is assumed that $x \to \int p^2(x,y)\mu(dy)$ is bounded. In the example of Superdiffusion of energy in a lattice dynamic studied in [JKO09] the kernel p is in fact bounded.

In this latter situation P maps continuously $\mathbb{L}^1$ into $\mathbb{L}^\infty$ (i.e. is ultrabounded). In particular, since we remarked in Proposition 2.4(3), that $\varphi(n) \leq \alpha^2_{1,\infty}([n/2])$, the chain is φ-mixing.

2.4.2 Birth and death chains

We shall illustrate on the classical birth and death, discrete time, Markov chain. Here the state space is $\mathbb{N}$, and the transition matrix is given by

$$P(x,x+1)=p_x \quad , \quad P(x,x-1)=q_x \quad , \quad P(x,x)=1-p_x-q_x=r_x \, ,$$

for all $x \in \mathbb{N}$, of course $q_0=0$. This chain is positively recurrent if and only if

$$\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{p_0\, p_1 \ldots p_{x-1}}{q_1 \ldots q_x} := \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \lambda_x \, < +\infty \, ,$$

in which case the unique invariant (and actually reversible) distribution is given by $\mu(x)=\mu(0)\,\lambda_x$ for all $x \in \mathbb{N}^*$.

It is well known (see e.g. [Che06]) that the Poincaré inequality

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \, \leq \, C \, \langle (Id-P)f, f\rangle \, ,$$

holds if and only if

$$\sup_{x\geq 1} \mu([x,+\infty[) \sum_{y\leq x-1} \frac{1}{\mu(y)\, p_y} \, < \, +\infty \, .$$

Others characterizations of geometric ergodicity in the discrete time setting are contained in [DS95] and are based on zeros of the associated birth and death polynomials, or in [MT93b, CG09, BCG08, CGZ13] and are based on Lyapunov functions or exponential moments of hitting times.
It is not difficult to show that the log-Sobolev inequality is not satisfied (consider functions $1_{\{x\}}$ with x going to infinity), and that $P(x,dy)=p(x,y)\mu(dy)$ but with p that do not satisfy any nice integrability condition.
But let us come back to Theorem 3.6, in particular to the necessary condition (2.3.15). if $Z_n=\Psi(X_n)$ we have,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(|Z_2|>\varepsilon b_n||Z_1|>\varepsilon b_n) \; &\geq \; \mathbb{P}_\mu(X_2=X_1||Z_1|>\varepsilon b_n) \\
&\geq \; \inf\{r_x : \Psi(x)>\varepsilon b_n\}
\end{aligned}$$

In particular if $r_x \geq r > 0$ for all x large enough, (2.3.15) cannot be satisfied.
But even in the case of the reflected random walk ($p_x=p=1-q=q_x$ for all $x>0$,

$p_0 = 1$) for which provided $q > p$, ergodicity holds with a spectral gap, (2.3.15) is generically not satisfied. Indeed in this case, if for simplicity Ψ is increasing ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(|Z_2| > a/|Z_1| > a) &\geq \mathbb{P}_\mu\left(X_2 = X_1 - 1, |X_1| > \Psi^{-1}(a+1)/|X_1| > \Psi^{-1}(a)\right) \\
&\geq q\mathbb{P}_\mu\left(|X_1| > \Psi^{-1}(a+1)/|X_1| > \Psi^{-1}(a)\right) \\
&\geq q\left(\frac{p}{q}\right)^{[\Psi^{-1}(a+1) - \Psi^{-1}(a+1)+1]} .
\end{aligned}$$

Choose e.g. $\Psi(x) = (q/p)^{\tau x}$ so that $\Psi \in \mathbb{L}^\alpha(\mu)$ for $\alpha < 1/\tau$. The previous lower bound does not converge to 0 as $a \to +\infty$.

This situation is presumably typical of the difficulties to satisfy the stable invariance principle, in particular for discrete valued chains.

Chapitre 3

Rates of convergence to stable laws in the generalized CLT

Ce chapitre fait l'objet d'un travail en cours.

Sommaire

Abstract We provide in this chapter, some rates of convergence to α-stable random variables, $\alpha \in (1,2)$, for the Zolotarev ideal probability metric in the generalized CLT, that is, for the partial sums of iid real-valued r.v. which are not assumed to be square integrable.

3.1 Introduction

When studying limit theorems in probability theory it is important to try to assess the rates at which these convergence theorems occur. It is known that taking into account probability metrics in the space of random variables, allow to approximate partial sums for sequences of random variables. It is also known that stable laws are the only limits in the study of the limit law for such partial sums properly normalized. However, the lack of explicit formulas for their density functions except some stable distributions (Gaussian, Cauchy, Lévy) significantly limits their use in practice. A random variable ϑ has a stable distribution if there exists some coefficients $C_n > 0$ and $D_n \in \mathbb{R}$ such that:

$$\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n \stackrel{d}{=} C_n \vartheta + D_n \quad \forall n \geq 1,$$

where $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ are i.i.d copies of ϑ. In particular such random variables are infinitely divisible. It is shown that $C_n = n^{1/\alpha}$ with $\alpha \in (0, 2]$ (see for instance [Fel71], Section VI.1). The coefficient α is the index of stability. We shall say that ϑ is an α-stable (real-valued) random variable. The case $\alpha = 2$ and $D_n = 0$ corresponds to a Gaussian random variable. The Lévy-Khintchine representation in the case $\alpha \in (0, 2)$ reads as follows: $\mathbb{E}[e^{iu\vartheta}] = e^{\psi(u)}$ where ψ is the characteristic exponent given by

$$\psi(u) = ibu + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x|\leq 1}) \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} (c_1 1_{x<0} + c_2 1_{x>0}) dx,$$

with $b \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \geq 0$ and $c_1 + c_2 > 0$. We say in this case that ϑ is an α-stable random variable with characteristics (b, c_1, c_2). For strictly α-stable random variable we have $b = 0$ and the case $b = 0$, $c_1 = c_2$ corresponds to a symmetric α-stable random variable.

In the context of the Central Limit Theorem (CLT) it is well known that, for some given sequence of iid random variables $(V_n)_{n\geq 1}$, the partial sum properly normalized convergence to an α-stable random variable, $\alpha \in (0, 2]$, if the random variable V_1 is in a domain of attraction of the α-stable random variable. We say that the random variable V_1 is in the domain of attraction of an α-stable with tails parameters c_1 and c_2 if

$$\mathbb{P}[V_1 > x] = \frac{c_1 + h(x)}{x^\alpha}, \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[V_1 \leq -x] = \frac{c_2 + h(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0, \tag{3.1.1}$$

where h is a function such that $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. The case of domain of attraction of a symmetric α-stable random variable corresponds to $c_1 = c_2$. The reader can refer to [GK68] for the domain of attraction conditions. We shall also say that the random variable X is in a strong domain of attraction of the α-stable if in (3.1.1), there exists $\gamma_\alpha > 0$ such that $h(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{|x|^{\gamma_\alpha}})$ at ∞ meaning that $\exists K, x_0 \in \mathbb{R}$ and $|h(x)| \leq K|x|^{-\gamma_\alpha}$ for all $x \geq x_0$, so that:

$$\mathbb{P}[V_1 > x] - \frac{c_1}{x^\alpha} = \mathcal{O}(\frac{1}{x^{\alpha+\gamma_\alpha}}), \quad \mathbb{P}[V_1 \leq -x] - \frac{c_2}{|x|^\alpha} = \mathcal{O}(\frac{1}{|x|^{\alpha+\gamma_\alpha}}), \quad x > 0\,.$$

In the sequel we call γ_α the attraction index.

In this chapter, we obtain a rate of convergence to an α-stable random variable, $\alpha \in (1, 2)$, for partial sums of iid random variables $(V_n)_{n\geq 1}$ (the generalized CLT). We show in Theorem 3.3.1 that the rate of convergence is of order $n^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}$ in the Zolotarev ideal probability metric ζ_r for $r \in]\alpha, 2]$, provided the random variable V_1 is in a strong domain of attraction of the α-stable random variable with an attraction index γ_α greater than $r - \alpha$.

The layout of this chapter is as follows. We start in Sect.3.2, by the notion of ideal probability metrics and introduce a particula example of the celebrated Zolotarev ideal probability metric of order $r > 0$. We give in Sect.3.3 a rate of convergence to an α-stable random variable, $\alpha \in (1, 2)$, for iid random variables in the Zolotarev ideal probability metric of order $r \in]\alpha, 2]$ as stated above. We also deduce a rate of convergence between characteristic functions.

3.2 Probability metrics in the space of random variables

Denote by Σ the space of real random variables. In this section we introduce the notion of ideal probability metric and as an example we introduce the Zolotarev ideal probability metric.

On a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ consider two real random variables X and Y, denote by P_X and P_Y their probability laws respectively.

Definition 3.2.1 *A map $d(.,.)$ defined in the space $\Sigma \times \Sigma \to [0, \infty]$ is said to be a probability metric in Σ if for all random variables X, Y and Z the following statements hold:*

(1)

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1 \Rightarrow d(X, Y) = 0,$$

(2)

$$d(X, Y) = d(Y, X),$$

(3)

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y).$$

If the values of $d(X, Y)$ are determined by the marginal distributions P_X and P_Y then one says that the metric d is simple. Note that the terminology "metric" is abusive because the condition in (1) refers rather to a semi-metric; the reader can refer to [Rac91] or [Zol97].

An example of a simple distance is:

- the total variation distance defined by:

$$d_{VT}(X,Y) = \sup_{||f||_\infty \leq 1} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|,$$

  where $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Now let us define an ideal probability metric.

Definition 3.2.2 *A simple metric d in Σ is called an ideal probability metric of order $r \geq 0$, if the following statements hold:*

(4)

$$d(X+Z, Y+Z) \leq d(X,Y), \tag{3.2.3}$$

for Z independent of X and Y. (Regularity)

(5)

$$d(cX, cY) = |c|^r d(X,Y) \tag{3.2.4}$$

for any $c \in \mathbb{R}^*$. (Homogeneity of order r)

We now give a useful example of ideal probability metric.

Example 3.2.5 *Let $r > 0$ with the representation $r = m + \beta$ where $\beta \in]0,1]$ and $m \in \mathbb{N}$. We define the following simple metric :*

$$\zeta_r(X,Y) = \sup_{f\in\Lambda_r} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|, \tag{3.2.6}$$

where Λ_r is the set of bounded functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which are m-times continuously differentiable and such that

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq |x-y|^\beta, \quad \beta + m = r, \tag{3.2.7}$$

where $f^{(m)}$ is the derivate function of order m.

The metric ζ_r is called the Zolotarev probability metric.

Claim 3.2.8 *The Zolotarev probability metric ζ_r is an ideal probability metric of order r.*

We refer the reader to Theorem 1.4.2 in [Zol97] for the proof.
Note that by a simple application of the Taylor formula with integral remainder, one can show that $\zeta_r(X,Y) < \infty$ provided

$$\mathbb{E}[|X|^r],\, \mathbb{E}[|Y|^r] < \infty \tag{3.2.9}$$

and

$$\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k] \quad 0 \leq k \leq m. \tag{3.2.10}$$

Note also that the condition in (3.2.10) is necessarily but the moment condition in (3.2.9) can be relaxed using domain of attraction conditions as we shall see in the next lines.

Remark 3.2.11 *An important property of the Zolotarev metric of order $r \geq 0$ is that, it implies convergence in law (under additional moment condition).*

Some interesting cases are $r = 1$ and $r = 2$.

(a) The Zolotarev metric of order 1 is defined by:

$$\zeta_1(X,Y) = \sup_{f \in \Lambda_1} \left| \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)] \right|,$$

where Λ_1 is the set of bounded continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$. By the famous Kantorovich-Rubinstein duality, it rewrites as the Wasserstein distance $\mathcal{W}$ originally defined by:

$$\mathcal{W}(X,Y) = \inf_{(P_X, P_Y)} \mathbb{E}[|X - Y|],$$

where the infimum runs over all coupling of the marginal distributions P_X and P_Y.

(b) The Zolotarev metric of order 2 is defined by

$$\zeta_2(X,Y) = \sup_{f \in \Lambda_2} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|,$$

where Λ_2 is the set of bounded functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which are 1-times continuously differentiable and such that $|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|$.

3.3 Rates of convergence

We present in this section some rates of convergence to α-stable random variables, $\alpha \in (1,2)$, in the generalized CLT for the Zolotarev ideal probability metric ζ_r, $r \in (\alpha, 2]$.

Theorem 3.3.1 *Given a sequence of integrable iid random variables $(V_n)_{n\geq 1}$, set*

$$\tilde{S}_n := n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} (V_k - \mathbb{E}[V_k]).$$

Assume that V_1 is in the strong domain of attraction of a symmetric α-stable random variable ϑ with $\alpha \in (1,2)$ and an attraction index $\gamma_\alpha > r - \alpha$ where $r \in (\alpha, 2]$. Then there exists a constant $C > 0$ such that :

$$\zeta_r(\tilde{S}_n, \vartheta) \leq C\, n^{\frac{\alpha - r}{\alpha}}.$$

One can deduce the rate of convergence between characteristic functions. Set

$$\chi_t(\tilde{S}_n, \vartheta) = \left| \mathbb{E}[e^{it\tilde{S}_n}] - \mathbb{E}[e^{it\vartheta}] \right|, \quad t \in \mathbb{R},$$

and observe that, using the definition of the ideal probability metric ζ_2, we have

$$\chi_t(\tilde{S}_n, \vartheta) \leq t^2 \zeta_2(\tilde{S}_n, \vartheta),$$

since the function $f_t(x) = e^{itx},\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$ is bounded and the derivative f_t' is a t^2-Lipschitz function. We thus obtain the following result.

Corollary 3.3.2 *Given a sequence of integrable iid random variables $(V_n)_{n\geq 1}$, set*

$$\tilde{S}_n := n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} (V_k - \mathbb{E}[V_k]).$$

Assume that V_1 is in the strong domain of attraction of a symmetric α-stable random variable ϑ with $\alpha \in (1,2)$ and an attraction index $\gamma_\alpha > 2 - \alpha$. Then there exists a constant $C(t) > 0$ such that :

$$\chi_t(\tilde{S}_n, \vartheta) \leq C(t)\, n^{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}.$$

Now let us start the proof of the above main Theorem.

Proof of Theorem 3.3.1. Without loss of generality, we assume that the sequence $(V_n)_{n\geq 1}$ is centered. Consider a sequence $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ of i.i.d copies of ϑ. We have the following identity:

$$\vartheta \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n}{n^{1/\alpha}}, \quad \forall n \geq 1.$$

We choose the sequence $(\vartheta_n)_{n\geq 1}$ to be independent of the sequence $(V_n)_{n\geq 1}$. Since ζ_r is a simple distance, we have

$$\zeta_r(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n V_k, \vartheta) = \zeta_r\left(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n V_k, n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n \vartheta_k\right).$$

For $n = 2$, since ζ_r is an ideal probability metric of order r we have:

$$\begin{aligned}
\zeta_r\left(2^{-1/\alpha}(V_1+V_2), 2^{-1/\alpha}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right) &\leq \zeta_r\left(2^{-1/\alpha}(V_1+V_2), 2^{-1/\alpha}(\vartheta_2+V_1)\right) \\
&\quad + \zeta_r\left(2^{-1/\alpha}(\vartheta_2+V_1), 2^{-1/\alpha}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right) \\
&\leq 2^{-\frac{r}{\alpha}}\left(\zeta_r(V_1,\vartheta_1) + \zeta_r(V_2,\vartheta_2)\right) \\
&= 2^{1-\frac{r}{\alpha}}\zeta_r(V_1,\vartheta_1) = 2^{1-\frac{r}{\alpha}}\zeta_r(V_1,\vartheta),
\end{aligned}$$

where we use in the first inequality the regularity property and in the second inequality the homogeneity of order r of the probability metric ζ_r; the last equality holds since ζ_r is a simple distance.
Thus, by induction on n, we have

$$\zeta_r\left(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n V_k, n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n \vartheta_k\right) \leq n^{-\frac{r}{\alpha}}\sum_{k=1}^n \zeta_r(V_k,\vartheta_k),$$

so that

$$\begin{aligned}
\zeta_r\left(n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n V_k, n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^n \vartheta_k\right) &\leq n^{1-\frac{r}{\alpha}}\zeta_r(V_1,\vartheta_1) \\
&= n^{1-\frac{r}{\alpha}}\zeta_r(V_1,\vartheta) \\
&= C\, n^{1-\frac{r}{\alpha}},
\end{aligned}$$

provided $C := \zeta_r(V_1, \vartheta)$ is finite.

Now the remainder of the proof is devoted to show that C is finite.
Consider two real random variables X, Y and define

$$\kappa_r(X,Y) = \sup_{f\in\Gamma} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|,$$

where Γ is the set of bounded functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1} \right|.$$

By [RR90], κ_r rewrites as

$$\kappa_r(X,Y) = \inf_{(P_X,P_Y)} \left(\mathbb{E}\left[\left| X|X|^{r-1} - Y|Y|^{r-1} \right| \right] \right),$$

where the infimum runs over all coupling of the marginal distributions P_X and P_Y.

Let V_1 and ϑ be the optimal coupling for $\kappa_r(V_1, \vartheta)$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bounded and 1-time continuously differentiable such that:

$$|f'(x) - f'(y)| \leq |x-y|^{r-1}.$$

Letting $Z = V_1 - \vartheta$, we have

$$f(V_1) - f(\vartheta) = f(\vartheta + Z) - f(\vartheta).$$

By the mean value theorem there exists $\lambda \in]0,1]$ such that:

$$f(\vartheta + Z) - f(\vartheta) = f'(\vartheta + \lambda Z)Z.$$

Since $\mathbb{E}[V_1] = \mathbb{E}[\vartheta] = 0$ we have,

$$\mathbb{E}[f(\vartheta + Z) - f(\vartheta)] = \mathbb{E}[f'(\vartheta + \lambda Z)Z] - \mathbb{E}[f'(0)Z]$$

and

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(\vartheta+Z)]-\mathbb{E}[f(\vartheta)]| &\leq \mathbb{E}\left[|f'(\vartheta+\lambda Z)Z-f'(0)Z|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|\vartheta+\lambda Z|^{r-1}|Z|\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|(1-\lambda)\vartheta+\lambda V_1|^{r-1}|V_1-\vartheta|\right]. \end{aligned}$$

Since

$$(1-\lambda)|x|+\lambda|y| \leq \max(|x|,|y|), \quad \lambda \in]0,1],$$

we have,

$$|\mathbb{E}[f(\vartheta+Z)]-\mathbb{E}[f(\vartheta)]| \leq \mathbb{E}\left[|V_1-\vartheta|\max(|V_1|^{r-1},|\vartheta|^{r-1})\right].$$

Now taking into account the following inequality:

$$|x-y|\max(|x|^{r-1},|y|^{r-1}) \leq 2\left|x|x|^{r-1}-y|y|^{r-1}\right|, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \quad r\geq 1, \tag{3.3.3}$$

which will be proved later, we obtain

$$|\mathbb{E}[f(\vartheta+Z)]-\mathbb{E}[f(\vartheta)]| \leq 2\,\mathbb{E}\left[\left|V_1|V_1|^{r-1}-\vartheta|\vartheta|^{r-1}\right|\right],$$

and thus

$$\begin{aligned} \zeta_r(V_1,\vartheta) &\leq 2\,\mathbb{E}\left[\left|V_1|V_1|^{r-1}-\vartheta|\vartheta|^{r-1}\right|\right] \\ &= 2\,\kappa_r(V_1,\vartheta). \end{aligned}$$

By [Zol83], the following representation hold:

$$\kappa_r(V_1,\vartheta) = r\int_{\mathbb{R}}|u|^{r-1}|F_{V_1}(u)-F_\vartheta(u)|du,$$

and thus

$$\begin{aligned} \kappa_r(V_1,\vartheta) &= r\int_0^{+\infty}|u|^{r-1}\left|\mathbb{P}[V_1>u]-\mathbb{P}[\vartheta>u]\right|du \\ &+ r\int_0^{+\infty}|u|^{r-1}\left|\mathbb{P}[V_1<-u]-\mathbb{P}[\vartheta<-u]\right|du. \end{aligned}$$

Now recall that for any α-stable random variable Θ with local characteristic (c_1, c_2), we have the following expansion, cf. [Mij86], when $u \to +\infty$:

$$\mathbb{P}[\Theta > u] \;=\; \frac{c_1}{u^\alpha} + \frac{c_2}{u^{2\alpha}} + \mathcal{O}(\frac{1}{u^{3\alpha}}), \quad \mathbb{P}[\Theta < -u] \;=\; \frac{c_2}{u^\alpha} + \frac{c_1}{u^{2\alpha}} + \mathcal{O}(\frac{1}{u^{3\alpha}}).$$

Since every stable random variable is in its own strong domain of attraction, we have

$$|\mathbb{P}[V_1 > u] - \mathbb{P}[\vartheta > u]| \;\leq\; \left|\mathbb{P}[V_1 > u] - c\, u^{-\alpha}\right| + \mathcal{O}(u^{-2\alpha}),$$

and

$$|\mathbb{P}[V_1 < -u] - \mathbb{P}[\vartheta < -u]| \;\leq\; \left|\mathbb{P}[V_1 < -u] - c\, u^{-\alpha}\right| + \mathcal{O}(u^{-2\alpha}),$$

where c is the local characteristic of the symmetric α-stable random variable ϑ with $\alpha \in (1, 2)$. Therefore we get

$$\kappa_r(V_1, \vartheta) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^\infty |u|^{r-1-\alpha-\gamma_\alpha}\, du < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_\alpha > r - \alpha,$$

which corresponds to our assumptions. Since

$$\zeta_r(V_1, \vartheta) \;\leq\; 2\, \kappa_r(V_1, \vartheta),$$

the proof is now achieved. ■

Now let us finish by proving the inequality (3.3.3) used above.

Proof of Inequality (3.3.3). If we apply the following triangle inequality

$$||a| - |b|| \leq |a - b|,$$

for $a = x|x|^{r-1}$ and $b = x|x|^{r-1}$, then we have:

$$||x|^r - |y|^r| \leq \left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right|,$$

so that

$$\left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right| + ||x|^r - |y|^r| \leq 2\left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right|. \tag{3.3.4}$$

Now assume that $|x| \geq |y|$. We have

$$\begin{aligned}
|x-y||x|^{r-1} &= |x|x|^{r-1} - y|x|^{r-1}| \\
&= |x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1} + y|y|^{r-1} - y|x|^{r-1}| \\
&\leq \left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right| + |y|(|x|^{r-1} - |y|^{r-1}) \\
&= \left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right| + |y||x|^{r-1} - |y|^{r} \\
&\leq \left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right| + |x|^{r} - |y|^{r}.
\end{aligned}$$

This leads to the following fact:

$$|x-y|\max(|x|^{r-1}, |y|^{r-1}) \leq \left|x|x|^{r-1} - y|y|^{r-1}\right| + \left||x|^{r} - |y|^{r}\right|. \tag{3.3.5}$$

Bringing together the inequalities (3.3.4) and (3.3.5), we thus obtain the desired inequality. ■

We would like to obtain some rates of convergence to α-stable distributions for ideal probability metrics such as the Wasserstein and total variation distances. We cannot expect some rates of convergence with the previous techniques since we need the homogeneity property of order $r > \alpha$, whereas the total variation and the Wasserstein distances are ideal probability metric of order 0 and 1 respectively. A potential strategy is to introduce the following smooth versions of the Wasserstein and total variation distances by using convolution, see [RR94]. Let ϑ be a symmetric stable random variable and $h > 0$, for any random variables X and Y independent from ϑ, consider

$$L_{r,\vartheta}(X,Y) = \sup_{h>0} h^{r-1}\mathcal{W}(X+h\vartheta, Y+h\vartheta), \quad r > 1,$$

$$\sigma_{r,\vartheta}(X,Y) = \sup_{h>0} h^{r} d_{VT}(X+h\vartheta, Y+h\vartheta), \quad r > 0.$$

Note that $L_{r,\vartheta}(X,Y)$ and $\sigma_{r,\vartheta}(X,Y)$ are probability metrics and homogeneous of order r. Our idea then is to control the Wasserstein and total variation distances by their above smooth versions. Such a question is the matter of a current research.

Chapitre 4

Convex ordering for stable stochastic integrals

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans le journal Stochastics.

Sommaire

Abstract
We establish a convex ordering between stochastic integrals driven by strictly α-stable processes with index $\alpha \in (1,2)$. Our approach is based on the forward-backward stochastic calculus for martingales together with a suitable decomposition of stable stochastic integrals.

4.1 Introduction

It is by now well-known that theoretical development of stochastic orders provides elegant and practical tools for comparison of random phenomena, motivated by various applications in financial mathematics, risk management and stochastic networks. One of the most relevant stochastic orders is the convex order. Given X and Y two integrable random variables, we say that X is less than Y in the convex order, and we write $X \leq_{\mathrm{cx}} Y$, if we have the inequality

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi(Y)\right],$$

for all convex functions φ such that the expectations exist. Such a stochastic order has some nice properties, among others the stability under mixtures and under convolution. In particular, if X and Y are two integrable random variables such that $X \leq_{\mathrm{cx}} Y$, then they have the same mean and moreover,

$$\mathbb{E}[(X-K)^+] \leq \mathbb{E}[(Y-K)^+], \quad K \in \mathbb{R},$$

where F^+ denotes the positive part of a given random variable F. The latter inequality reveals to be convenient for financial applications (option pricing, hedging) and is actually equivalent to another stochastic order commonly denoted $\leq_{\mathrm{icx}}$, the so-called increasing convex order, for which φ is additionally assumed to be non-decreasing. Another interesting consequence of the convex ordering is to facilitate the computation of distances between distributions such as the stop-loss distances (including the famous L^1-Wasserstein distance) and the Zolotarev distances, see for instance [BV02]. Historically, the notion of convex comparison was first introduced by Hoeffding in [Hoe56, Hoe63] to obtain quantitative tail estimates. We refer to the monographs [MS02, SS07] for an extensive analysis of many stochastic orders and their potential applications, with precise credit and references for this large body of work. From a dynamical point of view, the convex ordering has been investigated in the context of Markov processes and semimartingales. See for instance the paper [KJPS98] dealing with diffusions, with a special emphasis on the Black-Scholes model, and also [BR06, BR07] for option pricing involving general semimartingales and Lévy processes. In all these papers, the key point is the so-called propagation of convexity property. Other reference such as [RW11] use techniques based on the comparability of the infinitesimal generators of Markov processes together with the stochastic monotonicity property. Recently, another fruitful method was considered in [KMP06], namely the so-called forward-backward stochastic calculus for martingales, which was followed by a series of papers based on this technology, cf. [ABP08, BP07, BP08, BLP13, LP10]. This approach reveals to be convenient in the non-Markovian framework, when dealing with Brownian stochastic integrals or stochastic integrals driven by a compensated Poisson random measure, and might be extended without any additional effort to the case of stochastic integrals driven by a Lévy process. However, the underlying assumptions required to obtain these convex comparison results enforce the driving Lévy process to have bounded jumps, excluding for instance the important class of stable processes.

Following these observations, the aim of this note is to establish a convex ordering for the stochastic integral $\int_0^T K_t dZ_t$ driven by a real strictly α-stable process $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, where $T > 0$ is a finite time horizon. We restrict our attention to the case $\alpha \in (1,2)$ since the convex ordering only makes sense for random variables with finite mean. Although this stable process has sample paths of infinite variation and unbounded jumps, the forward-backward stochastic calculus combined with a suitable representation of stable stochastic integrals allow us to show the convex comparison

$$\int_0^T K_t dZ_t \leq_{\mathrm{cx}} \int_0^T k(t) dZ_t,$$

where k is some deterministic function bounding, in a particular sense, the predictable process $(K_t)_{t\in[0,T]}$.

The paper is organized as follows. In Section 4.2, we recall some basic material on stable processes and stable stochastic integrals. Then we state our main contribution of the present work, Theorem 4.2.1, in which we derive the convex ordering mentioned above. Our result is a special instance of Theorem 4.2.2, which is more general but less tractable for practical issues since it compares in the convex order forward and backward stable stochastic integrals. Our last part, Section 4.3, is devoted to the proofs of these two results, on the basis of the forward-backward stochastic calculus introduced in [KMP06] together with the representation of stable stochastic integrals developed by Kallenberg in [Kal92].

4.2 Preliminaries and main results

Consider on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a strictly α-stable process $Z := (Z_t)_{t\in[0,T]}$ where T is a finite time horizon and $\alpha \in (1,2)$. Here, strict-stability means the following self-similarity property

$$(Z_{kt})_{t\in[0,T]} \stackrel{d}{=} (k^{1/\alpha} Z_t)_{t\in[0,T]},$$

where $k > 0$ and the equality $\stackrel{d}{=}$ is understood in the sense of finite dimensional distributions. The characteristic function is of the form

$$\varphi_{Z_t}(u) = \exp\left(t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iuy} - 1 - iuy)\nu(dy)\right), \quad t \in [0,T],$$

where ν stands for the Lévy measure defined on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ by

$$\nu(dx) := \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}} \left(c_+ \mathbb{1}_{\{x>0\}} + c_- \mathbb{1}_{\{x<0\}} \right).$$

The parameters c_+, c_- above are non-negative with furthermore $c_+ + c_- > 0$. In the case $c_+ = c_- > 0$, the process is said to be symmetric. The centered process Z has sample paths of infinite variation and unbounded jumps, and it is a pure-jump martingale with respect to its natural filtration $\mathcal{F}_t^Z := \sigma(Z_s : s \in [0,t])$, $t \in [0,T]$. Denoting $\mathcal{F}^Z$ this filtration, we assume that it satisfies the usual hypothesis, that is, completeness and right-continuity. The Lévy-Itô decomposition is given by

$$Z_t = b_R\, t + \int_0^t \int_{|x| \le R} x\, (\mu - \sigma)(ds, dx) + \int_0^t \int_{|x|>R} x\, \mu(ds, dx), \quad t \in [0,T],$$

where R is some arbitrary positive truncation level (classically chosen to be 1) and μ is a Poisson random measure on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ with intensity measure $\sigma(dt, dx) = dt \otimes \nu(dx)$. Here b_R is the drift parameter given by

$$b_R \;:=\; -\int_{|x|>R} x\, \nu(dx) \;=\; -\frac{(c_+ - c_-)\, R^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Denote respectively by Z^{R-} and Z^{R+} the two independent Lévy processes defined by the integrals above. The first one has a compactly supported Lévy measure and is a square-integrable martingale with infinitely many jumps bounded by R on each compact time interval, whereas the second one is an integrable compound Poisson process with jumps larger than R. Let K be a $\mathcal{F}^Z$-predictable process belonging to $L^2(\Omega \times [0,T])$, i.e.,

$$\int_0^T \mathbb{E}[K_t^2]\, dt < +\infty.$$

Then the stable integral $X_T := \int_0^T K_s\, dZ_s$ is well-defined as a stochastic integral with respect to the Lévy-Itô decomposition of Z, that is $X_T = A_T^R + X_T^{R-} + X_T^{R+}$ with

$$A_T^R := b_R \int_0^T K_t\, dt, \quad X_T^{R-} := \int_0^T K_t\, dZ_t^{R-} \quad \text{and} \quad X_T^{R+} := \int_0^T K_t\, dZ_t^{R+},$$

the second aforementioned process being a square-integrable martingale whereas the two other integrals are constructed in the Lebesgue-Stieltjes sense. In particular X_T is integrable and therefore the process X given by

$$X_t := \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t^Z] = \int_0^t K_s\, dZ_s, \quad t \in [0,T],$$

is a $\mathcal{F}^Z$-martingale.

Let us turn to the question we are interested in, namely to establish a convex ordering between stable stochastic integrals. When dealing with a symmetric stable process Z and deterministic integrands, we can proceed directly as follows. Let $k, \tilde{k} \in L^2([0,T])$ be two functions such that $|k(t)| \leq |\tilde{k}(t)|$ for any $t \in [0,T]$. Then the stable integrals

$$X_T := \int_0^T k(t) dZ_t \quad \text{and} \quad \tilde{X}_T := \int_0^T \tilde{k}(t) dZ_t,$$

have the same distribution as the random variables Z'_{σ_T} and $Z'_{\tilde{\sigma}_T}$ respectively, where Z' is a copy of the process Z and the quantities σ_T and $\tilde{\sigma}_T$ are defined by

$$\sigma_T := \int_0^T |k(t)|^\alpha dt \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma}_T := \int_0^T |\tilde{k}(t)|^\alpha dt.$$

Denoting $\mathcal{F}^{Z'}$ the natural filtration of Z', Jensen's inequality entails

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_T\right)\right] &= \mathbb{E}[\varphi(Z'_{\sigma_T})] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(\mathbb{E}[Z'_{\tilde{\sigma}_T} \mid \mathcal{F}^{Z'}_{\sigma_T}])] \\
&\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(Z'_{\tilde{\sigma}_T}) \mid \mathcal{F}^{Z'}_{\sigma_T}]] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(Z'_{\tilde{\sigma}_T})] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(\tilde{X}_T)],
\end{aligned}$$

where φ is a convex function such that the expectations exist. In other words we obtain the convex ordering $X_T \leq_{\text{cx}} \tilde{X}_T$. For instance, such a result might be used to obtain a convex ordering between stable driven Ornstein-Uhlenbeck processes. Indeed consider the following random variables

$$X_T := e^{-\theta T} X_0 + \int_0^T e^{-\theta(T-t)} dZ_t \quad \text{and} \quad Y_T := e^{-\kappa T} X_0 + \int_0^T e^{-\kappa(T-t)} dZ_t,$$

where Z is a symmetric α-stable process independent of the centered initial value X_0, and $\theta, \kappa \in \mathbb{R}$ are two parameters such that $\theta \geq \kappa$. If we denote

$$k(t) := e^{-\theta(T-t)} \quad \text{and} \quad \tilde{k}(t) := e^{-\kappa(T-t)}, \quad t \in [0,T],$$

then we have $k(t) \leq \tilde{k}(t)$ for any $t \in [0,T]$ so that the previous convex ordering yields

$$\int_0^T e^{-\theta(T-t)} dZ_t \leq_{\mathrm{cx}} \int_0^T e^{-\kappa(T-t)} dZ_t.$$

Applying now the following classical property on the increasing convex order $\leq_{\mathrm{icx}}$, cf. [MS02]:

$$\text{if} \quad 0 \leq a \leq b \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[X_0] = 0 \quad \text{then} \quad aX_0 \leq_{\mathrm{icx}} bX_0,$$

then with the choices of $a := e^{-\theta T}$ and $b := e^{-\kappa T}$, we obtain the increasing convex ordering $X_T \leq_{\mathrm{icx}} Y_T$ (after a slight modification of the argument emphasized to derive the stability by convolution of the order $\leq_{\mathrm{icx}}$). Finally, since $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[Y_T]$, the order $X_T \leq_{\mathrm{icx}} Y_T$ thus implies the convex order $X_T \leq_{\mathrm{cx}} Y_T$.

In the case of non-deterministic integrands, the story is more delicate, as it is already the case for Brownian stochastic integrals, cf. [KJPS98] and also the recent papers [BLP13, LP10] in which the authors overcome this difficulty by using the forward-backward stochastic calculus combined with the Malliavin calculus. In the stable setting we focus on in this note, we adapt the forward-backward stochastic calculus initially developed in [KMP06] and use a convenient representation of stable stochastic integrals emphasized by Kallenberg in [Kal92] to obtain the main result of this note. Since it is a particular case of the more abstract Theorem 4.2.2 which will be stated in a moment, we postpone the proof to Section 4.3. Recall that the notation F^+ and F^- stand respectively for the positive and negative parts of a given random variable or deterministic function F.

Theorem 4.2.1 *Let Z be a strictly stable process with index $\alpha \in (1,2)$. Let $K \in L^2(\Omega \times [0,T])$ be a predictable process with respect to the natural filtration of Z and let $k \in L^2([0,T])$. Denote for any $t \in [0,T]$ the rates*

$$\gamma_t := c_+^{1/\alpha} K_t^+ + c_-^{1/\alpha} K_t^- \quad \text{and} \quad \tilde{\gamma}_t := c_+^{1/\alpha} k^+(t) + c_-^{1/\alpha} k^-(t),$$

$$\lambda_t := c_+^{1/\alpha} K_t^- + c_-^{1/\alpha} K_t^+ \quad \text{and} \quad \tilde{\lambda}_t := c_+^{1/\alpha} k^-(t) + c_-^{1/\alpha} k^+(t),$$

and assume that they satisfy the a.s. conditions:

$$\gamma_t \leq \tilde{\gamma}_t \quad \text{and} \quad \lambda_t \leq \tilde{\lambda}_t, \quad t \in [0,T].$$

Then the following convex ordering between stable stochastic integrals holds:

$$\int_0^T K_t dZ_t \leq_{cx} \int_0^T k(t) dZ_t.$$

Certainly, if the two inequalities in the assumptions are reversed, then the convex ordering is also reversed, as expected. Moreover, note that our result might be applied, among others, in the following two classical situations:
(•) the process Z is symmetric and a.s. $|K_t| \leq |k(t)|$ for any $t \in [0,T]$;
(•) both K and k are of the same constant sign and satisfy a.s. $K_t \leq k(t)$ for any $t \in [0,T]$.
For practical issues, we mention that the convex comparison result above is available for all convex functions φ whose growth at infinity is at most polynomial of degree p, with $1 \leq p < \alpha$. For instance, letting the convex function $\varphi(x) := |x|^p$ where $1 \leq p < \alpha$, we need to verify that

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T K_t dZ_t\right|^p\right] < +\infty,$$

so that we will obtain, under the assumptions of Theorem 4.2.1, the following inequality:

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T K_t dZ_t\right|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T k(t) dZ_t\right|^p\right].$$

Let us proceed as in [Jou07] by using a convenient truncation level R in the Lévy-Itô decomposition. Using the notation introduced previously with $X_T := \int_0^T K_t dZ_t$, we have for any fixed $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X_T| > x\right) \leq \mathbb{P}\left(|A_T^R| > x/2\right) + \mathbb{P}\left(|X_T^{R-}| > x/2\right) + \mathbb{P}\left(X_T^{R+} \neq 0\right).$$

Denote T_1^R the first jump time of the Poisson process $\left(\mu\left(\{y \in \mathbb{R} : |y| > R\} \times [0,t]\right)\right)_{t\in[0,T]}$ on the set $\{y \in \mathbb{R} : |y| > R\}$. Since T_1^R is exponentially distributed with parameter

$\nu(\{y \in \mathbb{R} : |y| > R\})$, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_T^{R+} \neq 0) &\leq \mathbb{P}(T_1^R \leq T) \\
&\leq T\,\nu(\{y \in \mathbb{R} \,:\, |y| > R\}) \\
&= \frac{(c_+ + c_-)\,T}{\alpha\,R^\alpha}.
\end{aligned}$$

Now Chebyshev's inequality and the isometry formula for Poisson stochastic integrals entail

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|X_T^{R-}| > x/2\right) &\leq \frac{4}{x^2}\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \int_{|y|\leq R} K_t\,y\,(\mu-\sigma)(dt,dy)\right|^2\right] \\
&= \frac{4}{x^2}\int_{|y|\leq R} y^2\,\nu(dy)\int_0^T \mathbb{E}[K_t^2]\,dt \\
&= \frac{4\,(c_+ + c_-)\,R^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\,x^2}\int_0^T \mathbb{E}[K_t^2]\,dt,
\end{aligned}$$

whereas by Markov's inequality,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|A_T^R| > x/2\right) &\leq \frac{2\,|b_R|}{x}\int_0^T \mathbb{E}[|K_t|]\,dt \\
&= \frac{2\,|c_+ - c_-|\,R^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\,x}\int_0^T \mathbb{E}[|K_t|]\,dt.
\end{aligned}$$

Therefore choosing the truncation level $R = x$ and rearranging the terms above entail the existence of some positive constant, say M, depending on all the parameters except x, such that $\mathbb{P}(|X_T| > x) \leq M x^{-\alpha}$. Finally, we obtain by integrating

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_T|^p] &= \int_0^{+\infty} p\,x^{p-1}\,\mathbb{P}(|X_T| > x)\,dx \\
&\leq 1 + M\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha-p+1}},
\end{aligned}$$

which is finite since $p < \alpha$.

In order to state our second main contribution of the present note, let us recall the notion of backward processes. A backward strictly α-stable process $\tilde{Z}$ is a strictly α-stable process running backwards in time. It shares the same properties as the (forward) process Z and in particular it is a backward martingale with respect to its own filtration. Indeed if $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$ denotes the complete and left-continuous filtration $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}_t := \sigma(\tilde{Z}_s : t \leq s \leq T)$, then the backward martingale property is satisfied, that is

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_s | \mathcal{F}^{\tilde{Z}}_t] = \tilde{Z}_t, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

For instance the process $\tilde{Z}$ defined by

$$\tilde{Z}_t := Z_{T-t}, \quad \text{with} \quad \mathcal{F}^{\tilde{Z}}_t := \mathcal{F}^{Z}_{T-t}, \quad t \in [0,T],$$

is a backward strictly α-stable process. For the sake of briefness, the (forward) processes considered in the sequel are assumed to be right-continuous with left limits, whereas the backward processes are naturally supposed to be left-continuous with right limits. Now let $\tilde{K}$ be a $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$-predictable process belonging to $L^2(\Omega \times [0,T])$. Then the backward stable integral $\tilde{X}_0 := \int_0^T \tilde{K}_s \, \tilde{d}\tilde{Z}_s$ is defined similarly to the forward case, the backward Itô differential $\tilde{d}$ meaning that the limit in probability is taken over sums of the type

$$\sum_{i=1}^{p_n} \tilde{H}_{t_i^n} \, (\tilde{Z}_{t_{i-1}^n} - \tilde{Z}_{t_i^n}),$$

for refining subdivisions (t_i^n) of $[0,T]$. The random variable $\tilde{X}_0$ is integrable and thus the backward process $\tilde{X}$ given by

$$\tilde{X}_t := \mathbb{E}[\tilde{X}_0 | \mathcal{F}^{\tilde{Z}}_t] = \int_t^T \tilde{K}_s \, \tilde{d}\tilde{Z}_s, \quad t \in [0,T],$$

is a $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$-martingale.

Now we are in position to state our second result on which Theorem 4.2.1 is based. In order to relieve the presentation, the proof is also postponed to Section 4.3.

Theorem 4.2.2 *Let $Z, \tilde{Z}$ be two independent forward and backward strictly stable processes, respectively, both with the same index $\alpha \in (1,2)$. Denote c_+, c_- and $\tilde{c}_+, \tilde{c}_-$ the rates of the respective Lévy measures ν and $\tilde{\nu}$. Let $K, \tilde{K} \in L^2(\Omega \times [0,T])$ be two predictable processes with respect to the natural filtrations of Z and $\tilde{Z}$, respectively.*

Denote for any $t \in [0,T]$ the rates

$$\gamma_t := c_+^{1/\alpha} K_t^+ + c_-^{1/\alpha} K_t^- \quad \text{and} \quad \tilde{\gamma}_t := \tilde{c}_+^{1/\alpha} \tilde{K}_t^+ + \tilde{c}_-^{1/\alpha} \tilde{K}_t^-,$$

$$\lambda_t := c_+^{1/\alpha} K_t^- + c_-^{1/\alpha} K_t^+ \quad \text{and} \quad \tilde{\lambda}_t := \tilde{c}_+^{1/\alpha} \tilde{K}_t^- + \tilde{c}_-^{1/\alpha} \tilde{K}_t^+,$$

and assume that they satisfy the a.s. conditions:

$$\gamma_t \le \tilde{\gamma}_t \quad \text{and} \quad \lambda_t \le \tilde{\lambda}_t, \quad t \in [0,T].$$

Then we have the following convex ordering between forward and backward stable s-tochastic integrals:

$$\int_0^T K_t dZ_t \le_{cx} \int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t.$$

Our result remains in the spirit of the following well-known fact: if Z' is an independent copy of Z and $\tilde{Z}$ is the backward process $\tilde{Z}_t = Z'_{T-t}$, $t \in [0,T]$, then the distribution of the random variable $Z_t + \tilde{Z}_t$ does not depend on time $t \in [0,T]$ and thus has the same distribution as Z_T and $\tilde{Z}_0$.

Before turning to the proofs, let us mention that Theorem 4.2.2 might be potentially extended. Indeed, up to some slight changes in the proof below, we are able to consider stable stochastic integrals for which a drift term is added, at the price of weakening the convex order $\le_{\rm cx}$ by the increasing convex order $\le_{\rm icx}$. Under the assumptions and notation of Theorem 4.2.2, consider the drifted integrals

$$\int_0^T K_t dZ_t + \int_0^T L_t dt \quad \text{and} \quad \int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t + \int_0^T \tilde{L}_t dt,$$

where the processes $L, \tilde{L}$ are respectively $\mathcal{F}^Z$- and $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$-adapted and satisfy the a.s. inequality $L_t \le \tilde{L}_t$ for any $t \in [0,T]$. Then one needs in the forthcoming proof of Theorem 4.2.2 to assume that the convex functions of interest are also non-decreasing to preserve the order of the drift parts, so that we obtain the increasing convex ordering

$$\int_0^T K_t dZ_t + \int_0^T L_t dt \le_{\rm icx} \int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t + \int_0^T \tilde{L}_t dt.$$

In particular under appropriate assumptions, the strict stability of the processes $Z, \tilde{Z}$ might be relaxed since any integrable stable process can be transformed into a strictly stable process by removing its expectation (thus corresponding to a drift term).

4.3 Proofs

The core of the present part is devoted to the proof of Theorem 4.2.2 (the proof of Theorem 4.2.1 will follow immediately). Before entering into the details, let us concentrate first our attention on two important tools that will be used in the remainder of the paper, namely the forward-backward stochastic calculus developed in [KMP06] and the decomposition of stable stochastic integrals due to Kallenberg [Kal92]. In the sequel we work under the assumptions and notation of Theorem 4.2.2.

Define the enlarged forward and backward filtrations $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ and $\tilde{\mathcal{F}} := (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$ as

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^Z \vee \mathcal{F}_0^{\tilde{Z}} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_T^Z \vee \mathcal{F}_t^{\tilde{Z}}, \quad t \in [0,T],$$

where we recall that $\mathcal{F}^Z$ and $\mathcal{F}^{\tilde{Z}}$ are the natural filtrations generated by the processes Z and $\tilde{Z}$, respectively. Then Z is still a $\mathcal{F}$-martingale which is $\tilde{\mathcal{F}}$-adapted whereas $\tilde{Z}$ is a $\tilde{\mathcal{F}}$-martingale which is $\mathcal{F}$-adapted. In particular the processes X and $\tilde{X}$ defined by

$$X_t := \int_0^t K_s dZ_s \quad \text{and} \quad \tilde{X}_t := \int_t^T \tilde{K}_s \tilde{d}\tilde{Z}_s, \quad t \in [0,T],$$

inherit the properties of Z and $\tilde{Z}$, respectively. Let $\Delta X_u := X_u - X_{u-}$ be the jump of X at time $u \in (0,T]$ and define similarly the backward jump of $\tilde{X}$ at time $u \in [0,T)$ by $\tilde{\Delta}\tilde{X}_u := \tilde{X}_u - \tilde{X}_{u+}$. Following [KMP06], we recall Itô's formula for forward-backward martingales, applied in our context to the pure-jump stable stochastic integrals $X, \tilde{X}$: for any real-valued function and any $0 \le s \le t \le T$,

$$\begin{aligned} f(X_t, \tilde{X}_t) \;&=\; f(X_s, \tilde{X}_s) + \int_{s^+}^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_{u-}, \tilde{X}_u)\, dX_u - \int_s^{t^-} \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_u, \tilde{X}_{u+})\, \tilde{d}\tilde{X}_u \\ &\quad + \sum_{s<u\le t} \left(f(X_{u-} + \Delta X_u, \tilde{X}_u) - f(X_{u-}, \tilde{X}_u) - \Delta X_u \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_{u-}, \tilde{X}_u) \right) \\ &\quad - \sum_{s\le u<t} \left(f(X_u, \tilde{X}_{u+} + \tilde{\Delta}\tilde{X}_u) - f(X_u, \tilde{X}_{u+}) - \tilde{\Delta}\tilde{X}_u \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_u, \tilde{X}_{u+}) \right), \end{aligned}$$

where $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ is the partial derivative of the function f with respect to the i^{th} coordinate,

$i \in \{1, 2\}$.

Now let us introduce the decomposition of stable stochastic integrals emphasized by Kallenberg in [Kal92]. Since the following argument can be easily generalized to the backward case, we will only focus our attention on the forward situation. First, note that the Lévy measure ν of the strictly α-stable process Z is of the form

$$\nu = c_+ \nu_+ + c_- \nu_-,$$

where ν_+ and ν_- are the measures on $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}_-$, respectively, with Lebesgue density $|x|^{-\alpha-1}$. Hence the self-similarity entails trivially the following representation

$$Z = c_+^{1/\alpha} Z' - c_-^{1/\alpha} Z'',$$

where Z', Z'' are two independent strictly α-stable processes with Lévy measure ν_+. In other words, this decomposition is obtained by separating the positive and negative jumps of Z. Therefore the process X can be rewritten as

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t c_+^{1/\alpha} K_s \, dZ'_s - \int_0^t c_-^{1/\alpha} K_s \, dZ''_s \\ &= \int_0^t c_+^{1/\alpha} K_s^+ \, dZ'_s + \int_0^t c_-^{1/\alpha} K_s^- \, dZ''_s - \int_0^t c_+^{1/\alpha} K_s^- \, dZ'_s - \int_0^t c_-^{1/\alpha} K_s^+ \, dZ''_s. \end{aligned}$$

Then Kallenberg's decomposition for the stable stochastic integral X stands as follows:

$$X_t = \int_0^t \gamma_s \, d\hat{Z}'_s - \int_0^t \lambda_s \, d\hat{Z}''_s,$$

where the processes $\hat{Z}', \hat{Z}''$ given by the stable stochastic integrals

$$\hat{Z}'_t = \int_0^t 1_{\{K_s \geq 0\}} \, dZ'_s + \int_0^t 1_{\{K_s < 0\}} \, dZ''_s \quad \text{and} \quad \hat{Z}''_t = \int_0^t 1_{\{K_s < 0\}} \, dZ'_s + \int_0^t 1_{\{K_s \geq 0\}} \, dZ''_s,$$

are independent and have the same distribution as Z', Z''. As announced above, we are now in position to prove Theorem 4.2.2.

Proof of Theorem 4.2.2. Our aim is to establish the inequality

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T K_t dZ_t\right)\right] \le \mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t\right)\right],$$

for any convex function φ such that the expectations exist. Since this inequality rewrites as

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_T + \tilde{X}_T)\right] \le \mathbb{E}\left[\varphi(X_0 + \tilde{X}_0)\right],$$

the proof will be achieved once we have established that the function $t \in [0,T] \mapsto \mathbb{E}[\varphi(X_t + \tilde{X}_t)]$ is non-increasing. At the price of an unessential regularizing procedure, we can assume without loss of generality that the convex function φ is also C^1 and Lipschitz. Using then the Itô formula above with $f(x,y) = \varphi(x+y)$, we have

$$\begin{aligned}\varphi(X_t + \tilde{X}_t) &= \varphi(X_s + \tilde{X}_s) + \int_{s^+}^t \varphi'(X_{u-} + \tilde{X}_u)\, dX_u - \int_s^{t^-} \varphi'(X_u + \tilde{X}_{u+})\, \tilde{d}\tilde{X}_u \\ &\quad + J_{s,t}^X - J_{s,t}^{\tilde{X}},\end{aligned}$$

where $J_{s,t}^X$ and $J_{s,t}^{\tilde{X}}$ are defined by

$$\begin{aligned} J_{s,t}^X &:= \textstyle\sum_{s<u\le t} \left(\varphi(X_{u-} + \Delta X_u + \tilde{X}_u) - \varphi(X_{u-} + \tilde{X}_u) - \Delta X_u\, \varphi'(X_{u-} + \tilde{X}_u)\right), \\ J_{s,t}^{\tilde{X}} &:= \textstyle\sum_{s\le u<t} \left(\varphi(X_u + \tilde{X}_{u+} + \tilde{\Delta}\tilde{X}_u) - \varphi(X_u + \tilde{X}_{u+}) - \tilde{\Delta}\tilde{X}_u\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_{u+})\right).\end{aligned}$$

By Kallenberg's decomposition of the stable stochastic integral X, we can rewrite $J_{s,t}^X$ in the following way:

$$\begin{aligned} J_{s,t}^X &= \sum_{s<u\le t} \Big(\varphi(X_{u-} + \gamma_u \Delta\hat{Z}'_u - \lambda_u \Delta\hat{Z}''_u + \tilde{X}_u) - \varphi(X_{u-} + \tilde{X}_u)) \\ &\quad -(\gamma_u \Delta\hat{Z}'_u - \lambda_u \Delta\hat{Z}''_u)\varphi'(X_{u-} + \tilde{X}_u)\Big).\end{aligned}$$

Taking then expectation, we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[J_{s,t}^X\right] &= \mathbb{E}\Big[\int_s^t \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi(X_u + \tilde{X}_u + \gamma_u\, x - \lambda_u\, y) - \varphi(X_u + \tilde{X}_u) \\ &\quad -(\gamma_u\, x - \lambda_u\, y)\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_u)\Big)\, \sigma_{\hat{Z}',\hat{Z}''}(du, dx, dy)\Big],\end{aligned}$$

where $\sigma_{\hat{Z}',\hat{Z}''}$ is the $\mathcal{F}$-dual predictable projection of the bivariate process $(\hat{Z}', \hat{Z}'')$. Since its coordinates are independent and have the same distribution as Z', Z'', the measure $\sigma_{\hat{Z}',\hat{Z}''}$ is the tensor product of the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$ and the two-dimensional Lévy measure concentrated on the axis and with two marginals ν_+. Therefore we get from the above computations,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[J^X_{s,t}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_0^{+\infty} \left(\varphi(X_u + \tilde{X}_u + \gamma_u\, x) - \varphi(X_u + \tilde{X}_u) - \gamma_u\, x\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_u)\right)\, du\, \nu_+(dx)\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_0^{+\infty} \left(\varphi(X_u + \tilde{X}_u - \lambda_u\, y) - \varphi(X_u + \tilde{X}_u) + \lambda_u\, y\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_u)\right)\, du\, \nu_+(dy)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_0^{+\infty} \left(\varphi(X_u + \tilde{X}_u + a) - \varphi(X_u + \tilde{X}_u) - a\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_u)\right)\, \gamma_u^\alpha\, du\, \frac{da}{|a|^{\alpha+1}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{0} \left(\varphi(X_u + \tilde{X}_u + b) - \varphi(X_u + \tilde{X}_u) - b\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_u)\right)\, \lambda_u^\alpha\, du\, \frac{db}{|b|^{\alpha+1}}\right],
\end{aligned}$$

where in the last line we used two obvious changes of variables. Hence we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[J^X_{s,t}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(X_u + \tilde{X}_u + x) - \varphi(X_u + \tilde{X}_u) - x\, \varphi'(X_u + \tilde{X}_u)\right)\right. \\
&\qquad \left. \times(\gamma_u^\alpha\, 1_{\{x>0\}} + \lambda_u^\alpha\, 1_{\{x<0\}})\, du\, \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}\right].
\end{aligned}$$

Certainly, a similar method applied in the backward case allows us to get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[J^{\tilde{X}}_{s,t}\right] &= \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(\tilde{X}_u + X_u + x) - \varphi(\tilde{X}_u + X_u) - x\, \varphi'(\tilde{X}_u + X_u)\right)\right. \\
&\qquad \left. \times(\tilde{\gamma}_u^\alpha 1_{\{x>0\}} + \tilde{\lambda}_u^\alpha 1_{\{x<0\}})\, du \frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}\right].
\end{aligned}$$

Finally taking expectation in the Itô formula above and plugging the previous calculations, we have

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_t+\tilde{X}_t)\right]-\mathbb{E}\left[\varphi(X_s+\tilde{X}_s)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_s^t\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(X_u+\tilde{X}_u+x)-\varphi(X_u+\tilde{X}_u)-x\varphi'(X_u+\tilde{X}_u)\Big)\left(\gamma_u^\alpha-\tilde{\gamma}_u^\alpha\right)du\,\frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_s^t\int_{-\infty}^0\Big(\varphi(X_u+\tilde{X}_u+x)-\varphi(X_u+\tilde{X}_u)-x\varphi'(X_u+\tilde{X}_u)\Big)\left(\lambda_u^\alpha-\tilde{\lambda}_u^\alpha\right)du\,\frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}\right],$$

which is non-positive by the convexity of φ and our assumptions. The proof of Theorem 4.2.2 is now complete. ■

To achieve this short note, it remains to prove our main result Theorem 4.2.1 on the basis of Theorem 4.2.2.

Proof of Theorem 4.2.1. The proof is a straightforward consequence of Theorem 4.2.2 since under the conditions $\tilde{c}_+ = c_+$ and $\tilde{c}_- = c_-$ and when the process $\tilde{K}$ is actually deterministic (equal to the given function k), the backward stable stochastic integral $\int_0^T \tilde{K}_t \tilde{d}\tilde{Z}_t$ has the same distribution as the forward integral $\int_0^T \tilde{K}_t dZ_t$. ■

Acknowledgments

The authors thank Yutao Ma for useful discussions. They are also grateful to the French Agency Campus France for financial support.

Bibliographie

[Aa00] C. Ané and al. Sur les inégalités de sobolev logarithmiques. *Société Mathématique de France, Paris*, 10, 2000. (Cité, page 66.)

[ABP08] M. Arnaudon, J.C. Breton, and N. Privault. Convex ordering for random vectors using predictable representation. *Potential Analysis*, 29(4):327–349, 2008. (Cité, pages 21 et 84.)

[Ald78] D. Aldous. Stopping times and tightness. *The Annals of Probability*, 6(2):335–340, 1978. (Cité, page 14.)

[Ba11] K. Bartkiewicz and al. Stable limits for sums of dependent infinite variance random variables. *Probability theory and related fields*, 150(3-4):337–372, 2011. (Cité, pages 31 et 49.)

[BCG08] D. Bakry, P. Cattiaux, and A. Guillin. Rate of convergence for ergodic continuous markov processes: Lyapunov versus poincaré. *Journal of Functional Analysis*, 254(3):727–759, 2008. (Cité, page 68.)

[BGW96] Y.Z. Bergman, B.D. Grundy, and Z. Wiener. General properties of option prices. *The Journal of Finance*, 51(5):1573–1610, 1996. (Cité, pages 21 et 22.)

[Bha82] R.N. Bhattacharya. On the functional central limit theorem and the law of the iterated logarithm for markov processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 60(2):185–201, 1982. (Cité, page 8.)

[Bil61] P. Billingsley. The lindeberg-levy theorem for martingales. In *Proc. Amer. Math. Soc*, volume 12, pages 88–792, 1961. (Cité, page 8.)

[Bil09] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*, volume 493. John Wiley and Sons, 2009. (Cité, page 14.)

[BJ00] N. Bellamy and M. Jeanblanc. Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion. *Finance and Stochastics*, 4(2):209–222, 2000. (Cité, pages 21 et 22.)

[BK12] B. Basrak and D. Krizmanić. A functional limit theorem for dependent sequences with infinite variance stable limits. *The Annals of Probability*, 40(5):2008–2033, 2012. (Cité, pages 31, 47, 49, 61 et 63.)

[BLP13] J.C. Breton, B. Laquerrière, and N. Privault. Convex comparison inequalities for non-markovian stochastic integrals. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 85(5):789–806, 2013. (Cité, pages 21, 84 et 88.)

[BP07] J.C. Breton and N. Privault. Convex comparison inequalities for exponential jump-diffusion processes. *Communications on Stochastic Analysis*, 1(2):263–277, 2007. (Cité, pages 21 et 84.)

[BP08] J.C. Breton and N. Privault. Bounds on option prices in point process diffusion models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(06):597–610, 2008. (Cité, page 84.)

[BR06] J. Bergenthum and L. Rüschendorf. Comparison of option prices in semi-martingale models. *Finance and Stochastics*, 10(2):222–249, 2006. (Cité, pages 21, 22 et 84.)

[BR07] J. Bergenthum and L. Rüschendorf. Comparison of semimartingales and lévy processes. *The Annals of Probability*, 35(1):228–254, 2007. (Cité, pages 21, 22 et 84.)

[Bra05] R. Bradley. Basic properties of strong mixing conditions. a survey and some open questions. *Probability surveys*, 2(2):107–144, 2005. (Cité, pages 10 et 11.)

[Bro71] B.M. Brown. Martingale central limit theorems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(1):59–66, 1971. (Cité, page 8.)

[BV02] M.V. Boutsikas and F. Vaggelatou. On the distance between convex-ordered random variables, with applications. *Advances in Applied Probability*, pages 349–374, 2002. (Cité, pages 21 et 84.)

[Cat04] P. Cattiaux. A pathwise approach of some classical inequalities. *Potential Analysis*, 20(4):361–394, 2004. (Cité, page 66.)

[CCG12] P. Cattiaux, D. Chafaï, and A. Guillin. Central limit theorems for additive functionals of ergodic markov diffusions processes. *ALEA*, 9(2):337–382, 2012. (Cité, pages 8, 47, 48, 49, 52, 56 et 58.)

[CG08] P. Cattiaux and A. Guillin. Deviation bounds for additive functionals of markov processes. *ESAIM: Probability and Statistics*, 12:12–29, 2008. (Cité, page 49.)

[CG09] P. Cattiaux and A. Guillin. Trends to equilibrium in total variation distance. *Ann. Inst. Henri Poincaré. Prob. Stat*, 45(1):117–145, 2009. (Cité, page 68.)

[CGR10] P. Cattiaux, A. Guillin, and C. Roberto. Poincaré inequality and the lp convergence of semi-groups. *Electronic Communications in Probability*, 15:270–280, 2010. (Cité, page 52.)

[CGZ13] P. Cattiaux, A. Guillin, and P.A. Zitt. Poincaré inequalities and hitting times. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, volume 49, pages 95–118. Institut Henri Poincaré, 2013. (Cité, pages 54 et 68.)

[Che06] M. Chen. *Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory.* Springer, 2006. (Cité, page 68.)

[CMA14] P. Cattiaux and S.M. Manou-Abi. Limit theorems for some functionals with heavy tails of a discrete time markov chain. *ESAIM: Probability and Statistics*, 18:468–482, 2014. (Cité, page 30.)

[Dav83] R.A. Davis. Stable limits for partial sums of dependent random variables. *The Annals of Probability*, 11(2):262–269, 1983. (Cité, pages 31 et 61.)

[DH95] R.A. Davis and T. Hsing. Point process and partial sum convergence for weakly dependent random variables with infinite variance. *The Annals of Probability*, pages 879–917, 1995. (Cité, page 31.)

[DJ89a] M. Denker and A. Jakubowski. Stable limit distributions for strongly mixing sequences. *Statistics and Probability Letters*, 8(5):477–483, 1989. (Cité, page 31.)

[DJ89b] M. Denker and A. Jakubowski. Stable limit distributions for strongly mixing sequences. *Statistics and Probability Letters*, 8(5):477–483, 1989. (Cité, pages 47, 49, 60, 61 et 62.)

[DL03] Y. Derriennic and M. Lin. The central limit theorem for markov chains started at a point. *Probability theory and related fields*, 125(1):73–76, 2003. (Cité, page 8.)

[Dou03] P. Doukhan. Models, inequalities, and limit theorems for stationary sequences. *Theory and applications of long-range dependence*, pages 43–100, 2003. (Cité, page 10.)

[DR78] R. Durrett and S.I Resnick. Functional limit theorems for dependent variables. *The Annals of Probability*, pages 829–846, 1978. (Cité, pages 14 et 15.)

[DS95] E. A. Van Doorn and P. Schrdner. Geometric ergodicity and quasi-stationnarity in discrete time birth-death processes. *J.Austral.Math.Soc.Ser. B*, 37:121–144, 1995. (Cité, page 68.)

[DSC96] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. Nash inequalities for finite markov chains. *Journal of Theoretical Probability*, 9(2):459–510, 1996. (Cité, pages 17 et 34.)

[ET07] E. Ekström and J. Tysk. Properties of option prices in models with jumps. *Mathematical Finance*, 17(3):381–397, 2007. (Cité, page 23.)

[Fel] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications ii, 1971. (Cité, page 12.)

[Fel71] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications. *Wiley series in probability and mathematical statistics.*, 1971. (Cité, page 72.)

[GK68] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov. *Limit distributions for sums of independent random variables*, volume 233. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1968. (Cité, pages 11 et 72.)

[GM02] A.A. Gushchin and E. Mordecki. Bounds of option prices for semimartingale market models. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics-Interperiodica Translation*, 237:73–113, 2002. (Cité, page 22.)

[Gor69] M.I. Gordin. Central limit theorem for stationary processes. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 188(4):739, 1969. (Cité, page 7.)

[H02] O. Häggström. *Finite Markov chains and algorithmic applications*, volume 52. Cambridge University Press, 2002. (Cité, page 2.)

[Hel82] I.S. Helland. Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time. *Scandinavian Journal of Statistics*, pages 79–94, 1982. (Cité, page 8.)

[Her84] N. Herrndorf. A functional central limit theorem for weakly dependent sequences of random variables. *The Annals of Probability*, pages 141–153, 1984. (Cité, pages 10 et 11.)

[Her85] N. Herrndorf. A functional central limit theorem for strongly mixing sequences of random variables. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 69(4):541–550, 1985. (Cité, pages 10 et 11.)

[Hey74] C.C. Heyde. On the central limit theorem for stationary processes. *Probability theory and related fields*, 30(4):315–320, 1974. (Cité, page 8.)

[Hob98] D.G. Hobson. Volatility misspecification, option pricing and superreplication via coupling. *Annals of Applied Probability*, pages 193–205, 1998. (Cité, pages 21 et 22.)

[Hoe56] W. Hoeffding. On the distribution of the number of successes in independent trials. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 713–721, 1956. (Cité, pages 20 et 84.)

[Hoe63] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American statistical association*, 58(301):13–30, 1963. (Cité, pages 20 et 84.)

[Ibr62] I.A. Ibragimov. Some limit theorems for stationary processes. *Theory of Probability and Its Applications*, 7(4):349–382, 1962. (Cité, pages 10 et 11.)

[Ibr63] I.A. Ibragimov. A central limit theorem for a class of dependent random variables. *Theory of Probability and Its Applications*, 8(1):83–89, 1963. (Cité, page 8.)

[JK89] A. Jakubowski and M. Kobus. stable limit theorems for sums of dependent random vectors. *Journal of Multivariate Analysis*, 29(2):219–251, 1989. (Cité, page 49.)

[JKO09] M. Jara, T. Komorowski, and S. Olla. Limit theorems for additive functionals of a markov chain. *The Annals of Applied Probability*, pages 2270–2300, 2009. (Cité, pages 13, 14, 15, 16, 17, 49, 61, 65 et 67.)

[JM76] J. Jacod and J. Mémin. Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. *Probability Theory and Related Fields*, 35(1):1–37, 1976. (Cité, page 24.)

[JMA15] A. Joulin and S.M. Manou-Abi. A note on convex ordering for stable stochastic integrals. *Stochastics, DOI: 10.1080/17442508.2014.989528*, 2015. (Cité, page 30.)

[Jon04] G. Jones. On the markov chain central limit theorem. *Probability surveys*, 1(299-320):5–1, 2004. (Cité, page 8.)

[Jou07] A. Joulin. On maximal inequalities for stable stochastic integrals. *Potential Analysis*, 26(1):57–78, 2007. (Cité, page 89.)

[Kal92] O. Kallenberg. Some time change representations of stable integrals, via predictable transformations of local martingales. *Stochastic processes and their applications*, 40(2):199–223, 1992. (Cité, pages 42, 85, 88, 93 et 94.)

[KJPS98] N.El. Karoui, M. Jeanblanc-Picqué, and S.E. Shreve. Robustness of the black and scholes formula. *Mathematical finance*, 8(2):93–126, 1998. (Cité, pages 21, 22, 84 et 88.)

[Kle02] T. Klein. Une inégalité de concentration à gauche pour les processus empiriques. *Comptes Rendus Mathematique*, 334(6):501–504, 2002. (Cité, page 21.)

[KMP06] T. Klein, Y. Ma, and N. Privault. Convex concentration inequalities and forward-backward stochastic calculus. *Electron. J. Probab*, 11(20):486–512, 2006. (Cité, pages 21, 25, 30, 84, 85, 88 et 93.)

[KR05] T. Klein and E. Rio. Concentration around the mean for maxima of empirical processes. *The Annals of Probability*, 33(3):1060–1077, 2005. (Cité, page 21.)

[Kri10] D. Krizmanic. *Functional limit theorems for weakly dependent regularly varying time series*. PhD thesis, Ph. D. thesis, in progress. Available at: http://www. math. uniri. hr/ dkrizmanic/DKthesis (in-progress). pdf, 2010. (Cité, pages 31, 47, 49, 59, 60, 61, 62 et 63.)

[KS12] T. Komorowski and L. Stepień. Long time, large scale limit of the wigner transform for a system of linear oscillators in one dimension. *Journal of Statistical Physics*, 148(1):1–37, 2012. (Cité, pages 13 et 19.)

[KV86] C. Kipnis and S.R. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible markov processes and applications to simple exclusions. *Communications in Mathematical Physics*, 104(1):1–19, 1986. (Cité, page 8.)

[Lea88] R.M. Leadbetter. Extremal theory for stochastic processes. *Ann. Probab*, 16:431–478, 1988. (Cité, page 31.)

[LP10] B. Laquerrière and N. Privault. Deviation inequalities for exponential jump-diffusion processes. *Theory Stoch. Process*, 16:67–72, 2010. (Cité, pages 84 et 88.)

[LPW08] D.A. Levin, Y. Peres, and E.L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Soc., 2008. (Cité, page 2.)

[M06] F. Merlevède and . Recent advances in invariance principles for stationary sequences. *Probability surveys*, 3(1):36, 2006. (Cité, pages 10 et 11.)

[Mar99] C. Martini. Propagation of convexity by markovian and martingalian semi-groups. *Potential Analysis*, 10(2):133–175, 1999. (Cité, pages 21, 22 et 23.)

[Mic97] L. Miclo. Remarques sur l'hypercontractivité et l'évolution de l'entropie pour des chaînes de markov finies. In *Séminaire de Probabilités XXXI*, pages 136–167. Springer, 1997. (Cité, pages 17 et 34.)

[Mic13] L. Miclo. On hyperboundedness and spectrum of markov operators. Prepint, available on hal-00777146, 2013. (Cité, page 66.)

[Mij86] J. Mijnheer. On the rate of convergence to a stable limit law ii. *Lithuanian Mathematical Journal*, 26(3):255–259, 1986. (Cité, pages 37 et 80.)

[MPU06] F. Merlevède, M. Peligrad, and S. Utev. Recent advances in invariance principles for stationary sequences. *Probability surveys*, 3(1):36, 2006. (Cité, page 58.)

[MS02] A. Müller and D. Stoyan. *Comparison methods for stochastic models and risks*, volume 389. John Wiley and Sons, Chichester, 2002. (Cité, pages 84 et 88.)

[MT93a] S. Meyn and R. Tweedie. Stability of markovian processes iii: Foster-lyapunov criteria for continuous-time processes. *Advances in Applied Probability*, pages 518–548, 1993. (Cité, page 4.)

[MT93b] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. Markov chains and stochastic stability. communication and control engineering series. *Springer-Verlag London Ltd., London*, 1:993, 1993. (Cité, page 68.)

[MW00] M. Maxwell and M. Woodroofe. Central limit theorems for additive functionals of markov chains. *Annals of probability*, pages 713–724, 2000. (Cité, page 8.)

[Num04] E. Nummelin. *General irreducible Markov chains and non-negative operators*, volume 83. Cambridge University Press, 2004. (Cité, page 2.)

[OLK12] S. Olla, C. Landim, and T. Komorowski. *Fluctuations in Markov Processes. Time Symmetry and Martingale Approximation.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, 2012. (Cité, page 8.)

[Pel82] M. Peligrad. Invariance principles for mixing sequences of random variables. *The Annals of Probability*, pages 968–981, 1982. (Cité, pages 10 et 11.)

[Pro56] Y.V. Prokhorov. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theory of Probability and Its Applications*, 1(2):157–214, 1956. (Cité, page 14.)

[Rac91] S.T. Rachev. *Probability metrics and the stability of stochastic models*, volume 334. Wiley New York, 1991. (Cité, page 73.)

[RR90] S. T. Rachev and L. Rüschendorf. Approximation of sums by compound poisson distributions with respect to stop-loss distances. *Advances in applied probability*, pages 350–374, 1990. (Cité, page 78.)

[RR94] S.T. Rachev and L. Rüschendorf. *On the rate of convergence in the CLT with respect to the Kantorovich metric*. Springer, 1994. (Cité, page 81.)

[RS70] M. Rothschild and J.E. Stiglitz. Increasing risk: I. a definition. *Journal of Economic theory*, 2(3):225–243, 1970. (Cité, page 21.)

[RW01] M. Röckner and F.Y. Wang. Weak poincaré inequalities and l2-convergence rates of markov semigroups. *Journal of Functional Analysis*, 185(2):564–603, 2001. (Cité, pages 34 et 54.)

[RW11] L. Rüschendorf and V. Wolf. Comparison of markov processes via infinitesimal generators. *Statist. Decisions*, 28(2):151–168, 2011. (Cité, page 84.)

[Sep06] T. Seppäläinen. Notes on the martingale approach to central limit theorems for markov chains. 2006. (Cité, page 8.)

[Sko56] A.V. Skorokhod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory of Probability and Its Applications*, 1(3):261–290, 1956. (Cité, page 14.)

[SS07] M. Shaked and G.J. Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer, New York, 2007. (Cité, pages 20 et 84.)

[ST94] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*, volume 1. CRC Press, 1994. (Cité, page 12.)

[TK10] M. Tyran-Kamińska. Convergence to lévy stable processes under some weak dependence conditions. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(9):1629–1650, 2010. (Cité, pages 47, 49, 61 et 63.)

[Wan12] J. Wang. Criteria for super-and weak-poincaré inequalities of ergodic birth-death processes. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 28(2):357–370, 2012. (Cité, page 18.)

[Whi02] W. Whitt. *Stochastic-process limits: an introduction to stochastic-process limits and their application to queues.* Springer, 2002. (Cité, page 14.)

[Woe09] W. Woess. *Denumerable Markov Chains.* 2009. (Cité, page 2.)

[Zol83] V.M. Zolotarev. Probability metrics. *Theory of Probability and Its Applications*, 28(2):278–302, 1983. (Cité, page 79.)

[Zol97] V.M. Zolotarev. *Modern theory of summation of random variables.* Walter de Gruyter, 1997. (Cité, pages 73 et 75.)

Résumé

Cette thèse se compose de trois parties indépendantes, toutes en rapport avec les lois et processus stables. Dans un premier temps, nous établissons des théorèmes de convergence (principe d'invariance) vers des processus stables. Les objets considérés sont des fonctionnelles additives de carrés non intégrables d'une chaîne de Markov à temps discret. L'approche envisagée repose sur l'utilisation des coefficients de mélange pour les chaînes de Markov. Dans un second temps, nous obtenons des vitesses de convergence vers des lois stables dans le théorème central limite généralisé à l'aide des propriétés de la distance idéale de Zolotarev. La dernière partie est consacrée à l'étude des ordres stochastiques convexes ou inégalités de comparaison convexe entre des intégrales stochastiques dirigées par des processus stables. L'idée principale sur laquelle reposent les résultats consiste à adapter au contexte stable le calcul stochastique forward-backward.

Mots-clés: Processus stable, loi stable, chaîne de Markov, théorème limite, vitesse de convergence, distance idéale, intégrale stochastique, ordre stochastique.

Abstract

This PhD Thesis is composed of three independent parts about stable laws and processes. In the first part, we establish convergence theorems (invariance principle) to stable processes, for additive functionals of a discrete time Markov chain that are not assumed to be square-integrable. The method is based on the use of mixing coefficients for Markov chains. In the second part, we obtain some rates of convergence to stable laws in the generalized central limit theorem by means of the Zolotarev ideal probability metric. The last part of the thesis is devoted to the study of convex ordering or convex comparison inequalities between stochastic integrals driven by stable processes. The main idea of our results is based on the forward-backward stochastic calculus for the stable case.

Key words: Stable process, stable law, markov chain, limit theorem, rate of convergence, ideal probability metric, stochastic integral, stochastic order.